COLECȚIA LYCEUM

LYCEUM

E. GEORGESCU-BUZĂU • I. DRĂGHICESCU • N. MATEI

Probleme actuale de matematică în liceu

Mulțimi - Structuri algebrice - Probabilități

EDITURA ALBATROS

Scanned with OKEN Scanner

Colecția LYCEUM

Referent științific:
prof. dr. CONSTANTIN P. POPOVICI

Mama

$L = 26 - 42 - 130$ (100).

$b = 100$ $l_f = 38$; $l_s = 37$.

$t = 84$ (86)

$ans = 108$

Lucia

$L = 28 - 46 - 145$

$b = 98$

$t = 78$

$ans = 109$

$l_f = 42$

$l_s = 41$

9

26

Ilustrația copertei de ALEX. IONESCU

$L_m = 68$

E. GEORGESCU-BUZĂU
I. DRĂGHICESCU
N. MATEI

Probleme actuale de matematică în liceu

MULȚIMI
STRUCTURI ALGEBRICE
PROBABILITĂȚI

EDITURA ALBATROS

Scanned with OKEN Scanner

Această carte este destinată elevilor de liceu și poate fi utilizată pentru lecțiile curente de matematică, precum și pentru pregătirea în vederea olimpiadelor sau a concursurilor de admitere în facultăți.

Cartea este alcătuită din cinci capitole : I. Elemente de teoria mulțimilor ; II. Relații ; III. Funcții ; IV. Structuri algebrice ; V. Probabilități. Fiecare capitol este împărțit în trei părți : 1 — o prezentare teoretică a noțiunilor utilizate în cursul capitolului ; 2 — exerciții rezolvate ; 3 — exerciții propuse. Acele părți care sînt cuprinse mai detaliat în manualele școlare sînt tratate aici sumar, avîndu-se în vedere, în special, precizarea notațiilor și a terminologiei utilizate în cursul lucrării.

Există cărți de nivel școlar în care sînt prezentate în mod independent probleme de teoria mulțimilor, structuri algebrice și calculul probabilităților.

Cartea de față a fost concepută ca o demonstrație a unității profunde care există însă între disciplinele menționate. În procesul de modernizare a învățămîntului matematic, teoria mulțimilor și structurile reprezintă cadrul natural indispensabil abordării oricărei probleme de matematică, făcînd posibilă tratarea în mod unitar și sistematic a matematicii în liceu. Discipline care în mod tradițional au fost considerate independente (algebră, geometrie, trigonometrie, analiză, probabilități) pot fi astfel prezentate în interconexiunea lor, evidențiindu-se unitatea internă a matematicii.

Scanned with OKEN Scanner

Prezentarea teoretică și problemele se încadrează, în general, în limitele programei școlare, dar sînt cazuri cînd am indicat unele extinderi imediate ale unor teme din programa de matematică, extinderi care pot fi prezentate la cercurile de elevi.

Lucrările indicate în lista bibliografică permit cititorului să adîncească problematica acestei cărți.

Autorii

Scanned with OKEN Scanner

I. ELEMENTE DE TEORIA MULȚIMILOR

§ 1. Mulțimi. Elemente

Înțelesul cuvîntului mulțime în matematică este același ca în vorbirea curentă. Obiectele din care este alcătuită o mulțime poartă numele de *elemente* ale mulțimii. Pentru uniformitatea limbajului se acceptă și mulțimi cu un singur element, precum și o mulțime fără nici un element numită *mulțimea vidă* și notată cu simbolul $\varnothing$.

§ 2. Relația de apartenență

Propoziția „a este un element al mulțimii A“ se scrie „$a \in A$“ și în acest caz se spune că „elementul a aparține mulțimii A“. Dacă elementul a nu aparține mulțimii A, se scrie „$a \notin A$“.

§ 3. Notații pentru mulțimi

a) Dacă mulțimea considerată conține un număr mic de elemente și există cîte un semn pentru fiecare element, atunci mulțimea se notează scriind aceste semne într-o acoladă în orice ordine dorim.

De exemplu, mulțimea primelor patru litere minuscule din alfabetul latin se va nota prin $\{a, b, c, d\}$ sau prin $\{a, c, b, d\}$ sau prin $\{b, c, a, d\}$ etc.

În cazul cînd nu există posibilitatea vreunei confuzii, se scriu între acolade numai cîteva elemente, iar în locul elementelor nescrise se trec trei puncte. De exemplu, mulțimea primelor 400 numere întregi strict pozitive se va putea nota astfel : $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 399, 400\}$.

b) Notația $\{x \mid x$ are proprietatea $P[x]\}$ se folosește pentru mulțimea elementelor x care au proprietatea $P[x]$.

Scanned with OKEN Scanner

Proprietatea $P[x]$ trebuie astfel enunțată încît să putem decide pentru orice element dacă aparține sau nu aparține mulțimii.

De exemplu, mulțimea A a elementelor x cu proprietatea „x este un număr natural divizor al lui 12“, se scrie astfel:

$A = \{x \mid x$ este un număr natural divizor al lui $12\}$.

Avem:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

Mulțimea M a elementelor x cu proprietatea „x este un număr real mare“ nu este bine definită, căci pe baza proprietății enunțate nu putem stabili, fără o convenție prealabilă, dacă, de exemplu, 10 aparține lui M sau nu aparține lui M.

§ 4. Relația de egalitate

Semnul „$=$“ se scrie între două semne care reprezintă același element sau aceeași mulțime. De exemplu, avem $2 \cdot 3 + 5 = 10 + 1$, căci semnele „$2 \cdot 3 + 5$“ și „$10 + 1$“ reprezintă același element, numărul „unsprezece“ și $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$, căci simbolurile „$\{1, 2, 3\}$“ și „$\{3, 1, 2\}$“ reprezintă aceeași mulțime, mulțimea primelor trei numere întregi strict pozitive.

§ 5. Propoziții

În raționamentele matematice uzuale prin „propoziție“ se înțelege ceea ce în termeni lingvistici se reprezintă printr-o frază afirmativă semnificativă.

Exemple

P_1. „$2 + 3 = 4 + 1$“;
P_2. „$2 \cdot 7 = 3 + 4$“;
P_3. „$x + 2 < 7$“ $(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$;
P_4. „$x^2 + 2 > 1$“ $(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$;
P_5. „$x^2 + 1 < 0$“ $(x \in \{-1, 0, 1\})$.

Într-o propoziție pot interveni numai constante (cazul propozițiilor P_1 și P_2) sau pot interveni și variabile dintr-o anumită mulțime (cazul propozițiilor P_3, P_4, P_5). Propozițiile în care figurează și variabile poartă numele, în logica matematică, de *predicate*.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă într-o propoziție P intervine variabila x, respectiv variabilele x și y, se va sublinia uneori acest fapt prin notația „$P[x]$“, respectiv „$P[x, y]$“.

O propoziție care conține numai constante poate fi adevărată sau falsă. De exemplu, propoziția P_1 este adevărată, iar propoziția P_2 este falsă. O propoziție care conține și variabile este adevărată pentruanumite valori ale variabilei și falsă pentru alte valori.

Mulțimea valorilor pentru care o propoziție este adevărată se numește mulțimea de adevăr asociată propoziției respective.

De exemplu, propoziția P_3 este adevărată pentru $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ și falsă pentru $x = 5$ și $x = 6$.

Mulțimea de adevăr este $\{1, 2, 3, 4\}$.

Propoziția P_4 este adevărată pentru orice element x al mulțimii date. Mulțimea de adevăr este $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. 10\}$.

Propoziția P_5 este falsă pentru orice x din mulțimea $\{-1, 0, 1\}$. Mulțimea de adevăr este mulțimea vidă.

§ 6. Implicația logică

a) *Definiția implicației*

Se spune că „propoziția P implică propoziția Q“ și se scrie „$P \Rightarrow Q$“ dacă ori de cîte ori este adevărată P este adevărată și Q. Altfel spus, propoziția „$P \Rightarrow Q$“ este adevărată numai atunci cînd Q rezultă din P prin aplicarea unor reguli acceptate în contextul în care sînt considerate cele două propoziții. În implicația „$P \Rightarrow Q$“, propoziția P se numește *premisă*, iar propoziția Q se numește *concluzie*.

Se convine ca în cazul că premisa este falsă, implicația să se considere adevărată.

Pentru indicarea cazurilor în care o propoziție formată din mai multe propoziții este adevărată, vom folosi un tabel numit „tabel de adevăr“ în care vom scrie „a“ în loc de „adevărată“ și „f“ în loc de „falsă“*. Tabelul de adevăr corespunzător propoziției $P \Rightarrow Q$ este tabelul nr. 1.

---

* În unele cărți în loc de „a“ se scrie simbolul „1“ și în loc de „f“ se scrie simbolul „0“.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
a	a	a
a	f	f
f	a	a
f	f	a

Tabelul nr. 1

Tabelul nr. 1 arată că pentru a dovedi că o implicație este adevărată, este suficient să dovedim că în cazurile cînd premisa este adevărată, este adevărată și concluzia.

Exemplu. Fie P propoziția „Numărul x este o rădăcină a ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$“ și Q propoziția „Numărul x este o rădăcină a ecuației $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$“. Implicația „$P \Rightarrow Q$“ este adevărată, căci propoziția P este adevărată cînd $x = 1$ sau $x = 2$, cazuri în care Q este adevărată.

Implicația „$Q \Rightarrow P$“ nu este adevărată, căci Q este adevărată și dacă $x = 3$, caz în care P este falsă.

b) *Regula de modus ponens*

Nu trebuie confundate cazurile cînd implicația este adevărată, cu cazurile cînd concluzia este adevărată. (În tabelul nr. 1 se observă că dacă P este falsă și Q falsă, atunci implicația „$P \Rightarrow Q$“ este adevărată).

Următoarea regulă, denumită *regula de modus ponens*, se aplică frecvent în raționamentele matematice : *dacă implicația „$P \Rightarrow Q$“ este adevărată și dacă premisa P este adevărată atunci și concluzia Q este adevărată.*

§ 7. Echivalența logică

Se spune că propoziția P este echivalentă cu propoziția Q și se scrie „$P \Leftrightarrow Q$“, dacă „$P \Rightarrow Q$“ și „$Q \Rightarrow P$“. Așadar, propoziția „$P \Leftrightarrow Q$“ este adevărată cînd implicațiile „$P \Rightarrow Q$ și „$Q \Rightarrow P$“ sînt adevărate, adică atunci cînd propozițiile P și Q sînt simultan adevărate , respectiv simultan false.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul de adevăr corespunzător echivalenței este tabelul nr. 2.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
a	a	a
a	f	f
f	a	f
f	f	a

Tabelul nr. 2

Exemplu. Fie P propoziția „Numărul x este o rădăcină a ecuației $3x + 4 = 8$“ și Q propoziția „Numărul x este o rădăcină a ecuației $3 + 4x = \frac{25}{3}$“. Echivalența „$P \Leftrightarrow Q$“ este adevărată deoarece propozițiile P și Q sînt adevărate pentru $x = \frac{4}{3}$ și false în celelalte cazuri.

§ 8. Proprietăți ale implicației și echivalenței

a) Oricare ar fi propoziția P, implicația „$P \Rightarrow P$“ este adevărată (proprietatea de reflexivitate a implicației). Această proprietate se poate justifica prin următorul tabel:

P	$P \Rightarrow P$
a	a
f	a

Tabelul nr. 3

b) Dacă propoziția „$P \Rightarrow Q$“ este adevărată și propoziția „$Q \Rightarrow R$“ este adevărată, atunci este adevărată și propoziția „$P \Rightarrow R$“ (proprietatea de tranzitivitate a implicației sau silogism).

Scanned with OKEN Scanner

Această proprietate se poate justifica prin tabelul nr. 4, în care se vede că în cazurile cînd implicațiile „$P \Rightarrow Q$“ și „$Q \Rightarrow R$“ sînt adevărate și implicația $P \Rightarrow R$ este adevărată.

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$
a	a	a	a	a	a
a	a	f	a	f	f
a	f	a	f	a	a
a	f	f	f	a	f
f	a	a	a	a	a
f	a	f	a	f	a
f	f	a	a	a	a
f	f	f	a	a	a

Tabelul nr. 4

Dacă implicațiile „$P \Rightarrow Q$“ și „$Q \Rightarrow R$“ sînt adevărate, atunci se scrie „$P \Rightarrow Q \Rightarrow R$“.

c) Oricare ar fi propoziția P, echivalența „$P \Leftrightarrow P$“ este adevărată (proprietatea de reflexivitate a echivalenței). Justificarea acestei proprietăți se face în mod analog ca pentru proprietatea (a).

d) Dacă echivalența „$P \Leftrightarrow Q$“ este adevărată, atunci este adevărată și echivalența „$Q \Leftrightarrow P$“ (proprietatea de simetrie a echivalenței). Această proprietate este evidentă.

e) Dacă propoziția „$P \Leftrightarrow Q$“ este adevărată și propoziția „$Q \Leftrightarrow R$“ este adevărată, atunci și propoziția „$P \Leftrightarrow R$“ este adevărată (proprietatea de tranzitivitate a echivalenței). În acest caz se scrie „$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$“.

Justificarea proprietății (e) se face în mod analog ca pentru proprietatea (b).

Observație. Pentru a demonstra că o echivalență de forma „$P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$“ este adevărată, se arată de obicei că implicațiile „$P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow P$“ sînt adevărate. Într-adevăr, dacă implica-

Scanned with OKEN Scanner

ţiile „$P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow P$“ sînt adevărate, atunci următoarele implicaţii sînt adevărate: „$P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$, $Q \Rightarrow R$, $R \Rightarrow Q$.

Deci echivalenţele „$P \Leftrightarrow Q$“ şi „$Q \Leftrightarrow R$“ sînt adevărate.

§ 9. Disjuncţia

Fie P şi Q două propoziţii. Propoziţia „P sau Q“, care este adevărată numai cînd cel puţin una dintre propoziţiile P şi Q este adevărată, se numeşte *disjuncţia* propoziţiilor P şi Q.

Propoziţia „P sau Q“ se mai notează cu „$P \vee Q$“.

Tabelul de adevăr al disjuncţiei este tabelul nr. 5.

P	Q	$P \vee Q$
a	a	a
a	f	a
f	a	a
f	f	f

Tabelul nr. 5

Exemplu. Fie P propoziţia „Numărul natural x este un divizor al lui 10“ şi Q propoziţia „Numărul natural x este un divizor al lui 8“. Propoziţia „$P \vee Q$“ este propoziţia: „Numărul natural x este un divizor al lui 10 sau numărul natural x este un divizor al lui 8“ şi este adevărată pentru $x = 1, 2, 4, 5, 8, 10$ (cazurile cînd cel puţin una din cele două propoziţii este adevărată).

§ 10. Conjuncţia

Fie P şi Q două propoziţii. Propoziţia „P şi Q“, care este adevărată numai cînd propoziţiile P şi Q sînt amîndouă adevărate, se numeşte *conjuncţia* dintre propoziţia P şi propoziţia Q. Propoziţia „P şi Q“ se mai notează astfel: „$P \wedge Q$“.

Tabelul de adevăr al conjuncţiei este tabelul nr. 6.

Scanned with OKEN Scanner

P	Q	$P \wedge Q$
a	a	a
a	f	f
f	a	f
f	f	f

Tabelul nr. 6

Exemplu. Fie P propoziția „Numărul natural x este un divizor al lui 20“ și Q propoziția „Numărul natural x este un multiplu de 4“. Propoziția „$P \wedge Q$“ este : „Numărul natural x este un divizor al lui 20 și numărul natural x este un multiplu de 4“.

Propoziția „$P \wedge Q$“ este adevărată pentru $x = 4, 20$ (cazurile cînd ambele propoziții sînt adevărate).

§ 11. Negația

Fie P o propoziție. Propoziția „Nu este adevărată propoziția P“ se numește negația propoziției P și se notează cu oricare dintre următoarele simboluri : „non P“, „$\bar{P}$“, „$\neg P$“. Tabelul de adevăr al negației este tabelul nr. 7.

P	$\bar{P}$
a	f
f	a

Tabelul nr. 7

Adesea, pentru a putea folosi în raționamente propoziția negativă „Nu este adevărată propoziția P“, se transformă aceasta într-o propoziție echivalentă afirmativă. Se spune în acest caz că se face negarea propoziției P.

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu

Fie P propoziția „Dreptele D_1 și D_2 din același plan sînt paralele". Propoziția non P este „Nu este adevărat că dreptele D_1 și D_2 din același plan sînt paralele". Această propoziție negativă este echivalentă cu următoarea propoziție afirmativă: „Dreptele D_1 și D_2 din același plan au un punct comun".

Dăm în continuare un tabel cu unele negări uzuale.

P	non P
„$x = y$"	„$x \neq y$"
„$x \in M$"	„$x \notin M$"
„$x < y$"	„$x \geqslant y$"
„$x \leqslant y$"	„$x > y$"

§ 12. Proprietăți ale disjuncției, conjuncției și negației

I) Următoarele echivalențe sînt adevărate, oricare ar fi propozițiile P, Q, R:

(a) $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$;

(b) $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$.

(Disjuncția, respectiv conjuncția, are proprietatea de *asociativitate*).

II) Următoarele echivalențe sînt adevărate, oricare ar fi propozițiile P și Q:

a) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$

b) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

(Disjuncția, respectiv conjuncția, are proprietatea de *comutativitate*).

III) Următoarele echivalențe sînt adevărate, oricare ar fi propoziția P:

a) $(P \vee P) \Leftrightarrow P$;

b) $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$.

Scanned with OKEN Scanner

(Disjuncția, respectiv conjuncția, are proprietatea de *idempotență*).

IV) Următoarele echivalențe sînt adevărate, oricare ar fi propozițiile P și Q:

$$\text{a)}\ P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P;$$
$$\text{b)}\ P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P.$$

(Disjuncția are proprietatea de *absorbție* față de conjuncție, respectiv conjuncția are proprietatea de *absorbție* față de disjuncție).

V) Următoarele echivalențe sînt adevărate, oricare ar fi propozițiile P, Q, R:

$$\text{a)}\ (P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R));$$
$$\text{b)}\ (P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)).$$

(Disjuncția are proprietatea de *distributivitate* față de conjuncție, respectiv conjuncția are proprietatea de *distributivitate* față de disjuncție).

VI) Dacă F este o propoziție falsă, atunci oricare ar fi propoziția P, următoarele echivalențe sînt adevărate:

$$\text{a)}\ (P \vee F) \Leftrightarrow P;$$
$$\text{b)}\ (P \wedge F) \Leftrightarrow F.$$

VII) Dacă A este o propoziție adevărată, atunci oricare ar fi propoziția P, următoarele echivalențe sînt adevărate:

$$\text{a)}\ (P \vee A) \Leftrightarrow A;$$
$$\text{b)}\ (P \wedge A) \Leftrightarrow P.$$

VIII) Dacă F este o propoziție falsă, A este o propoziție adevărată, atunci oricare ar fi propoziția P, următoarele echivalențe sînt adevărate:

$$\text{a)}\ (P \vee \bar{P}) \Leftrightarrow A \text{ (principiul terțiului exclus);}$$
$$\text{b)}\ (P \wedge \bar{P}) \Leftrightarrow F \text{ (legea contradicției).}$$

IX) Următoarele echivalențe sînt adevărate oricare ar fi propozițiile P și Q.

Scanned with OKEN Scanner

a) $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow (\bar{P} \wedge \bar{Q})$;

b) $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$

(legile lui De Morgan).

X) Următoarea echivalență este adevărată oricare ar fi propoziția P:

$$(\bar{\bar{P}}) \Leftrightarrow P$$

(legea dublei negații). Propoziția $(\bar{\bar{P}})$ se mai notează cu $(\bar{\bar{P}})$.

Justificarea acestor proprietăți se poate face întocmind tabele de adevăr în care trecem toate cazurile pentru propozițiile componente. Dăm, ca exemplu, tabelele de adevăr prin care se justifică proprietățile (V a), (VIII a) și (VIII b).

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \vee Q$	$P \vee R$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
a	a	a	a	a	a	a	a
a	a	f	f	a	a	a	a
a	f	a	f	a	a	a	a
a	f	f	f	a	a	a	a
f	a	a	a	a	a	a	a
f	a	f	f	f	a	f	f
f	f	a	f	f	f	a	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Tabelul nr. 8

În tabelul nr. 8 se observă că propozițiile $P \vee (Q \wedge R)$ și $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ sînt simultan adevărate, respectiv simultan false și deci echivalența $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ este adevărată.

Tabelul de adevăr pentru proprietatea VIII a este tabelul nr. 9.

P	$\bar{P}$	A	$P \vee \bar{P}$
a	f	a	a
f	a	a	a

Tabelul nr. 9

În tabelul nr. 9 se observă că propozițiile $P \vee \bar{P}$ și A sînt simultan adevărate și deci echivalența $(P \vee \bar{P}) \Leftrightarrow A$ este adevărată.

Tabelul de adevăr pentru proprietatea VIII b este tabelul nr. 10.

P	$\bar{P}$	F	$P \wedge \bar{P}$
a	f	f	f
f	a	f	f

Tabelul nr. 10

În tabelul nr. 10 se vede că propozițiile $P \wedge \bar{P}$ și F sînt simultan false și deci echivalența $(P \wedge \bar{P}) \Leftrightarrow F$ este adevărată.

§13. Alte relații între implicație, echivalență, disjuncție, conjuncție și negație

a) *Reducerea implicației la disjuncție și negație*

Oricare ar fi propozițiile P și Q, este adevărată următoarea echivalență:

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q).$$

Justificarea acestei proprietăți este dată în tabelul nr. 11 în care se vede că propozițiile $P \Rightarrow Q$ și $\bar{P} \vee Q$ sînt simultan adevărate, respectiv simultan false.

Scanned with OKEN Scanner

P	Q	$\bar{P}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \vee Q$
a	a	f	a	a
a	f	f	f	f
f	a	a	a	a
f	f	a	a	a

Tabelul nr. 11

b) *Reducerea echivalenței la disjuncție, conjuncție și negație*

Oricare ar fi propozițiile P și Q următoarea echivalență este adevărată :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q) \wedge (P \vee \bar{Q})$$

Justificarea acestei proprietăți se face în mod analog ca pentru proprietatea (a).

c) Oricare ar fi propozițiile P și Q următoarea echivalență este adevărată :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}).$$

Justificarea acestei proprietăți se face în mod analog ca pentru proprietățile (a) și (b).

§ 14. Propoziții universal afirmative, propoziții particular afirmative, negarea lor

O propoziție prin care se afirmă că toate elementele unei mulțimi au o anumită proprietate, se numește *propoziție universal afirmativă*. O astfel de propoziție se poate formula în modul următor :

„Oricare $x \in M$ are proprietatea $P[x]$“. Această propoziție se va scrie prescurtat astfel :

$$\text{„}(\forall x)\,(P[x])\text{“}\quad (x \in M)$$

Simbolul „$\forall$“, care se citește „oricare“, poartă numele de *cuantificator universal.*

O propoziție prin care se afirmă că există cel puțin un element $x \in M$, care are proprietatea $P[x]$ se numește propoziție particular afirmativă.

O astfel de propoziție poate fi formulată în modul următor:

„Există $x \in M$ cu proprietatea $P[x]$" și se scrie prescurtat astfel:

$$„(\exists x)\,(P[x])"$$

Simbolul $\exists$, care se citește „există", poartă numele de *cuantificator existențial.*

Negația propoziției, „Oricare $x \in M$ are proprietatea $P[x]$" este echivalentă cu propoziția:

„Există $x \in M$ cu proprietatea non $P[x]$".

Deci,

$$\overline{(\forall x)\,(P[x])} \Leftrightarrow (\exists x)\,\overline{(P[x])}$$

Negația propoziției „Există $x \in M$ cu proprietatea $P[x]$" este echivalentă cu propoziția:

„Oricare $x \in M$ are proprietatea non $P[x]$"

$$\overline{(\exists x)\,(P[x])} \Leftrightarrow (\forall x)\,\overline{(P(x))}.$$

Se spune că prin negare „oricare" se transformă în „există", „există" se transformă în „oricare" și proprietatea „$P[x]$" se transformă în „non $P[x]$".

§ 15. Mulțimi de numere

Mulțimea numerelor naturale va fi notată cu N. Avem

$$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Mulțimea numerelor naturale din care s-a exclus 0, va fi notată cu N^*. Avem

$$N^* = \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

Mulțimea numerelor întregi va fi notată cu Z.

Avem:

$$Z = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

Mulțimea numerelor raționale va fi notată cu Q. Avem:

Scanned with OKEN Scanner

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in Z,\ n \neq 0 \right\}.$$

Mulțimea numerelor reale va fi notată cu R.
Mulțimea numerelor complexe va fi notată cu K.

§ 16. Relația de incluziune

Se spune că mulțimea A este o submulțime (sau o parte) a mulțimii M, dacă orice element al mulțimii A este și un element al mulțimii M. În acest caz se scrie $A \subset M$ și se spune că „mulțimea A este inclusă (conținută) în mulțimea M".

Exemplu

Mulțimea $\{1,2,3\}$ este o submulțime a mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$. Avem :

$$\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Propoziția „$A \subset M$" este echivalentă cu propoziția „$x \in A \Rightarrow x \in M$". În mod frecvent pentru a demonstra că propoziția „$A \subset M$" este adevărată, se demonstrează că implicația „$x \in A \Rightarrow x \in M$" este adevărată.

Submulțimea elementelor x ale unei mulțimi M, care au proprietatea $P[x]$, se notează astfel :

$$\{x \in M \mid x \text{ are proprietatea } P[x]\}.$$

Următoarea incluziune este adevărată oricare ar fi mulțimea M :

$$\varnothing \subset M.$$

§ 17. Proprietăți ale relației de incluziune

R. Oricare ar fi mulțimea A, incluziunea „$A \subset A$" este adevărată (relația de incluziune este *reflexivă*).

A. Următoarea implicație este adevărată :

$$(A \subset B \text{ și } B \subset A) \Rightarrow (A = B)$$

(Relația de incluziune este antisimetrică).

T. Următoarea implicație este adevărată :

Scanned with OKEN Scanner

$$(A \subset B \text{ și } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$$

(Relația de incluziune este tranzitivă).

§ 18. Mulțimi egale

Două mulțimi sînt egale atunci cînd sînt formate din aceleași elemente, ordinea în care sînt considerate acestea nefiind importantă.

Avem, de exemplu:

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 1, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 1, 2\} = \{3, 2, 1\}.$$

Mulțimile A și B sînt egale cînd oricare element din A este și în B, deci $A \subset B$ și oricare element din B este și în A, deci $B \subset A$. Rezultă următoarea metodă pentru a verifica egalitatea a două mulțimi A și B.

Se arată că:

a) $A \subset B$, adică „$x \in A \Rightarrow x \in B$“;
b) $B \subset A$, adică „$x \in B \Rightarrow x \in A$.

Propozițiile „$x \in A \Rightarrow x \in B$“ și „$x \in B \Rightarrow x \in A$“ pot fi înlocuite prin „$x \in A \Leftrightarrow x \in B$“. Așadar, pentru a arăta că mulțimile A și B sînt egale, putem dovedi că echivalența „$x \in A \Leftrightarrow x \in B$“ este adevărată.

§ 19. Operații cu mulțimi

a) *Reuniunea*

Fie A și B două mulțimi. Mulțimea $\{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$, adică mulțimea elementelor x care aparțin, fiecare în parte, cel puțin uneia dintre mulțimile A și B, se numește *reuniunea* dintre mulțimea A și mulțimea B și se notează cu „$A \cup B$“.

Avem:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

și deci

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)).$$

Exemplu

$$\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $M_1, M_2, \cdots, M_n$ ($n \in N$ și $n \geqslant 2$) n mulțimi. Mulțimea $\{x \mid (x \in M_1) \vee (x \in M_2) \vee \cdots \vee (x \in M_n)\}$ se numește reuniunea mulțimilor $M_1, M_2, \cdots, M_n$ și se notează cu „$M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$".

b) *Intersecția*

Fie A și B două mulțimi. Mulțimea $\{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$, adică mulțimea elementelor comune mulțimilor A și B, se numește *intersecția* dintre mulțimea A și mulțimea B și se notează cu „$A \cap B$".

Avem :

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

și deci

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B)).$$

Dacă mulțimile A și B nu au elemente comune, atunci $A \cap B = \varnothing$ și mulțimile se numesc disjuncte.

Exemple

1. $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5\} = \{3, 4\}$;
2. $\{1, 2\} \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$.

Fie $M_1, M_2, \cdots, M_n$ ($n \in N$, $n \geqslant 2$) n mulțimi. Mulțimea $\{x \mid (x \in M_1) \wedge (x \in M_2) \wedge \ldots \wedge (x \in M_n)\}$ se numește intersecția mulțimilor $M_1, M_2, \ldots, M_n$ și se notează cu „$M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$".

c) *Complementara unei mulțimi*

Fie A o parte a unei mulțimi M. Mulțimea $\{x \in M \mid x \notin A\}$ se numește complementara mulțimii A în raport cu mulțimea M și se notează cu „$\complement_M A$", iar atunci cînd nu există nici un dubiu asupra mulțimii în raport cu care se consideră complementara, se notează cu „$\bar{A}$".

Avem

$$\complement_M A = \{x \in M \mid x \notin A\}$$

și deci

$$(x \in \complement_M A) \Leftrightarrow (x \in M) \wedge (x \notin A).$$

În cazul cînd este cunoscută mulțimea în raport cu care se face complementara, pentru $x \in M$, avem :

$$(x \in \bar{A}) \Leftrightarrow (x \notin A).$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu

Fie $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $A = \{1, 3, 5\}$. Avem:

$$\complement_M A = \{2, 4, 6\}.$$

§ 20. Mulțimea părților unei mulțimi

Mulțimea avînd ca elemente părțile unei mulțimi M se numește mulțimea părților lui M și se notează cu $\mathcal{P}(M)$. Deci:

$$(A \in \mathcal{P}(M)) \Leftrightarrow (A \subset M).$$

Menționăm că din $\mathcal{P}(M)$ fac parte mulțimile:

a) Mulțimea vidă $\varnothing$ ($\varnothing \in \mathcal{P}(M)$ căci $\varnothing \subset M$);
b) Mulțimea M ($M \in \mathcal{P}(M)$ căci $M \subset M$).

Pentru orice element $a \in M$, mulțimea avînd ca element pe a, notată cu $\{a\}$, este un element al mulțimii părților lui M ($\{a\} \in \mathcal{P}(M)$ căci $\{a\} \subset M$).

Exemplu

Fie $M = \{1, 2, 3\}$. Avem:

$$\mathcal{P}(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

§ 21. Numărul de elemente al mulțimii părților unei mulțimi finite

Teoremă. Dacă mulțimea finită M are n elemente, atunci mulțimea $\mathcal{P}(M)$ are 2^n elemente.

Demonstrație

Ținem seama că numărul submulțimilor cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente ($0 \leqslant k \leqslant n$) este C_n^k. Deci numărul de submulțimi ale mulțimii M este $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1 + 1)^n = 2^n$.

§ 22. Algebra Boole a mulțimii părților unei mulțimi*

Fie M o mulțime și $\mathcal{P}(M)$ mulțimea părților mulțimii M.

* Definiția algebrei Boole precum și demonstrația faptului că mulțimea părților unei mulțimi finite se poate organiza ca o algebră Boole sînt date în cap. IV, §7.

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm în mulțimea $\mathcal{P}(M)$ operațiile de reuniune, intersecție și trecerea la complementară. În legătură cu aceste operații sînt adevărate următoarele proprietăți:

I_a Oricare ar fi părțile A, B și C ale lui M, avem: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.	I_b Oricare ar fi părțile A, B și C ale lui M, avem: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Reuniunea, respectiv intersecția, sînt *asociative.*

II_a Oricare ar fi părțile A și B ale lui M, avem: $A \cup B = B \cup A$.	II_b Oricare ar fi părțile A și B ale lui M, avem: $A \cap B = B \cap A$.

Reuniunea, respectiv intersecția sînt comutative.

III_a Oricare ar fi partea A a lui M, avem: $A \cup A = A$.	III_b Oricare ar fi partea A a lui M, avem: $A \cap A = A$.

Reuniunea, respectiv intersecția are proprietatea de idempotență.

IV_a Oricare ar fi părțile A și B ale lui M, avem: $A \cap (A \cup B) = A$ Reuniunea are proprietatea de *absorbție* față de intersecție.	IV_b Oricare ar fi părțile A și B ale lui M, avem: $A \cup (A \cap B) = A$ Intersecția are proprietatea de *absorbție* față de reuniune.
V_a Oricare ar fi părțile A, B, C al lui M, avem: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Reuniunea este *distributivă* față de intersecție.	V_b Oricare ar fi părțile A, B, C ale lui M, avem: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Intersecția este *distributivă* față de reuniune.

Scanned with OKEN Scanner

VI_a Oricare ar fi partea A a lui M, avem: $A \cup \varnothing = A.$	VI_b Oricare ar fi partea A a lui M, avem $A \cap \varnothing = \varnothing$
VII_a Oricare ar fi partea A a lui M, avem $A \cup M = M.$	VII_b Oricare ar fi partea A a lui M, avem: $A \cap M = A.$
$VIII_a$ Oricare ar fi partea A a lui M, avem $A \cup \bar{A} = M.$	$VIII_b$ Oricare ar fi partea A a lui M, avem: $A \cap \bar{A} = \varnothing.$
IX_a Oricare ar fi părțile A și B ale lui M, avem: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$	IX_b Oricare ar fi părțile A și B ale lui M, avem: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

Legile lui de Morgan

X. Oricare ar fi partea A a lui M, avem:

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Demonstrarea egalităților I—X se poate face folosind proprietățile disjuncției, conjuncției și negației menționate în § 12. Spre exemplificare indicăm demonstrarea proprietăților I_a, V_a, VI_a, IX_a.

a) *Demonstrația proprietății* I_a

Avem:

$x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee$ $\vee ((x \in B) \vee (x \in C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \vee (x \in C) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \vee (x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C.$ (S-a aplicat proprietatea I_a, din § 12.)

Deci, $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C.$ Rezultă

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

b) *Demonstrația proprietății* V_a

Avem :

$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \in B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee$$
$$\vee ((x \in B) \wedge (x \in C)) \Leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \in A) \vee$$
$$\vee (x \in C)] \Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap$$
$$\cap (A \cup C).$$

Deci $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (S-a aplicat proprietatea V_a din § 12.)

c) *Demonstrația proprietății* VI_a

Ținînd seamă că propoziția „$x \in \varnothing$" este falsă și aplicînd proprietatea VI_a din § 12, obținem :

$$x \in A \cup \varnothing \Leftrightarrow (a \in A) \vee (x \in \varnothing) \Leftrightarrow x \in A$$

Deci $A \cup \varnothing = A$.

d) *Demonstrația proprietății* IX_a

Ținînd seama că dacă $x \in M$, atunci $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$ și aplicînd proprietatea IX_a, din § 12, obținem :

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \overline{x \in A \cup B} \Leftrightarrow \overline{(x \in A) \vee (x \in B)} \Leftrightarrow (\overline{x \in A}) \wedge (x \in B) \Leftrightarrow (\overline{x \notin A}) \wedge (\overline{x \notin B}) \Leftrightarrow (x \in \bar{A}) \vee$$
$$\wedge (x \in \bar{B}) \Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Deci, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

§ 23. Alte operații în mulțimea părților unei mulțimi

a) *Diferența.* Fie A și B două părți ale unei mulțimi M. Mulțimea $\{x \in M \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$ se numește *diferența* dintre mulțimea A și mulțimea B și se notează cu $A - B$. Așadar,

$$A - B = \{x \in M \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

Avem :

$$A - B = A \cap \bar{B}.$$

Într-adevăr, dacă $x \in M$, atunci :

$$x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B) \Leftrightarrow x \in A \cap \bar{B}.$$

b) *Diferența simetrică.* Fie A și B două părți ale unei mulțimi M. Mulțimea $(A - B) \cup (B - A)$ se numește

diferența simetrică dintre mulțimea A și B și se notează cu $A \Delta B$.

Așadar,

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}).$$

§ 24. Reducerea incluziunii la reuniune, respectiv intersecție

Fie A și B două părți ale mulțimii M. Următoarea echivalență este adevărată :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$$

Propunem cititorului să facă demonstrația.

§ 25. Produs cartezian

a) *Noțiunea de cuplu (pereche ordonată)*

Noțiunea prin care se caracterizează așezarea a două elemente x și y, distincte sau nu, în ordinea „întîi x, apoi y" se numește *cuplu*, avînd ca primă componentă pe x și a doua componentă pe y și se notează prin (x, y).

Avem :

$$((x, y) = (x', y')) \Leftrightarrow ((x = x') \wedge (y = y')).$$

Observație. Noțiunea de cuplu este diferită de cea de mulțime cu două elemente. Avem $\{x, y\} = \{y, x\}$ pe cînd în general $(x, y) \neq (y, x)$ (egalitatea are loc dacă $x = y$). În notația $\{x, y\}$ se presupune $x \neq y$; în notația (x, y) nu se exclude cazul $x = y$.

b) *Produsul cartezian a două mulțimi*

Fie A și B două mulțimi. Mulțimea cuplurilor (x, y) unde $x \in A$ și $y \in B$ se numește produsul cartezian dintre mulțimea A și mulțimea B și se notează cu $A \times B$.

Așadar,

$$A \times B = \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\},$$
$$((x, y) \in A \times B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (y \in B)).$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu

Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{1, 2, 3\}$. Avem :
$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

Observație. Dacă mulțimea finită A are n elemente și mulțimea finită B are m elemente, atunci mulțimea $A \times B$ are $n \cdot m$ elemente.

c) *Produsul cartezian a n mulțimi.*

În mod analog cu produsul cartezian a două mulțimi, se definește produsul cartezian a n mulțimi $M_1, M_2, \ldots, M_n$ ($n \in N$ și $n \geqslant 2$) care se notează cu „$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$".

Avem :

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1 \in M_1) \wedge \wedge (x_2 \in M_2) \wedge \ldots \wedge (x_n \in M_n)\}.$$

Dacă mulțimile $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sînt finite și au respectiv $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ elemente, atunci mulțimea $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ are $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ elemente.

În cazul cînd $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, produsul cartezian $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ se notează cu M^n .

Dacă mulțimea M este finită și are m elemente, atunci mulțimea M^n are m^n elemente. Mai precis, se pot forma m^n grupări cu n elemente distincte sau nu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ luate dintr-o mulțime cu m elemente.

Scanned with OKEN Scanner

MULȚIMI

EXERCIȚII REZOLVATE

1. *Să se scrie în mai multe moduri mulțimea primelor patru numere întregi strict pozitive.*

Răspuns.

$$\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 4, 3\} = \{2, 4, 1, 3\} \text{ etc.}$$

2. *Fie* $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 50\}$. *Să se precizeze trei elemente care aparțin mulțimii și trei elemente care nu aparțin mulțimii.*

Răspuns.

Avem : $30 \in A$, $31 \in A$, $32 \in A$, $51 \notin A$, $52 \notin A$, $53 \notin A$.

3. *Fie* $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Să se scrie mulțimea* $\{x \in M \mid x \text{ este par}\}$, *indicîndu-se explicit toate elementele.*

Răspuns.

$$\{x \in M \mid x \text{ este par}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

4. *Care dintre următoarele mulțimi sînt egale și care nu sînt egale?*

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 1, 3, 5\}$, $C = \{5, 1, 3, 4, 2\}$, $D = \{5, 1, 3, 2\}$.

Răspuns.

$$A = C,\ B = D,\ A \neq B,\ A \neq D,\ B \neq C,\ C \neq D.$$

5. *Care dintre egalitățile următoare sînt adevărate și care sînt false?*

a) $\{3, 7, 5\} = \{7, 5, 3\}$; b) $\{1, 2\} = \{2, 3\}$, c) $\{3 + 7, 8 - 2\} = \{13 - 3, 5 + 1\}$;

d) $\{3 - 1, 6 + 3\} = \{2, 5 + 3\}$; e) $\{a + a\} = \{2a\}$, $(a \in R)$.

Răspuns.

Egalitatea a) este adevărată; egalitatea b) este falsă; egalitatea c) este adevărată căci semnele $3 + 7$, $13 - 3$ desemnează același element — numărul 10, iar semnele $8 - 2$ și $5 + 1$ desemnează același element — numărul 6; egalitatea d) este falsă; egalitatea e) este adevărată.

6. *Să se scrie următoarele mulțimi, scriindu-se elementele lor într-o acoladă.*

$$A = \{x \in N \mid x^2 - 4x + 3 = 0\};$$
$$B = \{x \in Z \mid x^2 + 6x - 7 = 0\};$$
$$C = \{x \in N \mid 2x^2 + 3x - 5 = 0\};$$
$$D = \{x \in Z \mid 3x^2 - 2x - 1 = 0\}.$$

Răspuns.

$A = \{1, 3\}$, $B = \{1, -7\}$, $C = \{1\}$, $D = \{1\}$.

7. *Să se determine mulțimea*

$$\{x \in R \mid x^2 - 5 \mid x \mid + 4 = 0\}.$$

Răspuns:

Dacă $x \geqslant 0$, atunci ecuația $x^2 - 5 \mid x \mid + 4 = 0$ devine $x^2 - 5x + 4 = 0$, cu rădăcinile 1 și 4, iar dacă $x < 0$ ecuația devine $x^2 + 5x + 4 = 0$ și are rădăcinile -1 și -4.

Așadar, $\{x \in R \mid x^2 - 5 \mid x \mid + 4 = 0\} = \{1, 4, -1, -4\}$.

8. *Să se determine mulțimea* $\{x \in R \mid x^2 - \mid x \mid - 6 = 0\}$.

Răspuns.

Dacă $x \geqslant 0$ ecuația $x^2 - |x| - 6 = 0$ devine $x_2 - x - 6 = 0$ și are rădăcinile -2 și 3. Este acceptabilă numai 3. Dacă $x < 0$, ecuația devine $x^2 + x - 6 = 0$ și are rădăcinile 2 și -3. Convine doar -3. Așadar, $\{x \in R \mid x^2 - \mid x \mid - -6 = 0\} = \{-3, 3\}$.

Scanned with OKEN Scanner

9. *Să se determine mulțimile:*

$$S = \{x \in Q \mid x^2 - 12x + 35 = 0\},$$
$$T = \{x \in Q \mid 7x - 1 = 0\},$$

$U = \{x \in Q \mid x^2 - 0{,}2 \cdot x = 0\}$ *și să se precizeze dacă elementele* $\frac{1}{5}$, 5, 7, $\frac{1}{7}$ *aparțin sau nu acestor mulțimi.*

Răspuns.

$S = \{x \in Q \mid x^2 - 12x + 35 = 0\} = \{5, 7\}$,

$T = \{x \in Q \mid 7x - 1 = 0\} = \left\{\frac{1}{7}\right\}$,

$U = \{x \in Q \mid x^2 - 0{,}2 \cdot x = 0\} = \{0\,;\, 0{,}2\}$,

$\frac{1}{5} \notin S$, $5 \in S$, $7 \in S$; $\frac{1}{5} \notin T$, $5 \notin T$, $7 \notin T$;

$\frac{1}{5} = 0{,}2 \in U$, $5 \notin U$, $7 \notin U$, $\frac{1}{7} \notin S$, $\frac{1}{7} \in T$, $\frac{1}{7} \notin U$.

10. *Fie* $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 60\}$. *Să se determine mulțimea:*

$\{x \in A \mid x$ *este multiplu de* $9\}$.

Răspuns.

$\{x \in A \mid x$ este multiplu de $9\} = \{9, 18, 27, 36, 45, 54\}$.

11. *Să se determine mulțimea:*

$\{x \in N^* \mid x$ este divizor al lui $27\}$.

Răspuns.

$\{x \in N^* \mid x$ este divizor al lui $27\} = \{1, 3, 9, 27\}$.

12. *Să se determine mulțimile:*

$M = \{x \in N^* \mid x = 2n,\ n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

$P = \{x \in N^* \mid x = 4m + 6n,\ m = 1, 2, 3,\ n = -1,\ 0\}$.

Răspuns.

Avem: $M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru mulțimea P redăm detaliat calculul:

$m = 1,\ n = -1,\ x = 4 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = -2 \notin N^*;\ -2 \notin P;$
$m = 1,\ n = 0,\ x = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 0 = 4 \in N^*;\ 4 \in P;$
$m = 2,\ n = -1,\ x = 4 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) = 2 \in N^*;\ 2 \in P;$
$m = 2,\ n = 0,\ x = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 0 = 8 \in N^*;\ 8 \in P.$
$m = 3,\ n = -1,\ x = 4 \cdot 3 + 6\ (-1) = 6 \in N^*;\ 6 \in P.$
$m = 3,\ n = 0,\ x = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 0 = 12 \in N^*;\ 12 \in P.$

Avem deci: $P = \{2, 4, 6, 8, 12\}$.

13. *Să se scrie cîte 6 elemente ale mulțimilor:*

a) $2N^* = \{x \in N^* \mid x = 2n,\ n = 1, 2, 3, ...\}$ (mulțimea numerelor strict pozitive pare).

b) $I = \{x \in N \mid x = 2n - 1,\ n = 1, 2, 3, ...\}$ (mulțimea numerelor naturale impare).

c) $3N^* = \{x \in N^* \mid x = 3n,\ n = 1, 2, 3, ...\}$ (mulțimea multiplilor strict pozitivi ai lui 3)

d) $aN^* = \{x \in N^* \mid x = a \cdot n,\ a \in N^*,\ n = 1, 2, 3, \cdots\}$ (mulțimea multiplilor strict pozitivi ai lui a).

Răspuns.

a) Dînd lui n valorile 1, 2, 3, 4, 5, 6, obținem pentru x valorile 2, 4, 6, 8, 10, 12, elemente ale mulțimii notată cu $2N^*$.

b) Analog obținem șase elemente ale mulțimii I: 1, 3, 5, 7, 9, 11.

c) 3, 6, 9, 12, 15, 18 sînt elemente ale mulțimii $3N^*$.

d) $a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a,$ sînt elemente ale mulțimii aN^*.

14. *Fie mulțimile:*

$$A = \{x \in N \mid x = 2n + 3,\ n = 1, 2, 3, 4, ...\},$$
$$B = \{x \in N \mid x = 2 \cdot 3^{n+1},\ n = 1, 2, 3, 4, ...\},$$
$$C = \{x \in N \mid x = 2 \cdot n^2,\ n = 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Să se scrie mulțimile A, B și C, trecînd într-o acoladă patru elemente ale lor, corespunzătoare lui $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ celelalte elemente fiind înlocuite cu puncte.

Răspuns.

Avem: $A = \{5, 7, 9, 11, ...\}$,
$B = \{18, 54, 162, 486, ...\}$,
$C = \{2, 8, 18, 32, ...\}$.

Scanned with OKEN Scanner

15. Fie $A = \{x \in N \mid x = 4n + 6m,\ n = 1, 2, 3, \ldots$
$m = 1, 2, 3, \ldots\}$

Să se scrie trei elemente ale mulțimii A și să se arate că $26 \in A$, $28 \in A$.

Răspuns.

Dacă $n = 1$, $m = 1$, obținem $x = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 10$; $10 \in A$.
Dacă $n = 1$, $m = 3$, obținem $x = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 22$; $22 \in A$.
Dacă $n = 3$, $m = 2$, obținem $x = 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 24$; $24 \in A$.
$26 = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3$ ($n = 2$, $m = 3$), deci $26 \in A$.
$28 = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 4$ ($n = 1$, $m = 4$), deci $28 \in A$.

16. *Fie mulțimile*

$$A = \{x \in N^* \mid x = 1 + 3n, \quad n = 1, 2, 3\};$$
$$B = \{x \in N^* \mid x = 3 \cdot 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3\};$$
$$C = \{x \in N^* \mid x = n^2, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5\};$$
$$D = \{x \in N^* \mid x = n^3, \quad n = 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Să se scrie mulțimile punînd între acolade toate elementele lor.

Răspuns.

Avem: $A = \{4, 7, 10\}$;
$B = \{3, 6, 12\}$;
$C = \{1, 4, 9, 16, 25\}$;
$D = \{1, 8, 27, 64, 125\}$.

17. *Se dă mulțimea* $A = \left\{\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \ldots, \frac{1002}{1001}\right\}$.

1. *Să se scrie mulțimea folosind o proprietate caracteristică a elementelor sale.*

2. *Să se determine toate elementele x ale mulțimii A, pentru care* $|x - 1| < 0{,}1$.

3. *Să se arate că oricare ar fi* $\varepsilon > 0{,}001$, *există cel puțin un element* x, $x \in A$, *care verifică inegalitatea* $|x - 1| < \varepsilon$.

Soluție.

1) $A = \left\{x \in Q \mid x = \frac{2n}{2n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 501\right\}$.

2) Toate numerele mulțimii A sînt supraunitare, deoarece $\frac{2n}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1} > 1$. Inegalitatea $|x-1| < 0,1$, este echivalentă cu $x - 1 < 0,1$.

Pentru a găsi toate elementele mulțimii A care satisfac $x - 1 < 0,1$, va trebui să aflăm toate numerele mulțimii $\{1, 2, \ldots, 501\}$ care sînt soluții ale inecuației cu necunoscuta n: $\frac{2n}{2n-1} - 1 < 0,1$. Aceasta este echivalentă cu $\frac{1}{2n-1} < \frac{1}{10}$, care se mai scrie $2n > 11$. Această inecuație are în mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 501\}$ soluțiile 6, 7, 8, ..., 501. Elementele lui A pentru care $|x - 1| < 0,1$ sînt trecute în tabelul următor:

n	6	7	8	9	...	501
$x = \frac{2n}{2n-1}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{18}{17}$	...	$\frac{1002}{1001}$

3) Va trebui să arătăm că oricare ar fi $\varepsilon > 0,001$, inecuația $|x - 1| < \varepsilon$ are cel puțin o soluție în mulțimea A sau că inecuația $\left|\frac{2n}{2n-1} - 1\right| < \varepsilon$ are cel puțin o soluție în mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 501\}$, oricare ar fi $\varepsilon > 0,001$.

Avem:

$$\left|\frac{2n}{2n-1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon}.$$

$$\varepsilon > 0,001 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < 1\,000 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\varepsilon} < 1\,001 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} < \frac{1\,001}{2} \Leftrightarrow \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon} < 500 + \frac{1}{2}.$$

Deoarece $501 > 500 + \frac{1}{2} > \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon}$, oricare ar fi $\varepsilon > 0,001$, rezultă că inegalitatea $n > \frac{\varepsilon + 1}{2\varepsilon}$ este satisfăcută cel

Scanned with OKEN Scanner

puțin de un element al mulțimii $\{1, 2, \ldots, 501\}$, anume 501 ; de aici rezultă că inecuația $|x-1|<\varepsilon$ are cel puțin o soluție în mulțimea A, oricare ar fi $\varepsilon > 0{,}001$, anume cea corespunzătoare lui $n = 501$, adică $x = \frac{1\,002}{1\,001}$.

18. *Să se arate că* :

a) $\{x \in R \mid 2\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 7,\ -1 \leqslant x \leqslant 3\} = \varnothing$,

b) $\{x \in R \mid \sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0,\ a \in R,\ b \in R,\ c \in R\} = \begin{cases} \varnothing, \text{ dacă cel puțin două dintre numerele } a, b, c, \text{ sînt diferite} \\ -a, \text{ dacă } a = b = c \end{cases}$

Soluție.

a) Dacă $-1 \leqslant x \leqslant 3$, atunci

$$2\sqrt{x+1} \leqslant 2\sqrt{3+1} = 4 \quad \text{și} \quad \sqrt{3-x} \leqslant \sqrt{3-(-1)} = 2$$

și deci

$$2\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \leqslant 6,$$

încît

$$\{x \in R \mid 2\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 7,\ -1 \leqslant x \leqslant 3\} = \varnothing.$$

b) Deoarece $\sqrt{a+x} \geqslant 0$, $\sqrt{b+x} \geqslant 0$, $\sqrt{c+x} \geqslant 0$, suma $\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x}$ este nulă dacă și numai dacă avem simultan :

$$a + x = 0,\ b + x = 0,\ c + x = 0,$$

adică

$$x = -a = -b = -c.$$

Dacă măcar două dintre numerele a, b, c sînt diferite, nu putem avea

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+x} = 0$$

Rezultă egalitatea din enunț.

19. *Să se scrie mulțimile A, B, C indicîndu-se explicit toate elementele lor :*

$$A = \left\{x \in Q \mid x = \frac{n(n+2)}{2n-1} : \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, 6\right\},$$

$$B = \left\{x \in Q \mid x = \frac{n}{n^2+1}, \; n = 1, 2, 3, 4\right\},$$

$$C = \left\{x \in Q \mid x = \frac{3n^2}{3n-4}, \; n = 1, 2, 3, 4, 5\right\}.$$

Răspuns.

$$A = \left\{3, \frac{8}{3}, \frac{24}{7}, \frac{35}{9}, \frac{48}{11}\right\}, \quad B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}\right\},$$

$$C = \left\{-3, 6, \frac{27}{5}, \frac{75}{11}\right\}.$$

20. *Cîte elemente au mulțimile:*

$$A = \left\{x \in Q \mid x = \frac{3n}{n+2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, 100\right\},$$

$$B = \left\{x \in Q \mid x = \frac{n-1}{2^{n+1}}, \; n = 1, 2, 3, 4, 5\right\},$$

$$C = \left\{x \in R \mid x = \frac{an+b}{cn+d}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, p\right\}$$

(a, b, c, d numere reale date și $cd > 0$)?

Soluție.

A are atîtea elemente cîte valori distincte are fracția $\frac{3n}{n+2}$, valori obținute pentru $n = 1, 2, 3, \ldots, 100$. Nu există două valori egale ale fracției $\frac{3n}{n+2}$ care să corespundă la valori diferite ale lui n. Într-adevăr, nu putem avea

$$m \neq n \quad \text{și} \quad \frac{3m}{m+2} = \frac{3n}{n+2},$$

deoarece

$$\frac{3m}{m+2}=\frac{3n}{n+2}\Leftrightarrow 3m(n+2)=3n(m+2)\Leftrightarrow 3mn+6m=$$
$$=3mn+6n\Leftrightarrow m=n.$$

Mulțimea A are deci 100 elemente.

Mulțimea B are patru elemente $\left(\text{pentru } n=2 \text{ și } n=3\right.$ se obține același element, $\left.\frac{1}{8}\right)$.

Pentru a găsi numărul de elemente ale mulțimii C, vom observa că u și v fiind două numere naturale, diferite, avem: $\frac{au+b}{cu+d}=\frac{av+b}{cv+d}\Leftrightarrow (ad-bc)(u-v)=0\Leftrightarrow ad-bc=0.$

Dacă $ad-bc=0$, mulțimea C are un singur element:

$$x=\frac{an+b}{cn+d}=\frac{\frac{bc}{d}n+b}{cn+d}=\frac{b}{d}.$$

Dacă $ad-bc\neq 0$, atunci toate valorile fracției $\frac{an+b}{cn+d}$, pentru $n=1, 2, 3, \ldots, p$, sînt numere reale diferite între ele, mulțimea C avînd p elemente.

21. *Cîte elemente are mulțimea*

$$\left\{x \mid x=\frac{n^2+1}{2n^2+n+1},\ n=1, 2, 3, \ldots, 100\right\}?$$

Soluție.

Mulțimea $\left\{x \mid x=\frac{n^2+1}{2n^2+n+1},\ n=1, 2, 3, \ldots, 100\right\}$ are atîtea elemente cîte valori distincte are fracția $\frac{n^2+1}{2n^2+n+1}$ cînd n ia valorile 1, 2, 3, ..., 100.

Să vedem pentru care valori ale lui n fracția ia valori egale.

Fie p și q numere naturale, $p < q$, astfel ca $\frac{p^2+1}{2p^2+p+1} = \frac{q^2+1}{2q^2+q+1}$.

Această egalitate este echivalentă cu $(p-q)(p+q-pq+1)=0$ și cum $p-q \neq 0$, se obține $p+q-pq+1=0$, ecuație care se mai poate scrie astfel:

$$p = \frac{q+1}{q-1} \quad \text{sau} \quad p = 1 + \frac{2}{q-1}.$$

Rezultă că $\frac{2}{q-1}$ trebuie să fie un întreg și aceasta se întîmplă cînd $q-1$ este un divizor al lui 2. Se obține $q=2$ și $p=3$ sau $q=3$ și $p=2$.

Cum $p < q$, singura soluție acceptabilă este $p=2$, $q=3$. Deci numai pentru $n=2$ și $n=3$ se obține același element al mulțimii date: $x = \frac{5}{11}$.

Mulțimea din enunț are deci 99 de elemente.

22. *Să se determine mulțimile*:

$A = \{x \in N^* \mid$ Există numărul natural n astfel ca $x = -n^2 + 6n - 7\}$;

$B = \{x \in N^* \mid$ Există două numere naturale n astfel ca $x = -n^2 + 5n\}$.

Soluție.

Polinomul $-n^2+6n-7$ ia valori întregi oricare ar fi n natural.

Pentru ca $-n^2+6n-7$ să fie număr natural este necesar și suficient să avem $-n^2+6n-7 > 0$, de unde rezultă $3-\sqrt{2} < n < 3+\sqrt{2}$; numerele naturale care satisfac această dublă inegalitate sînt: 2, 3 și 4.

Pentru $n=2$ se obține $-n^2+6n-7=1$;
Pentru $n=3$ se obține $-n^2+6n-7=2$;
Pentru $n=4$ se obține $-n^2+6n-7=1$ și deci $A=\{1, 2\}$.

În mod asemănător, pentru a determina mulțimea B, va trebui să găsim numerele naturale n pentru care $-n^2 + 5n > 0$, sau $n(5 - n) > 0$, de unde rezultă $n < 5$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Pentru $n \in \{1, 4\}$, avem $-n^2 + 5n = 4$, iar dacă $n \in \{2, 3\}$, atunci $-n^2 + 5n = 6$ și prin urmare $B = \{4, 6\}$.

23. *Fie mulțimile:*

$$A = \{x \in Z \mid x = 3m + 5n, \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$B = \{x \in Z \mid x = 4m + 7n, \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Să se determine mulțimile:

$$C = \{x \in N \mid x \notin A\},$$
$$D = \{x \in N \mid x \notin B\}.$$

Soluție.

Mulțimea C conține toate numerele naturale care nu sînt în A.

Oricare număr întreg nenegativ are una din formele: $3m$, $3m + 1$, $3m + 2$, unde m ia valorile: $0, 1, 2, 3, \ldots$

Dacă înlocuim $n = 0$ în $x = 3m + 5n$, obținem $x = 3m$ și deci toate numerele de această formă (multiplu de 3) — cu $m \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, — sînt în A;

dacă $n = 1$, atunci $x = 3m + 5 = 3(m + 1) + 2$; deoarece m ia valorile $0, 1, 2, 3, \ldots$, rezultă $m + 1 \neq 0$ și $x \neq 2$, deci $2 \notin A$;

dacă $n = 2$, atunci $x = 3m + 10 = 3(m + 3) + 1$ și cum $m + 3$ nu poate lua valorile $0, 1, 2$, rezultă $1 \notin A$. $4 \notin A$, $7 \notin A$.

Cu excepția numerelor $1, 2, 4$ și 7, A conține toate numerele naturale și deci $C = \{1, 2, 4, 7\}$.

Să găsim și elementele mulțimii D.

Oricare număr întreg nenegativ are una din formele: $4K$, $4K + 1$, $4K + 2$, $4K + 3$ unde $K \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Vom scrie aceste numere în tabelul următor:

4K	0	4	8	12	16	20	24	...
4K + 1	1	5	9	13	17	21	25	...
4K + 2	2	6	10	14	18	22	26	...
4K + 3	3	7	11	15	19	23	27	...

Care dintre aceste numere aparțin mulțimii B ?

Dacă în $x = 4m + 7n$ facem $n = 0$, obținem $x = 4m$, adică numerele din prima linie a tabelului și deci toate aceste numere sînt în B ;

dacă $n = 1$, atunci $x = 4m + 7$ și cum $m \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$, obținem toate numerele din ultima linie a tabelului cu excepția lui 3 ;

dacă $n = 2$, atunci $x = 4m + 14$ — obținem numerele din linia a treia a tabelului cu excepția lui 2, 6, 10 ;

dacă $n = 3$, atunci $x = 4m + 21$ și cum m ia valorile 0, 1, 2, ... obținem pentru x valorile 21, 25, 29, ... adică numerele din linia a doua a tabelului cu excepția lui 1, 5, 9, 13, 17.

În tabel au fost subliniate numerele care nu aparțin lui B ; acestea formează mulțimea $D = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17\}$.

24. *Fie* $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ și propozițiile :

$$P[x] : 2x + 1 = x,\ x \in A ;$$
$$Q[x] : |x| = x,\ x \in A ;$$
$$R[x] : |x| = -x,\ x \in A,$$

a) *Să se determine* x, *astfel încît propoziția* $P[x]$ *să fie adevărată.*

b) *Să se determine* x, *astfel încît propoziția* $Q[x]$ *să fie adevărată.*

c) *Să se determine* x, *astfel încît propoziția* $R[x]$ *să fie adevărată.*

Răspuns.

Propoziția $P[x]$, respectiv $2x + 1 = x$, este adevărată cînd $x = -1$.

Propoziția $Q[x]$, respectiv $|x| = x$, este adevărată cînd :

$$x = 1 ;\ x = 2 ;\ x = 3.$$

Propoziția $R[x]$, respectiv $|x| = -x$ este adevărată cînd

$$x = -1\,;\ x = -2\,;\ x = -3.$$

25. *Să se determine numerele reale x, y pentru care propoziția „$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 0$“ este adevărată.*

Răspuns.

Propoziția „$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 0$“ mai poate fi scrisă $(x-2)^2 + y^2 = 0$. Deoarece $(x-2)^2 \geqslant 0$ și $y^2 \geqslant 0$, rezultă $x - 2 = 0$ și $y = 0$. Așadar, singurele numere x, y pentru care propoziția $x^2 - 4x + 4 + y^2 = 0$ este adevărată sînt: $x = 2\,;\ y = 0$.

26. *Să se determine numerele întregi x, y pentru care propoziția $(x-1)(y-3) = 13$ este adevărată.*

Răspuns.

Sînt posibile următoarele situații:

$$\begin{array}{ll} x - 1 = 1, & y - 3 = 13\,; \\ x - 1 = -1, & y - 3 = -13\,; \\ x - 1 = 13, & y - 3 = 1\,; \\ x - 1 = -13, & y - 3 = -1. \end{array}$$

Așadar propoziția este adevărată dacă:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 16 \end{cases}\,;\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -10 \end{cases}\,;\quad \begin{cases} x = 14 \\ y = 4 \end{cases}\,;\quad \begin{cases} x = -12 \\ y = 2. \end{cases}$$

27. *Să se determine x și y, astfel încît propoziția $2x + y = 10$, unde x și y sînt elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ să fie adevărată.*

Răspuns.

Cînd $x = 1$, avem $2 \cdot 1 + y = 10$, de unde $y = 8$.
Cînd $x = 2$, avem $2 \cdot 2 + y = 10$, de unde $y = 6$.
Cînd $x = 3$, avem $2 \cdot 3 + y = 10$, de unde $y = 4$.
Cînd $x = 4$, avem $2 \cdot 4 + y = 10$, de unde $y = 2$.
Cînd $x = 5$, avem $2 \cdot 5 + y = 10$, de unde $y = 0$.

Deoarece dintre valorile găsite pentru y, anume 8, 6, 4, 2, 0, numai 2 și 4 aparțin mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, rezultă că propoziția $2x + y = 10$ este adevărată dacă:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2. \end{cases}$$

28. *Să se determine numerele naturale x și y astfel încît propoziția $5x + 6y = 70$ să fie adevărată.*

Răspuns.

$6y$ trebuie să se dividă cu 5, deci y trebuie să fie un multiplu de 5. Mai trebuie îndeplinită condiția $70 - 6y > 0$, de unde $y < \frac{70}{6}$, deci $y < 12$. Rezultă că y nu poate fi decît 5 sau 10.

Dacă $y = 5$, obținem $x = \frac{70 - 6 \cdot 5}{5} = \frac{70 - 30}{5} = \frac{40}{5} = 8.$

Dacă $y = 10$, obținem $x = \frac{70 - 6 \cdot 10}{5} = \frac{70 - 60}{5} = \frac{10}{5} = 2.$

Așadar, propoziția $5x + 6y = 70$ este adevărată cînd

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 2 \\ y = 10. \end{cases}$$

După cum se știe acest rezultat se mai exprimă spunînd că singurele soluții, formate din numere naturale, ale ecuației $5x + 6y = 70$, sînt

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 5 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 10. \end{cases}$$

29. *Să se determine mulțimile :*

a) $A = \{x \in N^* \mid x$ este un divizor al lui 6 sau x este un divizor al lui $4\}$.

b) $B = \{x \in N^* \mid x$ este un divizor al lui 6 și x este un divizor al lui $4\}$.

Răspuns.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}, \quad B = \{1, 2\}.$$

30. *Fie mulțimile :*

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

Care din următoarele afirmații sînt adevărate și care sînt false ?

Scanned with OKEN Scanner

a) $(3 \in A) \vee (3 \in B)$;
b) $(1 \in A) \vee (2 \in B)$;
c) $(9 \in A) \vee (9 \in B)$;
d) $(4 \in A) \wedge (7 \in B)$;
e) $(2 \in A) \wedge (1 \in B)$;
f) $(5 \in A) \wedge (2 \in B)$;
g) $(5 \notin A) \vee (2 \in B)$;
h) $(4 \in A) \vee (1 \notin B)$;
i) $(5 \notin A) \wedge (2 \notin B)$.

Răspuns.
Afirmațiile a), b), d), g), h), i) sînt adevărate. Celelalte sînt afirmații false.

31. *Fie propozițiile*:

$$P_1 : (x = 1) \vee (y = 3);$$
$$P_2 : (y = 2) \vee (z = 1);$$
$$P_3 : (x = 2) \vee (z = 3);$$
$$P_4 : x \neq 1.$$

Să se determine x, y și z astfel încît cele 4 propoziții să fie adevărate simultan.

Răspuns.
Deoarece $x \neq 1$, din P_1 rezultă $y = 3$. Din P_2 deducem $z = 1$, iar din P_3, $x = 2$.

32. *Să se determine numerele naturale x, y, z care îndeplinesc simultan condițiile*:

a) $(x = 2) \vee (y = 1) \vee (z = 3)$;
b) $(x = 1) \vee (y = 3) \vee (z = 1)$;
c) $(x \neq 1) \wedge (z = 2)$.

Răspuns.
Din $(x \neq 1) \wedge (z = 2)$ (condiția c)) rezultă $(x \neq 1) \wedge (z \neq 1)$ și deci, propoziția b) este adevărată numai cînd $y = 3$.
Deoarece $y = 3$ și $z = 2$, avem $y \neq 1$ și $z \neq 3$ și atunci propoziția a) este adevărată numai cînd $x = 2$.
Așadar: $x = 2$, $y = 3$, $z = 2$.

33. *Să se determine mulțimile*:
a) $A = \{x \in N^* \mid (x \text{ este un divizor al lui } 12) \vee (x \text{ este un divizor al lui } 16)\}$;
b) $B = \{x \in N^* \mid (x \text{ este un divizor al lui } 12) \wedge (x \text{ este un divizor al lui } 16)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16\}$;
b) $B = \{1, 2, 4\}$.

34. *Fie mulțimea* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, 30\}$.

a) Să se determine $x \in A$ astfel încît propoziția (x este un divizor al lui 27) $\vee$ (x este un multiplu de 9) să fie adevărată.

b) Să se determine $x \in A$ astfel încît propoziția (x este un divizor al lui 27) $\wedge$ (x este un multiplu al lui 9) să fie adevărată.

Răspuns.

Propoziția (x este un divizor al lui 27) este adevărată dacă $x \in \{1, 3, 9, 27\}$. Propoziția (x este un multiplu de 9) este adevărată dacă $x \in \{9, 18, 27\}$.

a) Afirmația (x este un divizor al lui 27) $\vee$ (x este un multiplu de 9) este adevărată dacă

$$x \in \{1, 3, 9, 18, 27\}.$$

b) Afirmația (x este un divizor al lui 27) $\wedge$ (x este un multiplu al lui 9) este adevărată dacă $x \in \{9, 27\}$.

35. *Fie propozițiile*:

$$P[x, y] : x - y = 2;$$

$Q[x, y] : x + 2y = 5$, *unde* x *și* y *sînt elemente ale mulțimii* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) *Să se determine* x *și* y *astfel încît afirmația* $(P[x, y]) \vee (Q[x, y])$ *să fie adevărată*;

b) *Să se determine* x *și* y *astfel încît afirmația* $(P[x, y]) \wedge (Q[x, y])$ *să fie adevărată.*

Răspuns.

Propoziția $P[x, y]$ este adevărată dacă:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 3. \end{cases}$$

Propoziția $Q[x, y]$ este adevărată dacă:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

a) Afirmația $(P[x, y]) \vee (Q[x, y])$ este adevărată cînd:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}.$$

b) Afirmația $(P[x, y]) \wedge (Q[x, y])$ este adevărată cînd:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$$

86. *Fie* $= \{1, 2, 3, 4\}$ *și propozițiile:*

$$P[x, y]: x + 2y = 6, \qquad x \in A, \ y \in A;$$
$$Q[x, y]: x^2 + 12y = 6x + 4y^2, \qquad x \in A, \ y \in A.$$

a) *Să se determine numerele* $x \in A$, $y \in A$ *pentru care propoziția* $P[x, y]$, *respectiv* $Q[x, y]$ *este adevărată.*

b) *Să se verifice că* $P[x, y] \Rightarrow Q[x, y]$.

c) *Implicația* $Q[x, y] \Rightarrow P[x, y]$ *este adevărată?*

Răspuns.

Propoziția $P[x, y]$ este adevărată dacă $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$;

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Dacă $x = 1$, propoziția $Q[x, y]$ devine $(1 + 12y = 6 + 4y^2) \vee$ $\vee (4y^2 - 12y + 5 = 0)$, cu rădăcinile $y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{4} =$ $= \frac{6 \pm 4}{4}$, adică $\left(y_1 = \frac{5}{2} \notin A\right) \wedge \left(y_2 = \frac{1}{2} \notin A\right)$.

Dacă $x = 2$, propoziția $Q[x, y]$ devine $(4 + 12y = 12 +$ $+ 4y^2) \vee (y^2 - 3y + 2 = 0)$, cu rădăcinile $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Am obținut astfel valorile:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Dacă $x = 3$, propoziția $Q[x, y]$ devine $(9 + 12y = 18 +$ $+ 4y^2) \vee (4y^2 - 12y + 9 = 0)$, cu rădăcinile $y_1 = y_2 =$ $= -\frac{3}{2} \notin A$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x = 4$, propoziția $Q[x, y]$ devine $(16 + 12y = 24 + 4y^2) \vee (y^2 - 3y + 2 = 0)$, cu rădăcinile $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Am obținut astfel valorile

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Așadar, propoziția $Q[x, y]$ este adevărată dacă:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}.$$

b) $P[x, y] \Rightarrow Q[x, y]$, deoarece pentru valorile $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ și $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$, pentru care este adevărată $P[x, y]$, este adevărată și $Q[x, y]$.

c) Implicația $Q[x, y] \Rightarrow P[x, y]$ nu este adevărată, deoarece de exemplu $Q[x, y]$ este adevărată pentru $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ și $P[x, y]$ nu este adevărată pentru aceste valori.

37. *Fie* $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *și propozițiile*:

$P[x, y] : x - y = 4, \ x \in A, \ y \in A;$
$Q[x, y] : x(x - 4) = y(y + 4), \ x \in A, \ y \in A.$

a) *Să se determine valorile* x, y *pentru care propoziția* $P[x, y]$ *respectiv* $Q[x, y]$ *este adevărată.*

b) *Să se verifice că*: $P[x, y] \Leftrightarrow Q[x, y]$.

Răspuns. a) Propoziția $P[x, y]$ este adevărată dacă:

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Propoziția $Q[x, y]$ este adevărată dacă:

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}.$$

b) $P[x, y] \Rightarrow Q[x, y]$, căci ori de cîte ori este adevărată $P[x, y]$ este adevărată și $Q[x, y]$.

$Q[x, y] \Rightarrow P[x, y]$, căci ori de cîte ori este adevărată $Q[x, y]$ este adevărată și $P[x, y]$.

Scanned with OKEN Scanner

$P[x, y] \Leftrightarrow Q[x, y]$. (cele două propoziții sînt adevărate simultan și false simultan.)

38. a) *Să se arate, folosind un exemplu, că există propoziții* P, Q *pentru care implicațiile :* „$P \Rightarrow Q$“, „*non* $P \Rightarrow Q$“ *sînt simultan adevărate.*

b) *Să se arate apoi că dacă* „$P \Rightarrow Q$“ *și* „*non* $P \Rightarrow Q$“ *sînt simultan adevărate, atunci* Q *este o propoziție adevărată.*

Răspuns.

a) Fie $x \in R$ și propozițiile : $P[x] : x < 0$; $Q[x] : x^2 \geqslant 0$.

Avem simultan : $x < 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 0$, propoziție adevărată,

$x \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant 0$, propoziție adevărată.

b) Dacă Q ar fi falsă, atunci am avea simultan : P falsă, non P falsă, ceea ce este absurd.

39. *Să se arate că oricare ar fi propozițiile* P, Q, R, *sînt adevărate proprietățile :*

1) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$;
2) $(P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$;
3) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$;
4) $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$;
5) $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$;
6) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q))$;
7) $(\bar{Q} \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$;
8) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \Rightarrow Q)$;
9) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \overline{(\bar{P} \vee \bar{Q})}$.

Soluție.

Vom verifica proprietatea 1) pe un tabel de adevăr.

P	Q	$Q \Rightarrow P$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
a	a	a	a
a	f	a	a
f	a	f	a
f	f	a	a

Tabelul nr. 12

Scanned with OKEN Scanner

Se constată că implicația $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ este adevărată în toate cazurile.

Celelalte proprietăți se justifică în mod asemănător.

40. *Fie următoarele propoziții:*

P_1: *Triunghiul ABC este dreptunghic în A.*

P_2: *În triunghiul ABC, $\hat{B} = 60°$ și $\hat{C} = 30°$.*

P_3: *În triunghiul ABC, $AB = \frac{BC}{2}$.*

Care dintre următoarele implicații sînt adevărate și care false?

$P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_1$, $P_1 \Rightarrow P_3$, $P_3 \Rightarrow P_1$, $P_2 \Rightarrow P_3$, $P_3 \Rightarrow P_2$.

Să se motiveze fiecare răspuns.

Răspuns.

P_1 nu implică P_2, căci există triunghiuri dreptunghice ABC în care $\hat{B} \neq 60°$ și $\hat{C} \neq 30°$ (de exemplu triunghiul dreptunghic isoscel).

$P_2 \Rightarrow P_1$, căci dacă $\hat{B} = 60°$ și $\hat{C} = 30°$, atunci $\hat{A} = 90°$.

P_1 nu implică P_3, căci există triunghiuri dreptunghice ABC, în care $AB \neq \frac{BC}{2}$ (de exemplu, dacă triunghiul dreptunghic ABC este isoscel, atunci $AB = \frac{BC\sqrt{2}}{2}$ și deci $AB \neq \frac{BC}{2}$).

P_3 nu implică P_1, căci există triunghiuri ABC, în care $AB = \frac{BC}{2}$ și $\hat{A} \neq 90°$. De exemplu, triunghiul ABC cu laturile $BC = 4$, $AB = 2$, $AC = 5$ ($BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, căci $16 \neq 4 + 25$).

$P_2 \Rightarrow P_3$, căci dacă într-un triunghi ABC, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 30°$ rezultă că $\hat{A} = 90°$ și atunci la unghiul de 30° se opune o catetă egală cu jumătate din ipotenuză (teoremă cunoscută).

Scanned with OKEN Scanner

P_3 nu implică P_2, căci există un triunghi ABC în care $AB = \frac{BC}{2}$ și $\hat{B} \neq 60°$ și $\hat{C} \neq 30°$.

41. *Fie propozițiile:*

$P_1[x, y] : x = y \ (x \in R, \ y \in R)$;
$P_2[x, y] : x^2 = y^2 \ (x \in R, \ y \in R)$;
$P_3[x, y] : x^3 = y^3 (x \in R, \ y \in R)$;
$P_{2n}[x, y]: x^{2n} = y^{2n} \ (x \in R, \ y \in R, \ n \in N)$;
$P_{2n+1}[x, y] : x^{2n+1} = y^{2n+1} (x \in R, \ y \in R, \ n \in N)$.

Care din următoarele implicații sînt adevărate și care sînt false?

a) $P_1[x, y] \Rightarrow P_2[x, y]$; $P_2[x, y] \Rightarrow P_1[x, y]$;
b) $P_1[x, y] \Rightarrow P_3[x, y]$; $P_3[x, y] \Rightarrow P_1[x, y]$;
c) $P_1[x, y] \Rightarrow P_{2n}[x, y]$; $P_{2n}[x, y] \Rightarrow P_1[x, y]$;
d) $P_1[x, y] \Rightarrow P_{2n+1}[x, y]$; $P_{2n+1}[x, y] \Rightarrow P_1[x, y]$.

Răspuns.

a) Implicația $P_1[x, y] \Rightarrow P_2[x, y]$ este adevărată, adică $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$. Implicația $P_2[x, y] \Rightarrow P_1[x, y]$ nu este adevărată, căci, de exemplu, propoziția $P_2[x, y] : x^2 = y^2$ este adevărată dacă $x = -3$, $y = 3$, $(-3)^2 = 3^2$, iar propoziția $P_1[x, y] : x = y$ pentru $x = -3$, $y = 3$ este falsă.

b) Implicația $P_1[x, y] \Rightarrow P_3[x, y]$ este adevărată. Implicația $P_3 \Rightarrow P_1$ este adevărată. Așadar $P_1[x, y] \Leftrightarrow P_3[x, y]$.

c) Implicația $P_1[x, y] \Rightarrow P_{2n}[x, y]$ este adevărată. Implicația $P_{2n}[x, y] \Rightarrow P_1[x, y]$ este falsă (vezi a)).

d) Implicația $P_1[x, y] \Rightarrow P_{2n+1}[x, y]$ este adevărată. Implicația $P_{2n+1}[x, y] \Rightarrow P_1[x, y]$ este adevărată. Așadar, $P_1[x, y] \Leftrightarrow P_{2n+1}[x, y]$.

42. *Folosind rezultatele de la exercițiul precedent să se arate că:*

a) $3x - 2y = 4 \Rightarrow 9x^2 - 12xy + 4y^2 = 16 (x \in R, \ y \in R)$;
b) $3x - 2y = 4 \Rightarrow 9x^2 - 12x = 4y^2 + 8y (x \in R, \ y \in R)$;
c) $3x - 2y = 4 \Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2y = 64 + 8y^3 - 36xy^2$ $(x \in R, \ y \in R)$.

Răspuns.

a) $3x - 2y = 4 \Rightarrow (3x - 2y)^2 = 4^2$, adică $3x - 2y = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9x^2 - 12xy + 4y^2 = 16$.

b) $3x - 2y = 4 \Rightarrow 3x - 2 = 2y + 2 \Rightarrow (3x - 2)^2 =$
$= (2y + 2)^2$, adică
$3x - 2y = 4 \Rightarrow 9x^2 - 12x + 4 = 4y^2 + 8y + 4$
și deci $3x - 2y = 4 \Rightarrow 9x^2 - 12x = 4y^2 + 8y$.

c) $3x - 2y = 4 \Rightarrow (3x - 2y)^2 = 4^3$, adică
$3x - 2y = 4 \Rightarrow 27x^3 - 54x^2y = 64 + 8y^3 - 36xy^2$.

43. *Fie propozițiile :*

$$P_1 : x + y > 0;$$
$$P_2 : x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2.$$

Să se demonstreze că $P_1 \Leftrightarrow P_2$ $(x \in R,\ y \in R)$.

Soluție.

Să arătăm mai întîi că $P_1 \Rightarrow P_2$. Fie $x + y > 0$. Avem : $x < y \Rightarrow x - y < 0$ și cum $x + y > 0$, rezultă $(x - y)(x + y) < 0$, adică $x^2 < y^2$. Reciproc, $x^2 < y^2 \Rightarrow (x - y)(x + y) < 0$ și deoarece $x + y > 0$, rezultă $x - y < 0$, adică $x < y$. Am demonstrat astfel că $P_1 \Rightarrow P_2$.

Reciproc, să arătăm că $P_2 \Rightarrow P_1$.

Din P_2 se obține : $x - y < 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) < 0$, de unde rezultă $x + y > 0$ deci $P_2 \Rightarrow P_1$.

44. *Să se demonstreze că* x *și* y *fiind numere reale nenule, avem :*

$$x = y \Leftrightarrow [(x^2 = y^2) \wedge (xy > 0)].$$

Soluție.

Avem : $x = y \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = y^2$.

De asemenea $x = y \Rightarrow xy > 0$.

Reciproc, $((x^2 = y^2) \wedge (xy > 0) \Rightarrow [((x - y)(x + y) = 0) \wedge$
$\wedge (xy > 0)] \Rightarrow \{[(x - y = 0) \vee (x + y = 0)] \wedge (xy > 0)\} \Rightarrow$
$\Rightarrow [(x - y = 0) \wedge (xy > 0)] \vee [(x + y = 0) \wedge (xy > 0)]$.

Propoziția $(x + y = 0) \wedge (xy > 0)$ este falsă. Într-adevăr, $(x + y = 0) \wedge (xy > 0) \Leftrightarrow (x + y = 0) \wedge [x(-x) > 0] \Leftrightarrow$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow (x + y = 0) \wedge (x^2 > 0)$, ceea ce este fals. Avem deci $(x^2 = y^2) \wedge (xy > 0) \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$. Echivalența este demonstrată.

45. *Să se demonstreze că:*

$$\{x \mid (x \in R) \wedge (\mid x - 3 \mid < 5)\} = (-2, 8)$$

Răspuns.

$\{x \mid (x \in R) \wedge (\mid x - 3 \mid < 5)\} = \{x \mid [(x < 3) \vee (x \geqslant 3)] \wedge (\mid x - 3 \mid < 5)\} = \{x \mid (x < 3) \wedge (\mid x - 3 \mid < 5)] \vee [(x \geqslant 3) \wedge (\mid x - 3 \mid < 5)]\}$.

Ținînd seama că $\mid x - 3 \mid = \begin{cases} x - 3, \text{ dacă } x \geqslant 3 \\ -x + 3, \text{ dacă } x < 3, \end{cases}$ mulțimea se poate scrie:

$$\{x \mid [(x < 3) \wedge (-x + 3 < 5)] \vee [(x \geqslant 3) \wedge (x - 3 < 5)]\} =$$
$$= \{x \mid [(x < 3) \wedge (x > -2) \vee [(x \geqslant 3) \wedge (x < 8)]\} =$$
$$= \{x \mid [x \in (-2, 3)] \vee [x \in [3, 8)]\} = (-2, 3) \cup [3, 8) =$$
$$= (-2, 8).$$

46. *Fie propozițiile (x și y sînt numere reale):*

$$P_1 : (x + y = 0) \wedge (xy > 0);$$
$$P_2 : (x + y = 0) \Rightarrow (xy \leqslant 0);$$

a) *Pentru ce valori ale lui x și y este adevărată propoziția P_1?*

b) *Să se determine x și y astfel ca P_2 să fie propoziție adevărată.*

Soluție.

a) Oricare ar fi numerele reale x și y, P_1 este falsă.

Într-adevăr, $(x + y = 0) \wedge (xy > 0) \Leftrightarrow (x = -y) \wedge (xy > 0) \Leftrightarrow (x = -y) \wedge (-y^2 > 0)$ și cum $-y^2 > 0$ este falsă oricare ar fi y real, rezultă că P_1 este o propoziție falsă.

b) Avem:

$x + y = 0 \Rightarrow x(x + y) = 0 \Rightarrow xy = -x^2$ și cum $-x^2 \leqslant 0$, rezultă: $x + y = 0 \Rightarrow xy \leqslant 0$, adică propoziția P_2 este adevărată oricare ar fi numerele reale x și y astfel ca $x + y = 0$.

47. *Dacă x și y sînt numere reale, să se demonstreze că:*

$$(xy < x + y < x - y) \Rightarrow (x > 0) \wedge (y < 0).$$

Scanned with OKEN Scanner

Implicația în sens invers este adevărată?

Soluție.

Din $x + y < x - y$ rezultă $y < 0$; din $xy < x + y$ și $y < 0$ rezultă $x > 0$, căci dacă $x < 0$, atunci $xy > 0$ și $x + y < 0$ ceea ce contrazice $xy < x + y$.

Implicația în sens invers este falsă, deoarece există două numere reale x și y astfel ca $x > 0$, $y < 0$ care nu verifică $xy < x + y < x - y$. Într-adevăr, pentru $x = \frac{1}{10}$ și $y = -1$, avem $x > 0$, $y < 0$ dar $xy > x + y$.

48. *Dacă x și y sînt numere întregi iar a și b reale astfel ca $0 \leqslant a < 1$, $0 \leqslant b < 1$, să se arate că:*

$$(x + a = y + b) \Leftrightarrow (x = y) \wedge (a = b).$$

Soluție.

Dacă $x = y$ și $a = b$, atunci evident $x + a = y + b$.

Să arătăm că și implicația $(x + a = y + b) \Rightarrow (x = y) \wedge (a = b)$ este adevărată. Procedăm prin reducere la absurd: dacă n-ar fi adevărată, atunci ar exista numerele întregi x, y și numerele reale subunitare și nenegative a, b astfel ca să avem:

$$(x + a = y + b) \wedge (x \neq y) \vee (a \neq b).$$

Fie $x \neq y$ și să presupunem $x > y$. Deoarece x și y sînt numere întregi, $x - y \geqslant 1$.

Din $(0 \leqslant a < 1) \wedge (0 \leqslant b < 1)$ rezultă $b - a < 1$.

Dar din egalitatea $x + a = y + b$ rezultă $x - y = b - a$ și deci $b - a \geqslant 1$, în contradicție cu $b - a < 1$.

Să presupunem că $a \neq b$ și fie $a > b$. Avem $0 < a - b < 1$, dar cum $a - b = x - y$, rezultă $0 < y - x < 1$ ceea ce este în contradicție cu faptul că x și y sînt întregi. Presupunerea că implicația n-ar fi adevărată este deci falsă. Cu aceasta, echivalența din enunț este demonstrată.

49. *Notăm cu $[x]$ cel mai mare întreg cel mult egal cu x. Să se determine mulțimile:*

a) $\left\{ x \in R \mid x + [x] = \frac{5}{2} \right\}$;

b) $\left\{ x \in R \mid x + [x] = \frac{34}{3} \right\}$;

c) $\left\{ x \in R \mid x - [x] = \frac{1}{2} \right\}$.

Soluție.

a) Fie $x = p + \varepsilon$ unde p este partea întreagă a lui x și $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

$x + [x] = p + \varepsilon + p = 2p + \varepsilon$, deci $2p + \varepsilon = \frac{5}{2}$, $2p + \varepsilon = 2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2p = 2$ și $\varepsilon = \frac{1}{2}$ și deci $x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\left\{x \in R \mid x + [x] = \frac{5}{2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

b) $\left\{x \in R \mid x + [x] = \frac{34}{4}\right\} = \varnothing$. Într-adevăr, notînd ca și la exercițiul precedent $x = p + \varepsilon$, p fiind partea întreagă a lui x iar $0 \leqslant \varepsilon < 1$, ecuația $x + [x] = \frac{34}{3}$ devine $2p + \varepsilon = \frac{34}{3}$ sau $2p + \varepsilon = 11 + \frac{1}{3}$, ceea ce are loc numai dacă $2p = 11$; egalitatea aceasta este însă imposibilă căci p este întreg. Ecuația $x + [x] = \frac{34}{3}$ nu are soluții și deci mulțimea $\left\{ x \in R \mid x + [x] = \frac{34}{3} \right\}$ este vidă.

c) Avem: $x - [x] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p + \varepsilon - p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}$. De aici rezultă că oricare ar fi p întreg, $x = p + \frac{1}{2}$ este soluție a ecuației $x - [x] = \frac{1}{2}$ și deci:

Scanned with OKEN Scanner

$$\left\{x \in R \mid x - [x] = \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \mid x = p + \frac{1}{2},\ p \in Z\right\} = \left\{\ldots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\right\}.$$

50. *Să se verifice următoarele echivalențe:*

a) $(x > 3) \vee (x > 5) \Leftrightarrow (x > 3), \quad (x \in R);$
b) $(x > 3) \wedge (x > 5) \Leftrightarrow (x > 5), \quad (x \in R).$

Răspuns.

Afirmația $(x > 3) \vee (x > 5)$ este adevărată, cînd cel puțin una din propozițiile „$x > 3$“, „$x > 5$“ este adevărată. Dacă $x > 5$, atunci rezultă $x > 3$ (căci $5 > 3$) și deci $(x > 3) \vee (x > 5) \Rightarrow (x > 3)$.

Implicația $(x > 3) \Rightarrow (x > 3) \vee (x > 5)$ este evident adevărată.

Dacă afirmația $(x > 3) \wedge (x > 5)$ este adevărată, atunci sînt adevărate simultan propozițiile „$x > 3$“, „$x > 5$“ și aceasta se întîmplă cînd $x > 5$, deci $(x > 3) \wedge (x > 5) \Rightarrow \Rightarrow x \wedge 5$. Dacă $x > 5$, atunci avem evident, $x > 3$ și $x > 5$ și deci $(x > 5) \Rightarrow (x > 3) \wedge (x > 5)$.

51. *Să se verifice echivalențele:*

a) $[x \in [2, +\infty)] \vee [x \in (4, +\infty)] \Leftrightarrow x \in [2, +\infty);$
b) $[x \in [2, +\infty)] \wedge [x \in (4, +\infty)] \Leftrightarrow x \in (4, +\infty).$

Răspuns.

a) $[x \in [2, +\infty)] \vee [x \in (4, +\infty)] \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \geqslant 2) \vee (x > 4) \Rightarrow (x \geqslant 2) \Rightarrow x \in [2, +\infty).$
$x \in [2, +\infty) \Rightarrow x \geqslant 2 \Rightarrow (x \geqslant 2) \vee (x > 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow [x \in (2, +\infty)] \vee [x \in (4, +\infty)].$

b) $[x \in [2, +\infty)] \wedge [x \in (4, +\infty)] \Rightarrow (x \geqslant 2) \wedge (x > 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x > 4) \Rightarrow x \in (4, +\infty).$
$x \in (4, +\infty) \Rightarrow x > 4 \Rightarrow (x \geqslant 2) \wedge (x > 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow [x \in [2, +\infty)] \wedge [x \in (4, +\infty)].$

52. *Să se verifice echivalențele:*

a) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow (x = 0) \vee (y = 0) \quad (x \in R,\ y \in R);$

Scanned with OKEN Scanner

b) $x \cdot y > 0 \Leftrightarrow [(x > 0) \wedge (y > 0)] \vee [(x < 0) \wedge (y < 0)]$, unde ($x \in R$ și $y \in R$);

c) $x \cdot y < 0 \Leftrightarrow [(x > 0) \wedge (y < 0)] \vee [(x < 0) \wedge (y > 0)]$, unde $x \in R$ și $y \in R$;

d) $\frac{x}{y} > 0 \Leftrightarrow [(x > 0) \wedge (y > 0)] \vee [(x < 0) \wedge (y < 0)]$, unde $x \in R$, $y \in R$ și $y \neq 0$;

e) $\frac{x}{y} < 0 \Leftrightarrow [(x > 0) \wedge (y < 0)] \vee [(x < 0) \wedge (y > 0)]$, unde $x \in R$, $y \in R$ și $y \neq 0$.

Răspuns.

a) Avem: $x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$ (dacă un produs de numere reale este nul, atunci cel puțin unul din factori este nul).

$$(x = 0) \vee (y = 0) \Rightarrow (x \cdot y = 0).$$

Deci, echivalența cerută.

Echivalența de la punctul b) rezultă din regula semnelor la înmulțire) care afirmă că dacă produsul a două numere este pozitiv, atunci ambele numere sînt pozitive sau ambele negative: $x \cdot y > 0 \Rightarrow [(x > 0) \wedge (y > 0)] \vee [(x < 0) \wedge (y < 0)]$ și reciproc, dacă două numere, sînt ambele pozitive, sau ambele negative, atunci produsul lor este pozitiv: $[(x > 0) \wedge \wedge (y > 0)] \vee [(x < 0) \wedge (y < 0)] \Rightarrow x \cdot y > 0$.

Celelalte echivalențe se justifică analog.

53. *Fie propozițiile:*

P_1: *„Dreptunghiul A este înscris în pătratul B“ (fiecare vîrf al dreptunghiului se găsește pe cîte o latură a pătratului);*

P_2: *„Dreptunghiul A este pătrat“;*

P_3: *„Laturile dreptunghiului A sînt paralele cu diagonalele pătratului B“.*

Să se arate că $P_1 \Rightarrow (P_2 \vee P_3)$.

Răspuns.

În ipoteza P_1 adevărată, fie x și y dimensiunile dreptunghiului, a latura pătratului B, iar m și n catetele triunghiului dreptunghic cu ipotenuza y (vezi figura 1).

Scanned with OKEN Scanner

Triunghiurile din colțurile opuse ale pătratului sînt egale (au ipotenuzele egale și cîte un unghi ascuțit egal). Triunghiurile haşurate sînt asemenea (sînt dreptunghice și au cîte un unghi ascuțit egal). Din această asemănare rezultă :

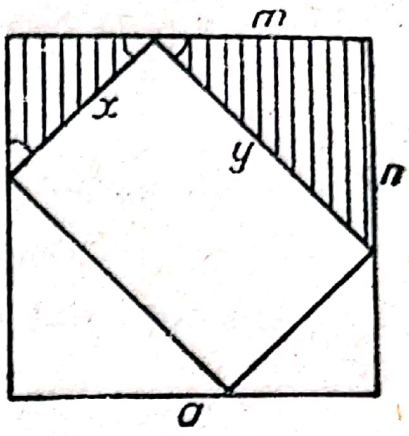


Fig. 1

$$\frac{x}{y} = \frac{a-m}{n} = \frac{a-n}{m} \qquad (1)$$

Deci $P_1 \Rightarrow \left(\frac{a-m}{n} = \frac{a-n}{m}\right) \Rightarrow (am - m^2 = an - n^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow a(m-n) - (m^2 - n^2) = 0 \Rightarrow (m-n)(a-m-n) = 0 \Rightarrow (m-n=0) \vee (a-m-n=0) \Rightarrow (m-n) \vee (m+n=a).$

Dacă $m = n$, triunghiurile haşurate au unghiuri de 45° și rezultă P_2, dacă $m + n = a$, avem $m = a - n$ și înlocuind în (1) obținem : $\frac{x}{y} = \frac{a-(a-n)}{n} = \frac{n}{n} = 1$, adică $x = y$, dreptunghiul este pătrat și rezultă P_2.

54. *Este adevărată implicația următoare* (a, b, x *fiind numere reale*)

$$(a^2 + b^2 = 1) \wedge (a \neq 0) \Rightarrow \left[\text{există } x \text{ astfel ca } \left(\frac{2x}{1+x^2} = a\right) \wedge \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} = b\right)\right] ?$$

Soluție.

Să arătăm că oricare ar fi numerele a, b pentru care $a^2 + b^2 = 1$ și $a \neq 0$. ecuațiile cu necunoscuta x :

$$\frac{2x}{1+x^2} = a \quad \text{și} \quad \frac{1-x^2}{1+x^2} = b$$

au o soluție comună.

Ținînd seama că $a^2 + b^2 = 1$ și $a \neq 0$, ecuația

$$\frac{2x}{1+x^2} = a$$

este echivalentă cu

$$ax^2 - 2x + a = 0$$

ale cărei soluții sînt date de:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-a^2}}{a} = \frac{1 \pm \sqrt{b^2}}{a} = \frac{1 \pm b}{a}$$

și deci

$$x = \frac{1+b}{a} \text{ sau } x = \frac{1-b}{a}.$$

Ținînd seama că $1 - b \neq 0$ și $1 + b \neq 0$ ($1 - b^2 = a^2 \neq 0$ și deci $1 - b \neq 0$, $1 + b \neq 0$), ecuația

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = b$$

este echivalentă cu

$$x^2 = \frac{1-b}{1+b},$$

ecuație care se mai poate scrie:

$$x^2 = \frac{(1-b)^2}{1-b^2},$$

sau ținînd seama că $1 - b^2 = a^2$,

$$x^2 = \left(\frac{1-b}{a}\right)^2$$

de unde

$$x = \frac{1-b}{a} \text{ sau } x = \frac{b-1}{a}.$$

Se observă că $x = \frac{1-b}{a}$ este soluție comună celor două ecuații din enunț.

Am arătat astfel că oricare ar fi a și b astfel ca $a^2 + b^2 = 1$ și $a \neq 0$, există numărul real $x = \frac{1-b}{a}$, pentru care avem $\frac{2x}{1+x^2} = a$ și $\frac{1-x^2}{1+x^2} = b$, adică implicația din enunț este adevărată.

55. *Fie numerele reale* $a, b, c, \alpha, \beta (a \neq 0, \alpha < \beta)$.

Să se arate că:

$(a\alpha^2 + b\alpha + c)(a\beta^2 + b\beta + c) < 0 \Rightarrow$ (*ecuația cu necunoscuta* x, $ax^2 + bx + c = 0$, *are o singură rădăcină reală cuprinsă între* α *și* β). *Implicația în sens invers este adevărată?*

Răspuns.

Să arătăm că dacă $(a\alpha^2 + b\alpha + c)(a\beta^2 + b\beta + c) < 0$, atunci $b^2 - 4ac > 0$. Într-adevăr, dacă am avea $b^2 - 4ac < 0$, atunci $a\alpha^2 + b\alpha + c$ și $a\beta^2 + b\beta + c$ ar avea același semn, anume semnul lui a (semnul trinomului de gradul doi) și deci $(a\alpha^2 + b\alpha + c)(a\beta^2 + b\beta + c) > 0$, în contradicție cu faptul că acest produs este prin ipoteză negativ.

În mod asemănător se arată că nu putem avea nici $b^2 - 4ac = 0$ și deci rămîne $b^2 - 4ac > 0$. Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are deci rădăcini reale și diferite, $x_1 < x_2$.

Să arătăm că una singură dintre aceste rădăcini este cuprinsă între α și β. Pentru aceasta, vom folosi „semnul trinomului de gradul doi".

Există numai posibilitățile:

1) $x_1 < x_2 < \alpha < \beta$;
2) $\alpha < \beta < x_1 < x_2$;
3) $x_1 < \alpha < \beta < x_2$;
4) $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$;
5) $\alpha < x_1 < \beta < x_2$;
6) $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$.

Cazurile 1) și 2) nu pot avea loc. Într-adevăr, în aceste cazuri $a\alpha^2 + b\alpha + c$ și $a\beta^2 + b\beta + c$ au același semn (semnul lui a), ceea ce este în contradicție cu faptul că produsul lor este negativ.

Scanned with OKEN Scanner

Asemănător se arată că nici cazurile 3), 4) nu sînt posibile în ipoteza $(a\alpha^2 + b\alpha + c)(a\beta^2 + b\beta + c) < 0$.

Mai rămîn cazurile (5) și (6), singurele care pot avea loc. În aceste cazuri între α și β se găsește o singură soluție a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Implicația în sens invers nu este adevărată. Într-adevăr, dacă $\alpha < x_1 < \beta = x_2$, atunci $(a\alpha^2 + b\alpha + c)(a\beta^2 + b\beta + c) = 0$.

56. *Să se demonstreze că:*

$$(|x| \leqslant a \text{ și } |y| \leqslant a) \Rightarrow (|x+y| + |x-y| \leqslant 2a)$$

a, x, y fiind numere reale și $a > 0$.

Implicația în sens invers este adevărată ?

Soluție.

Există numai posibilitățile:

$$\begin{aligned} &1)\ (x + y \geqslant 0) \wedge (x - y \geqslant 0);\\ &2)\ (x + y \leqslant 0) \wedge (x - y \leqslant 0);\\ &3)\ (x + y \geqslant 0) \wedge (x - y \leqslant 0);\\ &4)\ (x + y \leqslant 0) \wedge (x - y \geqslant 0). \end{aligned}$$

În primul caz avem:

$$|x + y| + |x - y| = x + y + x - y = 2x$$

și implicația din enunț se scrie

$$(|x| \leqslant a) \wedge (|y| \leqslant a) \Rightarrow (x \leqslant a).$$

În al doilea caz avem:

$$|x + y| + |x - y| = -x - y - x + y = -2x$$

și implicația devine:

$$(|x| \leqslant a) \wedge (|y| \leqslant a) \Rightarrow (-a \leqslant x).$$

Implicațiile obținute în cele două cazuri sînt adevărate, căci

$$(|x| \leqslant a) \Leftrightarrow (-a \leqslant x \leqslant a).$$

În cazul 3) implicația din enunț devine:

$$(|x| \leqslant a) \wedge (|y| \leqslant a) \Rightarrow (y \leqslant a),$$

iar în cazul 4):

$$(|x| \leqslant a) \wedge (|y| \leqslant a) \Rightarrow (-a \leqslant y).$$

În ambele cazuri implicațiile sînt adevărate, deoarece

$$(|y| \leqslant a) \Leftrightarrow (-a \leqslant y \leqslant a).$$

Este adevărată și implicația reciprocă, adică

$$(|x+y| + |x-y| \leqslant 2a) \Rightarrow (|x| \leqslant a) \wedge (|y| \leqslant a).$$

Într-adevăr, în cazul 1) această implicație devine:

$$(x \leqslant a,\ x+y \geqslant 0,\ x-y \geqslant 0) \Rightarrow (|x| \leqslant a,\ |y| \leqslant a).$$

Din $x - y \geqslant 0$, obținem $y \leqslant x$ și cum $x \leqslant a$, rezultă $y \leqslant a$;

avem:

$$(x+y \geqslant 0) \wedge (x \leqslant a) \Rightarrow (y \geqslant -x) \wedge (-x \geqslant -a) \Rightarrow (y \geqslant -a),$$

$$(x-y \geqslant 0) \wedge (y \geqslant -a) \Rightarrow (x \geqslant y) \wedge (y \geqslant -a) \Rightarrow (x \geqslant -a).$$

Am arătat astfel că:

$$(x \leqslant a,\ x+y \geqslant 0,\ x-y \geqslant 0) \Rightarrow (-a \leqslant x \leqslant a,\ -a \leqslant y \leqslant a)$$ adică

$$(x \leqslant a,\ x+y \geqslant 0,\ x-y \geqslant 0) \Rightarrow (|x| \leqslant a,\ |y| \leqslant a),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Procedînd analog se constată că și în cazurile 2), 3), 4), implicația reciprocă este adevărată și deci avem:

$$(|x| \leqslant a) \wedge (|y| \leqslant a) \Leftrightarrow (|x+y| + |x-y| \leqslant 2a).$$

57. *Să se arate că dacă a, b, x, y sînt numere reale și* $a > 0$, $b > 0$, *atunci*:

1) $(|x| \leqslant 2) \wedge (|y| \leqslant 3) \Rightarrow (|3x+2y| + |3x-2y| \leqslant 12)$;
2) $(|4x+5y| + |4x-5y| \leqslant 40) \Rightarrow (|x| \leqslant 5) \wedge (|y| \leqslant 4)$;
3) $(|x| \leqslant 1) \wedge (|y| \leqslant 3) \Leftrightarrow (|3x-y| + |3x+y| \leqslant 6)$;
4) $(|x| \leqslant a) \wedge (|y| \leqslant b) \Leftrightarrow (|bx-ay| + |bx+ay| \leqslant 2ab)$.

Indicație.
Se procedează ca la exercițiul precedent.

Scanned with OKEN Scanner

58. *Notăm*: *min* (x, y) = *cel mai mic dintre numerele reale* $x, y (x \neq y)$; *min* $(x, x) = x$.

max (x, y) = *cel mai mare dintre numerele reale* $x, y (x \neq y)$; *max* $(x, x) = x$.

Să se demonstreze că:

a) $\min (x, y) > a \Leftrightarrow (x > a) \wedge (y > a)$;
b) $\max (x, y) < a \Leftrightarrow (x < a) \wedge (y < a)$;
c) $\min (x, y) < a \Leftrightarrow (x < a) \vee (y < a)$;
d) $\max (x, y) > a \Leftrightarrow (x > a) \vee (y > a)$.

Răspuns.

a) Dacă $x = y$ atunci $\min (x, y) = x$ și relația de demonstrat se scrie:

$$x > a \Leftrightarrow (x > a) \wedge (x > a),$$

echivalență evident adevărată.

Fie $x \neq y$; dacă cel mai mic dintre numerele x și y este mai mare decît a, cu atît mai mult cel mai mare dintre x și y este mai mare ca a, adică ambele numere sînt mai mari ca a și deci

$$\min (x, y) > a \Rightarrow (x > a) \wedge (y > a).$$

Reciproc, dacă ambele numere x, y sînt mai mari ca a, atunci evident și cel mai mic dintre ele este mai mare ca a, adică

$$(x > a) \wedge (y > a) \Rightarrow \min (x, y) > a$$

și echivalența este demonstrată.

În mod asemănător se stabilesc și relațiile de la punctele b), c), d).

59. *Care dintre propozițiile următoare sînt adevărate și care sînt false?*

a) $\min (x, y) > a \Rightarrow (x > a) \vee (y > a)$;
b) $(x > a) \vee (y > a) \Rightarrow \min (x, y) > a$;
c) $\min (x, y) > a \Leftrightarrow (x > a) \vee (y > a)$;
d) $\max (x, y) < a \Rightarrow (x < a) \vee (y < a)$;
e) $(x < a) \vee (y < a) \Rightarrow \max (x, y) < a$;
f) $\max (x, y) < a \Leftrightarrow (x < a) \vee (y < a)$:

Scanned with OKEN Scanner

g) $\min(x, y) < a \Rightarrow (x < a) \wedge (y < a)$;
h) $(x < a) \wedge (y < a) \Rightarrow \min(x, y) < a$;
i) $\min(x, y) < a \Leftrightarrow (x < a) \wedge (y < a)$;
j) $\max(x, y) > a \Rightarrow (x > a) \wedge (y > a)$;
k) $(x > a) \wedge (y > a) \Rightarrow \max(x, y) > a$;
l) $\max(x, y) > a \Leftrightarrow (x > a) \wedge (y > a)$.

Răspuns.
Propozițiile a), d), h), k) sînt adevărate iar b), c), e), f), g), i), j), l), false.

60. *Să se demonstreze egalitățile următoare:*

a) $\left\{x \in Z \mid \min\left(x+1, 4-\frac{x}{2}\right) \geqslant 1\right\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
b) $\{x \in Z \mid \max(x-2, 13-2x) \leqslant 6\} = \{4, 5, 6, 7, 8\}$;
c) $\{x \in N^* \mid \min(3x-1, 2x+10) \leqslant 20\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
d) $\left\{x \in N^* \mid \max\left(20-x, \frac{45-2x}{3}\right) > 13\right\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
e) $\{x \in Z \mid \min(x+2, 10-x) > -2\} = \{x \in Z \mid |x-4| < 8\}$;
f) $\{x \in Z \mid \min(2x+7, 16-3x) > 0\} = \{x \in Z \mid \max(x-1, 1-x) \leqslant 4\}$;
g) $\left\{x \in R \mid \min\left(x-1, \frac{13-x}{2}\right) < 3\right\} = (-\infty, 4) \cup (7, +\infty)$;
h) $\{x \in R \mid \max(x+1, 7-x) > 5\} = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$.

Răspuns.

a) Avem: $x+1 \leqslant 4-\frac{x}{2} \Leftrightarrow x \leqslant 2$,

$$4-\frac{x}{2} < x+1 \Leftrightarrow x > 2.$$

Dacă $x \leqslant 2$, atunci $\min\left(x+1, 4-\frac{x}{2}\right) = x+1$ și deci

$$\min\left(x+1, 4-\frac{x}{2}\right) \geqslant 1 \Leftrightarrow x+1 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Toate numerele întregi pentru care avem $0 \leqslant x \leqslant 2$ sînt: 0, 1, 2.

Dacă $x > 2$, atunci $\min\left(x+1,\ 4-\frac{x}{2}\right) = 4-\frac{x}{2}$ și

$\min\left(x+1,\ 4-\frac{x}{2}\right) \geqslant 1 \Leftrightarrow 4-\frac{x}{2} \geqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant 6.$

Numerele întregi x pentru care $2 < x \leqslant 6$ sînt: 3, 4, 5, 6. Am obținut astfel:

$$\left\{x \in Z \mid \min\left(x+1,\ 4-\frac{x}{2}\right) \geqslant 1\right\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

b) Se poate proceda ca la punctul precedent. Iată o altă rezolvare:

Deoarece

$$\max(x, y) \leqslant a \Leftrightarrow (x \leqslant a) \wedge (y \leqslant a),$$

avem:

$$\max(x-2,\ 13-2x) \leqslant 6 \Leftrightarrow (x-2 \leqslant 6) \wedge (13 - 2x \leqslant 6) \Leftrightarrow (x \leqslant 8) \wedge \left(x \geqslant \frac{7}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{7}{2} \leqslant x \leqslant 8$$

și deci

$$\{x \in Z \mid \max(x-2,\ 13-2x) \leqslant 6\} = \left\{x \in Z \mid \frac{7}{2} \leqslant x \leqslant 8\right\} = \{4, 5, 6, 7, 8\}.$$

c) Deoarece $\min(x, y) \leqslant a \Leftrightarrow (x \leqslant a) \vee (y \leqslant a)$, avem: $\{x \in N^* \mid \min(3x-1,\ 2x+10) \leqslant 20\} = \{x \in N^* \mid (3x-1 \leqslant 20) \vee (2x+10 \leqslant 20)\} = \{x \in N^* \mid (x \leqslant 7) \vee (x \leqslant 5)\} = \{x \in N^* \mid x \leqslant 7\} \cup \{x \in N^* \mid x \leqslant 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Pentru demonstrarea egalităților d), e), f), g), h), se procedează ca mai înainte.

61. *Fie propozițiile* $P[x, y]$, $Q[x, y, z]$ *în care* x, y, z *sînt numere reale*:

$P[x, y]$: $\max[x, \min(x, y)] = \min[x, \max(x, y)]$;
$Q[x, y, z]$: $\max[x, \min(x, y)] = \min[x, \max(x, z)]$.

Scanned with OKEN Scanner

a) *Să se determine x și y astfel ca $P[x, y]$ să fie adevărată.*
b) *Să se determine x, y și z astfel ca $Q[x, y, z]$ să fie o propoziție adevărată.*

Soluție.

a) Dacă $x \leqslant y$, atunci:

$$\min(x, y) = x, \quad \max(x, y) = y;$$
$$\max[x, \min(x, y)] = \max[x, x] = x;$$
$$\min[x, \max(x, y)] = \min(x, y) = x$$

și deci $\max[x, \min(x, y)] = \min[x, \max(x, y)]$.

Dacă $x > y$, atunci:

$$\min(x, y) = y;$$
$$\max(x, y) = x;$$
$$\max[x, \min(x, y)] = \max(x, y) = x;$$
$$\min[x, \max(x, y)] = \min(x, x) = x$$

și deci și în acest caz egalitatea din enunț este adevărată.

$P[x, y]$ este adevărată oricare ar fi numerele reale x, y.

b) La punctul a) s-a arătat că $\max[x, \min(x, y)] = x$.
În mod asemănător se arată că $\min[x, \max(x, z)] = x$ și deci propoziția $Q[x, y, z]$ este adevărată oricare ar fi numerele reale x, y și z.

62. *Sînt adevărate propozițiile următoare (x, y și z sînt numere reale)?*

a) $\max[x, \min(x, y)] = \min[y, \max(x, y)] \Leftrightarrow x = y$;
b) $\max[\min(x, y), \min(x, z)] = \min[\max(x, y), \max(x, z)] \Leftrightarrow (x - y)(x - z) \leqslant 0$.

Soluție.

a) Dacă $x \leqslant y$, atunci

$$\min(x, y) = x,$$
$$\max[x, \min(x, y)] = \max(x, x) = x,$$

iar dacă $x > y$, atunci:

$$\min(x, y) = y,$$
$$\max[x, \min(x, y)] = \max(x, y) = x,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci oricare ar fi numerele reale x și y, avem:

$$\max [x, \min(x, y)] = x.$$

La fel se arată că oricare ar fi numerele reale x și y avem:

$$\min [y, \max (x, y)] = y.$$

Ținînd seama de aceste rezultate, echivalența din enunț este evident adevărată.

b) Și această echivalență este adevărată. Verificarea se face — folosind tabelul de la sfîrșit — în fiecare din cele șase cazuri posibile.

Notăm:

$$A = \max [\min (x, y), \min (x, z)];$$
$$B = \min [\max (x, y), \max (x, z)].$$

În cazul 1 ($x \leqslant y \leqslant z$), avem $A = x$, $B = y$ și deci

$$A = B \Leftrightarrow x = y.$$

Să arătăm că avem și:

$$x = y \Rightarrow (x - y)(x - z) \leqslant 0.$$

Într-adevăr, avem:

$$x = y \Rightarrow (x - y)(x - z) = 0 \Rightarrow (x - y)(x - z) \leqslant 0.$$

Reciproc, avem:

$$x \leqslant y \leqslant z \text{ și } (x - y)(x - z) \leqslant 0 \Rightarrow x - y \leqslant 0, \; x - z \leqslant 0,$$
$$(x - y)(x - z) \leqslant 0 \Rightarrow (x - y)(x - z) \geqslant 0.$$
$$(x - y)(x - z) \leqslant 0 \Rightarrow (x - y)(x - z) = 0 \Rightarrow x - y = 0$$

(dacă $x - z = 0$, atunci ținînd seama că $x \leqslant y \leqslant z$, avem și $x - y = 0$).

Am arătat astfel că

$$x = y \Leftrightarrow (x - y)(x - z) \leqslant 0.$$

Ținînd seama de această echivalență și de

$$A = B \Leftrightarrow x = y,$$

rezultă echivalența din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul $2(x \leqslant z \leqslant y)$ se arată în mod asemănător că echivalența din enunț este adevărată.

În cazul $3(y \leqslant x \leqslant z)$ avem :

$$A = B = x,\ x - y \geqslant 0,\ x - z \leqslant 0 \text{ și deci}$$
$$(x - y)(x - z) \leqslant 0.$$

Reciproc, avem evident :

$$(x - y)(x - z) \leqslant 0 \text{ și } y \leqslant x \leqslant z \Rightarrow y \leqslant x \leqslant z \Rightarrow A = B.$$

În cazurile 4, 5, 6 se procedează ca în cazurile anterioare. Propoziția din enunț este adevărată oricare ar fi numerele reale x, y, z.

		min (x,y)	min (x,z)	A	max (x,y)	max (x,z)	B
1	$x \leqslant y \leqslant z$	x	x	x	y	z	y
2	$x \leqslant z \leqslant y$	x	x	x	y	z	z
3	$y \leqslant x \leqslant z$	y	x	x	x	z	x
4	$y \leqslant z \leqslant x$	y	z	z	x	x	x
5	$z \leqslant x \leqslant y$	x	z	x	y	x	x
6	$z \leqslant y \leqslant x$	y	z	y	x	x	x

63. *Să se arate că*:

$$A = \{x \in R \mid \sqrt{x} \geqslant 1,\ x \geqslant 0\} = [1, +\infty);$$
$$B = \{x \in R \mid \sqrt{x - 2} > x - 4,\ x \geqslant 2\} = [2, 6).$$

Soluție.

Avem :

$$\sqrt{x} \geqslant 1 \text{ și } x \geqslant 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 \geqslant 1^2 \text{ și } x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1, \text{ deci}$$
$$A = \{x \in R \mid x \geqslant 1\} = [1, +\infty).$$

Pentru a determina mulțimea B vom observa că dacă $x \geqslant 4$, atunci

$\sqrt{x - 2} > x - 4 \Leftrightarrow x - 2 > (x - 4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3 < x < 6$, iar din $x \geqslant 4$ și $3 < x < 6$ rezultă $4 \leqslant x < 6$.

Dacă $2 \leqslant x < 4$, atunci $\sqrt{x-2} \geqslant 0$ și $x - 4 < 0$, astfel că inegalitatea $\sqrt{x-2} > x - 4$ este verificată de oricare număr real x satisfăcînd condițiile $2 \leqslant x < 4$.

Am obținut $B = \{x \in R | 4 \leqslant x < 6\} \cup \{x \in R | 2 \leqslant x < 4\} = [4, 6) \cup [2, 4) = [2, 6)$.

64. *Cîte elemente are mulțimea:*

$$\left\{x \in R | \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2,\ x \geqslant \frac{3}{2}\right\}?$$

Răspuns.

Avem:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3})^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(2x-3)} = 8 - 3x \Leftrightarrow (2\sqrt{(x-1)(2x-3)})^2 =$$
$$= (8-3x)^2 \text{ și } 2 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 28x + 52 = 0 \text{ și}$$
$$2 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ sau } x = 26) \text{ și } 2 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

deci $\left\{x \in R | \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2,\ x \geqslant \frac{3}{2}\right\} = \{2\}$ și deci mulțimea are un singur element.

65. *Dacă x și y sînt numere reale, să se demonstreze că:*

a) $(xy > 0) \wedge (x + y > 0) \Leftrightarrow (x > 0) \wedge (y > 0)$;
b) $(xy > 0) \wedge (x + y < 0) \Leftrightarrow (x < 0) \wedge (y < 0)$;
c) $(x + y > 0) \wedge (x - y > 0) \Rightarrow (x > 0)$. *Implicația reciprocă este adevărată?*

Soluție.

a) Avem:

$(xy > 0) \wedge (x + y > 0) \Leftrightarrow \{[(x > 0) \wedge (y > 0)] \vee$
$\vee [(x < 0) \wedge (y < 0)]\} \wedge (x + y > 0)$ și ținînd seama de distributivitatea conjuncției față de disjuncție, obținem:

$[(x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x + y > 0)] \vee [(x < 0) \wedge (y < 0) \wedge (x + y > 0)]$ deoarece propoziția, $(x < 0) \wedge (y < 0) \wedge (x + y > 0)$ este falsă, rezultă: $(xy > 0) \wedge (x + y > 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x > 0,\ y > 0) \wedge (x + y > 0) \Leftrightarrow (x > 0) \wedge (y > 0)$.

b) Avem:

$(xy > 0) \wedge (x + y < 0) \Leftrightarrow \{[(x > 0) \wedge (y > 0)] \vee$
$\vee [(x < 0) \wedge (y < 0)]\} \wedge (x + y < 0) \Leftrightarrow [(x > 0) \wedge (y > 0) \wedge$
$\wedge (x + y < 0)] \vee [(x < 0) \wedge (y < 0) \wedge (x + y < 0)]$ și deoarece propoziția $(x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x + y < 0)$ este falsă, rezultă:

$(xy > 0) \wedge (x + y < 0) \Leftrightarrow (x < 0) \wedge (y < 0) \wedge (x + y < 0) \Leftrightarrow (x < 0) \wedge (y < 0)$.

c) $(x + y > 0) \wedge (x - y > 0) \Rightarrow (x + y) + (x - y) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$.

Implicația reciprocă este falsă, căci există $x > 0$ și y pentru care nu avem $x + y > 0$ și $x - y > 0$. Într-adevăr, pentru $x = 2$ și $y = 3$ avem $x+y=5>0$ și $x-y=-1<0$.

66. *Fie propozițiile*:

$$P : (x \geqslant 2) \vee (x \leqslant 0);$$
$$Q : (x \geqslant -1) \wedge (x \leqslant 2);$$
$$R : (x \geqslant 1) \wedge (x < 3).$$

Să se determine x astfel ca cele 3 propoziții să fie adevărate simultan.

Soluție.

Trebuie ca „$P \wedge Q \wedge R$“ să fie adevărată.

Avem : $Q \wedge R \Leftrightarrow [(x \geqslant -1) \wedge (x \leqslant 2)] \wedge [(x \geqslant 1) \wedge (x < 3)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x \geqslant -1) \wedge (x \geqslant 1)] \wedge [(x \leqslant 2) \wedge (x < 3)] \Leftrightarrow (x \geqslant 1) \wedge$
$\wedge (x \leqslant 2)$.

$P \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow [(x \geqslant 2) \vee (x \leqslant 0)] \wedge [(x \geqslant 1) \wedge (x \leqslant 2)] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x \geqslant 2) \wedge (x \geqslant 1) \wedge (x \leqslant 2)] \vee [(x \leqslant 0) \wedge (x \geqslant 1) \wedge (x \leqslant 2)]$.

Deoarece propoziția $(x \leqslant 0) \wedge (x \geqslant 1) \wedge (x \leqslant 2)$ este falsă, avem :

$P \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow (x \geqslant 2) \wedge (x \geqslant 1) \wedge (x \leqslant 2) \Leftrightarrow (x \geqslant 2) \wedge (x \leqslant$
$\leqslant 2) \Leftrightarrow x = 2$.

Cele 3 propoziții sînt adevărate simultan numai dacă $x = 2$.

67. *Fie propozițiile P, Q, R, unde $x \in R$, $y \in R$:*

$$P : (x + y = 1) \vee (x \leqslant 0);$$
$$Q : (x = 1) \vee (y = 0);$$
$$R : (x \geqslant y) \vee (x - y = 1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine x și y astfel ca „$P \wedge Q \wedge R$“ să fie propoziție adevărată.

Soluție.

Folosind distributivitatea conjuncției față de disjuncție, și a disjuncției față de conjuncție, avem :

$$P \wedge Q \Leftrightarrow [(x + y = 1) \vee (x \leqslant 0)] \wedge [(x = 1) \vee (y = 0)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(x + y = 1) \wedge (x = 1)] \vee [(x + y = 1) \wedge (y = 0)] \vee$$
$$\vee [(x \leqslant 0) \wedge (x = 1)] \vee [(x \leqslant 0) \wedge (y = 0)] \Leftrightarrow [(x = 1) \wedge$$
$$\wedge (y = 0)] \vee [(x = 1) \wedge (y = 0)] \vee [(x \leqslant 0) \wedge (x = 1)] \vee$$
$$\vee [(x \leqslant 0) \wedge (y = 0)].$$

Ținînd seama că $(x \leqslant 0) \wedge (x = 1)$ este o propoziție falsă, avem :

$$P \wedge Q \Leftrightarrow [(x = 1) \wedge (y = 0)] \vee [(x \leqslant 0) \wedge (y = 0)].$$
$$P \wedge Q \wedge R \Leftrightarrow \{(x = 1) \wedge (y = 0)] \vee [(x \leqslant 0) \wedge (y = 0)]\} \wedge$$
$$\wedge [(x \geqslant y) \vee (x - y = 1)] \Leftrightarrow [(x = 1) \wedge (y = 0) \wedge (x \geqslant y)] \vee$$
$$\vee [(x = 1) \wedge (y = 0) \wedge (x - y = 1)] \vee [(x \leqslant 0) \wedge (y = 0) \wedge$$
$$\wedge (x \geqslant y)] \vee [(x \leqslant 0) \wedge (y = 0) \wedge (x - y = 1)] \Leftrightarrow [(x = 1) \wedge$$
$$\wedge (y = 0)] \vee [(x = 1) \wedge (y = 0)] \vee [(x = 0) \wedge (y = 0)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(x = 1) \wedge (y = 0)] \vee [(x = 0) \wedge (y = 0)].$$

Propoziția „$P \wedge Q \wedge R$“ este deci adevărată, dacă

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

68. *Fie mulțimea E și proprietățile p, q. Care dintre implicațiile următoare sînt adevărate și care sînt false?*

1. *Oricare $x \in E$ are proprietatea $(p \vee q) \Rightarrow$ (oricare $x \in E$ are proprietatea p) $\vee$ (oricare $x \in E$ are proprietatea q).*

2. *(Oricare $x \in E$ are proprietatea p) $\vee$ (oricare $x \in E$ are proprietatea q) $\Rightarrow$ oricare $x \in E$ are proprietatea $(p \vee q)$.*

3. *Oricare $x \in E$ are proprietatea $(p \wedge q) \Rightarrow$ (oricare $x \in E$ are proprietatea p) $\wedge$ (oricare $x \in E$ are proprietatea q).*

4. *(Oricare $x \in E$ are proprietatea p) $\wedge$ (oricare $x \in E$ are proprietatea q) $\Rightarrow$ oricare $x \in E$ are proprietatea $(p \wedge q)$.*

Răspuns.

Implicația 1) este falsă. Considerăm $E = \{-1, 1\}$ și

p : x este pozitiv,

q : x este negativ.

Scanned with OKEN Scanner

Avem : „Oricare $x \in E$ este pozitiv sau negativ“ — propoziție adevărată — dar „(oricare $x \in E$ este pozitiv) $\vee$ $\vee$ (oricare $x \in E$ este negativ)“ este falsă, propozițiile din paranteze fiind ambele false.

Implicațiile (2), (3), (4) sînt adevărate.

69. *Fie p, q două proprietăți care se referă la elementele mulțimii E. Care dintre implicațiile următoare sînt adevărate și care sînt false?*

1) Există $x \in E$ cu proprietatea $(p \wedge q) \Rightarrow$ (există $x \in E$ cu proprietatea p) $\wedge$ (există $x \in E$ cu proprietatea q).

2) (Există $x \in E$ cu proprietatea p) $\wedge$ (există $x \in E$ cu proprietatea q) $\Rightarrow$ există $x \in E$ cu proprietatea $(p \wedge q)$.

3) Există $x \in E$ cu proprietatea $(p \vee q) \Rightarrow$ (există $x \in E$ cu proprietatea p) $\vee$ (există $x \in E$ cu proprietatea q).

4) (Există $x \in E$ cu proprietatea p) $\vee$ (există $x \in E$ cu proprietatea q) $\Rightarrow$ există $x \in E$ cu proprietatea $(p \vee q)$.

Răspuns.

Implicațiile 1), 3), 4) sînt adevărate, iar implicația 2) este falsă.

70. *Să se nege propozițiile următoare în care x și y sînt numere reale :*

$P_1 : x = y$;
$P_2 : x < y$;
$P_3 : x \leqslant y$;
$P_4 : x > y$;
$P_5 : x \geqslant y$.

Răspuns.

non $P_1 : x \neq y$; non $P_2 : x \geqslant y$; non $P_3 : x > y$;
non $P_4 : x \leqslant y$; non $P_5 : x < y$.

71. *Să se nege propoziția $P_1 : x \in A$.*

Răspuns.

non $P_1 : x \notin A$.

72. *Să se nege următoarea propoziție în care D_1 și D_2 sînt drepte situate în același plan :*

$$P : D_1 \parallel D_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

Non $P : D_1 \nparallel D_2 \Leftrightarrow$ „există un punct comun celor două drepte".

73. *Să se nege propozițiile următoare în care x și y sînt numere reale :*

a) $xy = 0$;
b) $x \cdot y > 0$;
c) $x \cdot y \geqslant 0$;
d) $x \cdot y < 0$;
e) $x \cdot y \leqslant 0$.

Răspuns.

a) non $(x \cdot y) = 0 \Leftrightarrow xy \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0) \wedge (y \neq 0)$.

b) non $(x \cdot y) > 0 \Leftrightarrow x \cdot y \leqslant 0 \Leftrightarrow [(x \geqslant 0) \wedge (y \leqslant 0)] \vee$
$\vee [(x \leqslant 0) \wedge (y \geqslant 0)]$.

c) non $(x \cdot y \geqslant 0) \Leftrightarrow x \cdot y < 0 \Leftrightarrow [(x > 0) \wedge (y < 0)] \vee$
$\vee [(x < 0) \wedge (y > 0)]$.

d) non $(xy < 0) \Leftrightarrow x \cdot y \geqslant 0 \Leftrightarrow [(x \geqslant 0) \wedge (y \geqslant 0)] \vee$
$\vee [(x \leqslant 0) \wedge (y \leqslant 0)]$.

e) non $(x \cdot y \leqslant 0) \Leftrightarrow x \cdot y > 0 \Leftrightarrow [(x > 0) \wedge (y > 0)] \vee$
$\vee [(x < 0) \wedge (y < 0)]$.

74. *Să se nege următoarele propoziții, în care x este un număr real :*

a) $x + \frac{1}{2} = 3$; b) $|x| = x$; c) $3x > 4$.

Răspuns.

Avem :

a) $x + \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$;

$$\text{non}\left(x + \frac{1}{2} = 3\right) \Leftrightarrow x + \frac{1}{2} \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \frac{5}{2}.$$

b) $|x| = x \Leftrightarrow x \geqslant 0$; non $(|x| = x) \Leftrightarrow x < 0$;

c) $3x > 4 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$; non $(3x > 4) \Leftrightarrow x \leqslant \frac{4}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

75. *Să se nege propoziţiile următoare, în care literele reprezintă numere reale :*

$$P_1 : (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$
$$P_2 : x^4 - 16 = 0$$

Răspuns.

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0) \vee (x-2=0) \vee (x-3=0) \Leftrightarrow (x=1) \vee (x=2) \vee (x=3)$.

non $P_1 \Leftrightarrow$ non $[(x=1) \vee (x=2) \vee (x=3)] \Leftrightarrow [\text{non}\,(x=1)] \wedge [\text{non}\,(x=2)] \wedge [\text{non}\,(x=3)] \Leftrightarrow (x \neq 1) \wedge (x \neq 2) \wedge (x \neq 3)$.

$x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+4) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4) = 0 \Leftrightarrow (x=2) \vee (x=-2)$.

non $P_2 \Leftrightarrow (x \neq 2) \wedge (x \neq -2)$.

76. *Să se nege propoziţiile următoare în care literele x şi y reprezintă numere reale:*

a) $(x=0) \vee (y=2)$;
b) $(x=3) \wedge (y \neq 4)$;
c) $xy = 0$;
d) $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Răspuns.

a) Avem :

$$\text{non}\,[(x=0) \vee (y=2)] \Leftrightarrow [\text{non}\,(x=0)] \wedge [\text{non}\,(y=2)] \Leftrightarrow (x \neq 0) \wedge (y \neq 2).$$

b) non $[(x=3) \wedge (y \neq 4)] \Leftrightarrow [\text{non}\,(x=3)] \vee [\text{non}\,(y \neq 4)] \Leftrightarrow (x \neq 3) \vee (y=4)$.

c) $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow (x=0) \vee (y=0)$ şi deci
non $(x \cdot y = 0) \Leftrightarrow xy \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0) \wedge (y \neq 0)$.

d) $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x=1) \vee (x=3)$,
non $(x^2 - 4x + 3 = 0) \Leftrightarrow$ non $[(x=1) \vee (x=3)] \Leftrightarrow [\text{non}\,(x=1)] \wedge [\text{non}\,(x=3)] \Leftrightarrow (x \neq 1) \wedge (x \neq 3)$.

Deci $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 1) \wedge (x \neq 3)$.

77. *Să se nege propoziţiile P_1, P_2 precizîndu-se care dintre propoziţiile P_1, P_2 non P_1, non P_2 sînt adevărate şi care sînt false.*

Scanned with OKEN Scanner

P_1: *Inecuația* $x^2 < 4$ *are cel puțin patru soluții numere întregi*;

P_2: *Cel mult nouă numere naturale* n *nu verifică inegalitatea* $2^n > n^3$.

Răspuns.

non P_1: Inecuația $x^2 < 4$ are cel mult trei soluții numere întregi;

P_1 este falsă (singurele numere întregi care verifică $x^2 < 4$ sînt $-1, 0, 1$), non P_1 este adevărată.

non P_2: Cel puțin zece numere naturale n nu verifică inegalitatea $2^n > n^3$;

P_2 este adevărată (inegalitatea $2^n > n^3$ nu este verificată pentru $n = 2,3, \ldots, 9$, dar este adevărată pentru $n = 10, 11, \ldots$).

non P_2 este falsă.

78. *Să se nege propozițiile*:

P_1: *Cel puțin* n *elemente ale mulțimii* E *au proprietatea* P.
P_2: *Cel mult* n *elemente ale mulțimii* E *au proprietatea* P.

Răspuns.

non P_1: cel mult $n - 1$ elemente ale mulțimii E au proprietatea P.

non P_2: cel puțin $n + 1$ elemente ale mulțimii E au proprietatea P.

79. *Să se nege propozițiile*:

P_1: *există un număr natural, pătrat perfect, pentru care cifra unităților este* 4.
P_2: *există un număr natural, pătrat perfect, pentru care cifra unităților este* 3.
P_3: *există un număr prim par.*
P_4: *există două numere prime consecutive.*

Care din propozițiile: P_1, P_2, P_3, P_4, *non* P_1, *non* P_2, *non* P_3 *și non* P_4 *sînt adevărate și care sînt false ?*

Răspuns.

non P_1: oricare număr natural pătrat perfect are cifra unităților diferită de 4.

Scanned with OKEN Scanner

P_1 este adevărată (de exemplu 64 este pătrat perfect și are cifra unităților 4).

non P_1 este falsă.

non P_2: oricare număr natural pătrat perfect are cifra unităților diferită de 3.

P_2 este falsă, non P_2 adevărată.

non P_3: oricare număr prim este impar.

P_3 este adevărată (2 este prim și par), non P_2 este falsă.

non P_4: Oricare două numere prime sînt neconsecutive.

P_4 este adevărată (2, 3 sînt prime consecutive), non P_4 este falsă.

80. *Să se nege propozițiile*:

P_1: *există* $x \in R$ *pentru care* $x^2 - 3x + 4 \neq 0$.
P_2: *oricare ar fi* $x \in R$ *avem* $x^2 - 4 > 0$.
P_3: *oricare ar fi* $x \in R$ *avem* $x^2 + 1 < 0$.
P_4: *oricare ar fi* $x \in R$ *avem* $-x^2 - 4 \leqslant 0$.
P_5: *oricare ar fi* $x \in R$ *avem* $x^2 + 8 \geqslant 0$.

Să se precizeze care dintre propozițiile: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, *non* P_1, *non* P_2, *non* P_3, *non* P_4 *și non* P_5 *sînt adevărate și care sînt false.*

Răspuns.

non P_1: Oricare ar fi $x \in R$ avem $x^2 - 3x + 4 = 0$.

P_1 este adevărată (de exemplu pentru $x = 1$ avem $x^2 - 3x + 4 = 2 \neq 0$); non P_1 este falsă; non P_2: există $x \in R$ astfel ca $x^2 - 4 \leqslant 0$; P_2 este falsă, iar non P_2 adevărată (de exemplu, dacă $x = 1$ atunci $x^2 - 4 = -3 < 0$).

non P_3: există $x \in R$ astfel ca $x^2 + 1 \geqslant 0$; P_3 este falsă, non P_3 adevărată, (dacă, de exemplu, $x = 0$ atunci $x^2 + 1 = 1 \geqslant 0$).

non P_4: există $x \in R$ astfel ca $-x^2 - 4 > 0$; P_4 este o propoziție adevărată, non P_4 falsă.

non P_5: există $x \in R$ astfel ca $x^2 + 8 < 0$; P_5 este adevărată, non P_5 falsă.

Scanned with OKEN Scanner

81. *Să se nege propozițiile:*
P_1: *oricare ar fi numărul natural* a, $a^5 - a$ *se divide la 5.*
P_2: *oricare număr natural de forma* $4k + 3 (k \in N)$, *are divizori primi de aceeași formă.*

Răspuns.
non P_1: există un număr natural a, astfel că $a^5 - a$ nu se divide la 5.
non P_2: există un număr natural de forma $4k + 3$ $(k \in N)$, care nu are divizori primi de aceeași formă.

82. *Să se nege propoziția* P: *oricare număr natural par mai mare decît 2 este suma a două numere prime (Ipoteza lui Goldbach din 1742).*

Răspuns.
non P: Există un număr natural par mai mare ca 2 care nu poate fi scris ca suma a două numere prime.
Observație. Pînă astăzi, nu se știe care dintre propozițiile P sau „non P" este adevărată.

83. *Să se nege propoziția* P: *Oricare număr natural de forma* $2^{(2^k)} + 1 (k \in N)$ *este prim.*

Răspuns.
non P: există un număr natural de forma $2^{(2^k)} + 1$ care nu este prim.*

84. *Să se demonstreze că următoarele propoziții sînt false, arătînd că negația lor este o propoziție adevărată.*
P_1: *oricare ar fi numărul natural compus* n *există un divizor al acestuia cuprins între* $\frac{n}{4}$ *și* $\frac{n}{3}$.

P_2: *oricare ar fi numărul natural compus* n, *există un număr prim cuprins între* n *și* $\frac{4n}{3}$.

---

* Propoziția P a fost enunțată de către Fermat (sec. XVII) și s-a crezut un timp că este adevărată. În 1732 matematicianul L. Euler a arătat că numărul

$$2^{(2^5)} + 1 = 4\,294\,967\,297$$

se divide la 641, ceea ce a dovedit că propoziția P este falsă.

P_3: *oricare ar fi numărul natural compus n există cel puțin un divizor al acestuia, diferit de 1 și mai mic decît* $\sqrt[3]{4n}$.

Răspuns.

non P_1: există un număr natural n compus care nu admite nici un divizor cuprins între $\frac{n}{4}$ și $\frac{n}{3}$. Propoziția non P_1 este adevărată, căci, de exemplu, numărul 36 nu admite nici un divizor cuprins între $\frac{36}{4} = 9$ și $\frac{36}{3} = 12$;

non P_2: Există un număr natural compus n astfel încît nici un număr prim nu este cuprins între n și $\frac{4n}{3}$. non P_2 este adevărată căci dacă $n = 8$, atunci între 8 și $\frac{4 \cdot 8}{3} = 10 + \frac{2}{3}$ nu există nici un număr prim;

non P_3: Există un număr natural compus n care nu admite nici un divizor diferit de 1 și mai mic decît $\sqrt[3]{4n}$; non P_3 este adevărată căci $n = 49$ nu admite nici un divizor diferit de 1 și mai mic decît $\sqrt[3]{4 \cdot 49} = \sqrt[3]{196}$ (număr mai mic decît 6).

85. *Fie mulțimea* $M = \left\{-4, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2, 4\right\}$.

Să se nege propozițiile P_1, P_2, P_3 și să se precizeze care dintre propozițiile P_1, P_2, P_3, non P_1, non P_2, non P_3 sînt adevărate și care false.

P_1: *oricare ar fi $x \in M$, există $y \in M$ astfel încît $x + y = 0$.*

P_2: *oricare ar fi $x \in M$, există $y \in M$ astfel încît $x \cdot y = 1$.*

P_3: *oricare ar fi $x \in M$, există $y \in M$ astfel încît $x \cdot y \leqslant 4x$.*

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

non P_1 : există $x \in M$ astfel încît oricare ar fi $y \in M$, avem $x + y \neq 0$.

P_1 este adevărată, non P_1 falsă.

non P_2 : există $x \in M$, astfel încît oricare ar fi $y \in M$, avem $x \cdot y \neq 1$.

P_2 este falsă, non P_2 adevărată (dacă $x = 0$, oricare ar fi $y \in M$ avem $xy = 0$ deci $xy \neq 1$).

non P_3 : există $x \in M$, astfel încît oricare ar fi $y \in M$ avem $xy > 4x$.

P_3 este adevărată. Într-adevăr, oricare ar fi $x \in M$ și $x > 0$, avem $xy \leqslant 4x \Leftrightarrow y \leqslant 4$, relație verificată de numerele din M.

Dacă $x = 0$, evident există $y \in M$, astfel ca $0 \cdot y \leqslant 0$.

Dacă $x \in M$ și $x < 0$, atunci $xy \leqslant 4x \Leftrightarrow y \geqslant 4$, relație verificată de $y = 4$.

P_3 fiind o propoziție adevărată, non P_3 este falsă.

86. *Să se nege propoziția :*

P : *Există un număr natural n, astfel încît oricare număr natural x, $n < x < 2n$, este prim.*

Răspuns.

non P : Oricare ar fi numărul natural n, există un număr natural x, $n < x < 2n$ care nu este prim. P este o propoziție adevărată, deoarece pentru $n = 2$, numerele naturale cuprinse între 2 și 4 sînt prime (3 este prim).

87. *Să se nege propozițiile :*

P_1 : *oricare ar fi numerele raționale r_1 și r_2 $(r_1 < r_2)$ există un număr rațional r cuprins între r_1 și r_2.*

P_2 : *oricare ar fi $y \in R$ există $x \in R$ astfel încît $y = x + 3$.*

P_3 : *oricare ar fi $y \in R$ există $x \in R$, astfel încît $y = x^2 + 1$.*

Să se precizeze care dintre propozițiile P_1, P_2, P_3, non P_1, non P_2 și non P_3 sînt adevărate și care sînt false ?

Răspuns.

non P_1 : există două numere raționale r_1 și r_2 $(r_1 < r_2)$ astfel încît orice număr rațional nu este cuprins între r_1 și r_2.

Scanned with OKEN Scanner

P_1 este adevărată, căci de exemplu, numărul rațional $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ este cuprins între r_1 și r_2; non P_1 este falsă.

non P_2: există $y \in R$, astfel încît oricare ar fi $x \in R$, avem $y \neq x + 3$.

P_2 este adevărată, căci oricare ar fi $y \in R$ există $x \in R$ și anume $x = y - 3$ astfel încît $y = x + 3$; non P_2 este falsă.

non P_3: există $y \in R$ astfel încît, oricare ar fi $x \in R$, avem $y \neq x^2 + 1$.

non P_3 este adevărată, căci de exemplu, dacă $y = 0$ egalitatea $y = x^2 + 1$ devine $x^2 + 1 = 0$, care este falsă oricare ar fi $x \in R$.

P_3 este falsă.

88. *Să se nege propozițiile*:

P_1: *oricare ar fi numerele reale* x, y, z *avem* $(x + y) + z = x + (y + z)$.

P_2: *Oricare ar fi numerele reale* x, y, z *avem*:

$$(xy)\,z = x(yz);$$

P_3: *Oricare ar fi numerele reale* x, y, z *avem*:

$$(x - y) - z = x - (y - z);$$

P_4: *Oricare ar fi numerele reale* x, y, z $(y \neq 0,\ z \neq 0)$, *avem*

$$(x : y) : z = x : (y : z);$$

P_5: *Oricare ar fi numerele reale pozitive* x, y, z *avem* $(x^y)^z = x^{(y^z)}$.

Să se precizeze care dintre propozițiile P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, non P_1, non P_2, non P_3, non P_4, non P_5 *este adevărată și care este falsă.*

Răspuns.

non P_1: există trei numere reale x, y, z astfel încît:

$$(x + y) + z \neq x + (y + z).$$

P_1 este adevărată.

non P_2: există trei numere reale x, y, z astfel încît $(xy)z \neq x(yz)$; P_2 este adevărată.

non P_3: există trei numere reale x, y, z astfel încît

$$(x - y) - z \neq x - (y - z).$$

non P_3 este adevărată. Într-adevăr, de exemplu:

$$(8 - 6) - 2 \neq 8 - (6 - 2).$$

non P_4: există trei numere reale x, y, z astfel încît $(x : y) : z \neq x : (y : z)$; non P_4 este adevărată, căci, de exemplu $(16 : 8) : 2 \neq 16 : (8 : 2)$.

non P_5: există trei numere reale pozitive x, y, z astfel încît $(x^y)^z \neq x^{(y^z)}$; non P_5 este adevărată, căci, de exemplu $(2^1)^2 \neq 2^{(1^2)}$.

89. *Fie mulțimea* $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Să se nege propozițiile:

P_1: *oricare ar fi* $x \in M$, *există* $y \in M$ *astfel încît*

$$x + y = 0$$

P_2: *oricare ar fi* $x \in M$, *există* $y \in M$, *astfel încît*

$$x + y \in M;$$

P_3: *oricare ar fi* $x \in M$, *există* $y \in M$ *astfel încît*

$$x \cdot y \in M;$$

Să se precizeze care dintre propozițiile P_1, P_2, P_3, *non* P_1, *non* P_2 *și non* P_3 *sînt adevărate și care false.*

Răspuns.

non P_1: există $x \in M$, astfel încît oricare ar fi $y \in M$ avem $x + y \neq 0$. P_1 este adevărată.

non P_2: există $x \in M$, astfel că oricare ar fi $y \in M$ avem $x + y \notin M$. P_2 este adevărată.

non P_3: există $x \in M$, astfel încît oricare ar fi $y \in M$ avem $x \cdot y \notin M$. P_3 este adevărată.

90. *Să se nege propozițiile:*

P_1: *oricare ar fi numerele reale* x *și* y *avem*

$$x + y = y + x;$$

Scanned with OKEN Scanner

P_2: *oricare ar fi numerele reale* x *și* y *avem*

$$x \cdot y = y \cdot x;$$

P_3: *oricare ar fi* x *și* y $(x \neq 0,\ y \neq 0)$ *avem*

$$x : y = y : x;$$

P_4: *oricare ar fi numerele reale pozitive* x *și* y *avem*

$$x^y = y^x.$$

Care dintre propozițiile P_1, P_2, P_3, P_4, *non* P_1, *non* P_2, *non* P_3 *și non* P_4 *sînt adevărate și care sînt false ?*

Răspuns.

non P_1: există două numere reale x și y astfel încît $x + y \neq y + x$. P_1 este adevărată.

non P_2: există două numere reale x și y astfel încît $xy \neq yx$; P_2 este adevărată

non P_3: există $x \neq 0$ și $y \neq 0$ astfel încît $x : y \neq y : x$.

non P_3: este adevărată, căci de exemplu $4 : 2 \neq 2 : 4$

non P_4: există două numere reale pozitive x și y astfel încît $x^y \neq y^x$; non P_4 este adevărată căci, de exemplu, $2^3 \neq 3^2$.

91. *Să se nege propoziția:*

P: *există în plan o mulțime de puncte astfel încît orice dreaptă din plan are comun cu mulțimea două puncte și numai două.*

Răspuns.

non P: Orice mulțime de puncte din plan are proprietatea că există o dreaptă care nu are nici un punct comun cu mulțimea sau are un punct comun cu mulțimea, sau are mai mult de 2 puncte comune cu mulțimea.

Observație. S-a demonstrat de către Mazurkiewicz, în 1914, că propoziția P este adevărată.

92. *Să se nege propozițiile următoare și să se spună care negații sînt false și care adevărate.*

P_1: *„Oricare ar fi dreptele paralele* d_1, d_2 *și oricare ar fi secanta* d, *unghiurile corespondente formate de aceste drepte sînt egale“.*

P_2: *„Oricare ar fi dreptele* d_1, d_2 *și* d *astfel ca* d *să formeze cu* d_1 *și* d_2 *două unghiuri alterne interne egale, dreptele* d_1 *și* d_2 *sînt paralele“.*

P_3: „*Există o dreaptă* d_1 *care să treacă printr-un punct dat* A, *exterior unei drepte date* d_2 *și care să fie paralelă cu* d_2“.

P_4: „*Oricare dreaptă care taie o dreaptă* d_1, *va tăia și paralela* d_2 *la* d_1“.

P_5: „*Oricare ar fi dreapta* d_1, *există o dreaptă* d_2 *perpendiculară pe* d_1“.

P_6: „*Oricare ar fi dreapta paralelă cu două plane secante, ea este paralelă cu intersecția acestor plane*“.

P_7: „*Dacă oricare plan care taie dreapta* d, *taie și dreapta* d' *atunci dreptele* d, d' *sînt paralele*“.

P_8: „*Oricare ar fi dreapta* d *perpendiculară pe planul* π, *atunci orice plan care conține dreapta* d *este perpendicular pe planul* π.

P_9: „*Oricare ar fi două drepte în spațiu* d_1 *și* d_2 *există un plan care conține* d_1 *și este paralel cu* d_2.

P_{10}: „*Oricare ar fi două drepte neconcurente, există o dreaptă care este perpendiculară pe amîndouă și le intersectează pe amîndouă*“.

P_{11}: „*Oricare ar fi dreptele* d_1 *și* d_2 *există un plan pe care proiecțiile ortogonale ale celor două drepte sînt paralele*“.

P_{12}: „*Oricare ar fi planul* π *și oricare ar fi dreapta* d *conținută în planul* π, *există un punct situat pe dreapta* d *și exterior planului*“.

P_{13}: „*Oricare două plane sînt paralele sau au puncte comune.*“

P_{14}: „*În oricare triunghi segmentul care unește mijloacele a două laturi este paralel cu a treia latură și egal cu jumătatea ei*“.

Răspuns.

non P_1: „ există două drepte paralele d_1 și d_2 și o secantă d care formează cu d_1 și d_2 unghiuri corespondente neegale“. Această propoziție este falsă.

non P_2: „există dreptele d_1, d_2, și d astfel ca d să formeze cu d_1 și d_2 două unghiuri alterne interne egale și dreptele d_1 și d_2 să nu fie paralele. Propoziție falsă.

non P_3: „oricare dreaptă care trece printr-un punct A exterior unei drepte date d_2, nu este paralelă cu d_2“. Propoziție falsă.

Scanned with OKEN Scanner

non P_4 : „există o dreaptă care taie o dreaptă d_1 și nu taie paralela d_2 la d_1“. Propoziție falsă.

non P_5 : „există o dreaptă d_1 astfel că orice dreaptă d_2 nu este perpendiculară pe d_1“. Propoziție falsă.

non P_6 : „există o dreaptă paralelă cu două plane secante, care nu este paralelă cu intersecția acestora“. Propoziție falsă.

non P_7 : „Există două drepte neparalele d, d' astfel că oricare plan care taie dreapta d taie și dreapta d'“. Propoziție falsă.

non P_8 : „există o perpendiculară pe planul π și există un plan care conține această perpendiculară și nu este perpendicular pe π“. Propoziție falsă.

non P_9 : „există două drepte în spațiu d_1 și d_2, astfel că oricare plan are proprietatea că sau nu conține d_1 sau nu este paralel cu d_2“. Propoziție adevărată (d_1 și d_2 concurente).

non P_{10} : „există două drepte neconcurente astfel că oricare dreaptă nu este perpendiculară pe ambele drepte sau nu le intersectează pe amîndouă“. Propoziție falsă.

non P_{11} : „există dreptele d_1 și d_2 astfel că proiecțiile lor ortogonale pe oricare plan nu sînt paralele“. Propoziție adevărată. Într-adevăr, dacă d_1 și d_2 sînt concurente, proiecțiile lor vor avea cel puțin un punct comun.

non P_{12} : „există un plan și o dreaptă d a planului, astfel că oricare punct nu este pe dreaptă sau este în plan“. Propoziție adevărată.

non P_{13} : „există două plane neparalele și care n-au puncte comune“. Propoziție falsă.

non P_{14} : „există un triunghi în care segmentul care unește mijloacele a două laturi nu este paralel cu a treia, sau nu este egal cu jumătatea ei“. Propoziție falsă.

93. *Să se nege propozițiile următoare și să se spună care negații sînt adevărate și care sînt false.*

P_1 : *„Oricare unghi exterior al unui triunghi este mai mare decît oricare dintre unghiurile interioare neadiacente cu el“.*

P_2 : *„În oricare triunghi, unei laturi mai mari i se opune un unghi mai mare“.*

P_3 : *„În oricare triunghi, notînd cu a, b, c laturile, avem:*

$$|b - c| < a < b + c“.$$

Scanned with OKEN Scanner

P_4: *„În oricare dreptunghi, diagonalele sînt egale“.*

Răspuns.

non P_1: „există un unghi exterior al unui triunghi și un unghi interior neadiacent cu el mai mare sau egal cu unghiul exterior“. Propoziție falsă.

non P_2: „există un triunghi în care unei laturi mai mari i se opune un unghi mai mic“; propoziție falsă.

non P_3: „există un triunghi în care laturile fiind a, b, c avem:

$$a \geqslant b + c \text{ sau } |b - c| \geqslant a\text{“}$$

; propoziție falsă.

non P_4: „există un dreptunghi cu diagonale neegale“; propoziție falsă.

94. *Să se nege propozițiile următoare și să se spună care negații sînt false și care sînt adevărate.*

P_1: *există trei puncte care nu sînt pe aceeași dreaptă.*

P_2: *există în spațiu patru puncte care nu sînt în același plan.*

P_3: *există o dreaptă d, paralelă cu intersecția a două plane secante α și β astfel că d nu este paralelă cu α sau nu este paralelă cu β.*

P_4: *există patru puncte în spațiu și un număr real $a > 0$, astfel că distanța între oricare două puncte din cele 4 să fie egală cu a.*

P_5: *există o piramidă patrulateră regulată, ale cărei fețe laterale sînt triunghiuri echilaterale.*

P_6: *oricare dreaptă perpendiculară pe două drepte concurente ale unui plan, este perpendiculară pe oricare dreaptă a acelui plan.*

P_7: *oricare piramidă regulată avînd ca fețe laterale triunghiuri echilaterale are ca bază un triunghi echilateral, sau un pătrat sau un pentagon regulat.*

Răspuns.

non P_1: oricare trei puncte sînt coliniare; propoziție falsă.

non P_2: oricare patru puncte din spațiu sînt în același plan; propoziție falsă.

non P_3: oricare dreaptă d, paralelă cu intersecția a două plane α și β, este paralelă și cu α și cu β; propoziție

Scanned with OKEN Scanner

falsă (prin dreaptă paralelă cu un plan înțelegem o dreaptă care nu are nici un punct comun cu planul).

non P_4: oricare ar fi patru puncte în spațiu și numărul real $a > 0$, există două puncte din cele patru astfel că distanța dintre ele este diferită de a; propoziție falsă.

non P_5: oricare piramidă patrulateră regulată are cel puțin o față laterală care nu este triunghi echilateral; propoziție falsă.

non P_6: există o dreaptă d perpendiculară pe două drepte concurente ale unui plan și există o dreaptă d' a planului, astfel că d nu este perpendiculară pe d'; propoziție falsă.

non P_7: există o piramidă regulată avînd ca fețe laterale triunghiuri echilaterale, iar ca bază un poligon care nu este nici triunghi echilateral, nici pătrat și nici pentagon regulat; propoziție falsă.

95. *Fie propozițiile:*

P_1: *Punctele A, B, C nu sînt coliniare.*
P_2: *Unghiul BAC este drept.*
P_3: *Punctul D este situat pe dreapta BC* ($D \in BC$).
P_4: *Dreapta AD este perpendiculară pe dreapta BC*, $AD \perp BC$.
P_5: $AD^2 = DB \cdot DC$.

Care dintre implicațiile următoare sînt adevărate și care sînt false?

1) $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4) \Rightarrow P_5$;
2) $(P_1 \wedge P_3 \wedge P_4 \wedge P_5) \Rightarrow P_2$;
3) $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_5) \Rightarrow P_4$;
4) $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_4 \wedge P_5) \Rightarrow P_3$.

Răspuns.

Prima implicație este teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic, deci o propoziție adevărată.

Să arătăm că a doua implicație este falsă.

Cu notațiile din figura 2, folosind teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice formate, avem: $(b^2 = y^2 + h^2,\ c^2 = x^2 + h^2)$ $b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + 2h^2$ dar $h^2 = xy$ (P_5), deci $b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă D este între B și C rezultă $b^2 + c^2 = a^2$ și deci $\widehat{BAC} = 90°$. (Reciproca teoremei lui Pitagora).

Dacă D nu este între B și C, atunci $x + y \neq a$, $b^2 + c^2 \neq a^2$ și triunghiul ABC nu este dreptunghic în A. Implicația 2) este deci falsă.

Implicația 3) este falsă. Ea se poate exprima astfel:

„Oricare ar fi punctele A, B, C, D ale planului astfel ca propozițiile P_1, P_2, P_3, P_5 să fie adevărate, propoziția P_4 este adevărată". Vom arăta că negația acestei propoziții este adevărată, de unde va rezulta că propoziția 3) este falsă. Negarea se face astfel:

„Există patru puncte A, B, C, D pentru care P_1, P_2, P_3, P_5 sînt adevărate și P_4 este falsă".

Luînd D în mijlocul segmentului BC, avem $AD = BD = DC$, $AD^2 = DB \cdot DC$, fără ca $AD \perp BC$.

Și ultima implicație este falsă. Ca și mai înainte, vom arăta că negația ei este adevărată, adică vom arăta că există patru puncte A, B, C, D pentru care P_1, P_2, P_4, P_5 sînt adevărate și P_3 falsă, adică vom arăta că există un triunghi ABC, dreptunghic în A și un punct D pe înălțimea dusă din A, D diferit de piciorul înălțimii, astfel ca $AD^2 = BD \cdot DC$.

Triunghiul dreptunghic căutat este cel cu un unghi de 15°, iar D este simetricul lui A față de BC.

Într-adevăr, O fiind mijlocul ipotenuzei BC (vezi fig. 3), triunghiul ADO este echilateral și deci $AD^2 = AO^2 =$

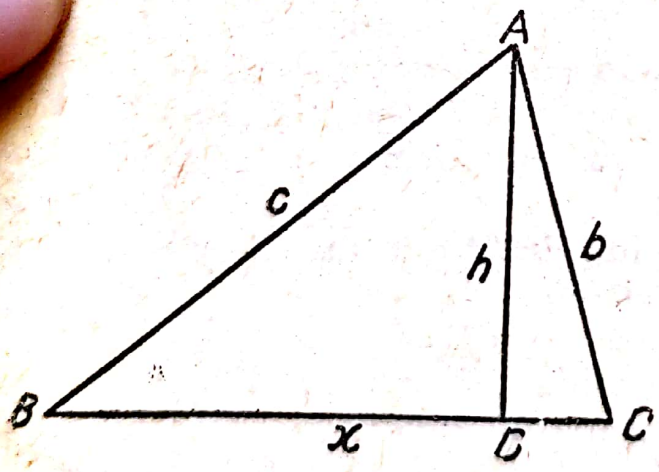


Fig. 2

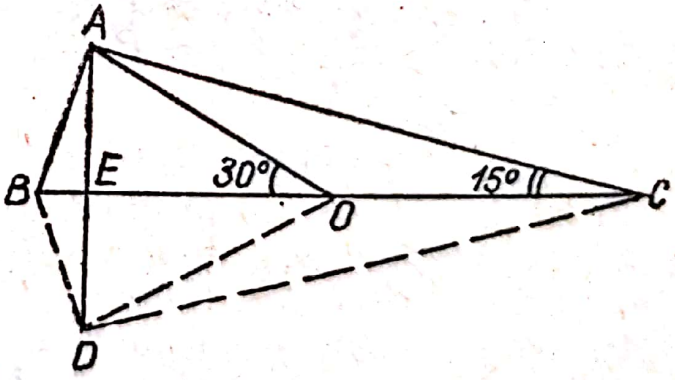


Fig. 3

Scanned with OKEN Scanner

$= \left(\frac{BC}{2}\right)^2$, iar $DB \cdot DC = AB \cdot AC = BC \cdot AE = BC \cdot \frac{AO}{2} = BC \cdot \frac{BC}{4} = \left(\frac{BC}{2}\right)^2$, rezultă $AD^2 = DB \cdot DC$.

96. *Un șir* $(a_n)_{n \in N^*}$ *de numere reale se numește convergent dacă există un număr „a" astfel încît pentru oricare* $\varepsilon > 0$, *există* $N(\varepsilon)$ *cu proprietatea* $|a_n - a| < \varepsilon$, oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$.

Un șir de numere care nu este convergent se numește divergent.

Să se precizeze cînd un șir de numere este divergent, negîndu-se proprietatea prin care a fost definit șirul convergent.

Notă. În acest exercițiu nu interesează semnificația precisă a termenilor care intervin, ci numai tehnica de negare.

Răspuns.

Un șir $(a_n)_{n \in N^*}$ de numere reale este divergent dacă oricare ar fi „a" există $\varepsilon > 0$ astfel încît oricare ar fi N avem $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$, cel puțin pentru un $n > N$.

97. *O funcție* $f : E \to R$ $(E \subset R)$ *este continuă într-un punct* $x_0 \in E$, *dacă oricare ar fi* $\varepsilon > 0$, *există* $\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încît oricare ar fi* $x \in E$ *cu proprietatea* $|x - x_0| < \delta$, *avem* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

O funcție $f : E \to R (E \subset R)$ *se numește discontinuă în punctul* $x_0 \in E$ *dacă nu este continuă în* x_0. *Să se precizeze cînd* $f : E \to R$ *este discontinuă într-un punct* x_0 *negîndu-se proprietatea prin care s-a definit continuitatea.*

Notă. În acest exercițiu nu interesează semnificația precisă a termenilor care intervin, ci numai tehnica de negare.

Răspuns.

O funcție $f : E \to R$ $(E \subset R)$ este discontinuă într-un punct $x_0 \in E$ dacă există $\varepsilon > 0$, astfel încît oricare ar fi $\delta > 0$, există un $x \in E$ cu proprietatea:

$$|x - x_0| < \delta \text{ și } |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

98. *Fie mulțimile* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. $B = \{1, 3, 6, 7\}$, $C = \{1, 3\}$ *și* $D = \{7, 3, 1, 6\}$. *Care dintre următoarele afirmații sînt adevărate:*

Scanned with OKEN Scanner

a) $A = B$, *b*) $B = D$, *c*) $B \subset A$, *d*) $A \subset B$, *e*) $C \subset B$, *f*) $A \subset A$, *g*) $B \subset D$, *h*) $D \subset B$.

Răspuns. Afirmațiile b), c), e), f), g), h) sînt adevărate, iar celelalte sînt false.

99. *Care dintre afirmațiile următoare sînt adevărate și care sînt false.*

a) $a = \{a\}$;
b) $a \neq \{a\}$;
c) $a \in \{a\}$;
d) $\{a\} \subset \{a\}$;
e) $\varnothing \subset \varnothing$;
f) $\varnothing \in \varnothing$;
g) $\varnothing \in \{\varnothing\}$;
h) $\varnothing = \{0\}$;
i) $\varnothing \in \{0\}$.

Răspuns.

Afirmațiile b), c), d), e), g) sînt adevărate, celelalte sînt false.

100. *Să se determine mulțimea X care satisface simultan condițiile*

1. $X \subset \{a, b, c, d\}$;
2. $X \subset \{a, c, e\}$
3. $\{a, c\} \subset X$.

Soluție.

Elementele mulțimii X trebuie căutate printre elementele mulțimii $\{a, b, c, d\}$ (condiția 1); din condiția 3) rezultă că a și c aparțin lui X; $b \notin X$ căci dacă $b \in X$, cum $X \subset \{a, c, e\}$ (condiția 2) ar rezulta $b \in \{a, c, e\}$, ceea ce este fals; la fel se arată că $d \notin X$ și deci $X = \{a, c\}$.

101. *Să se determine mulțimea X, știind că $\{1, 3, 5, 7\}$ și $\{3, 5, 9\}$ sînt submulțimi ale lui X și $X \subset \{1, 3, 5, 7, 9\}$.*

Soluție.

Din $\{1, 3, 5, 7\} \subset X$ și $\{3, 5, 9\} \subset X$ rezultă $\{1, 3, 5, 7\} \cup \{3, 5, 9\} \subset X$, adică $\{1, 3, 5, 7, 9\} \subset X$; deoarece avem și $X \subset \{1, 3, 5, 7, 9\}$, rezultă $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

102. *Să se scrie submulțimile mulțimilor: $E_1 = \{a_1\}$, $E_2 = \{a_1, a_2\}$, $E_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $E_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Cîte submulțimi are o mulțime cu n elemente?*

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

Submulțimile mulțimii E_1 sînt : $\varnothing$, $\{a_1\}$, deci 2^1 submulțimi. Submulțimile mulțimii E_2 sînt : $\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1, a_2\}$, deci 2^2 submulțimi. În mod analog se constată că mulțimea E_3 are 2^3 submulțimi, iar mulțimea E_4 are 2^4 submulțimi. Se va demonstra prin inducție completă că o mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi (vezi manualul de algebră anul II).

103. *Fie mulțimea* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Să se scrie toate submulțimile* X *ale lui* A *cu proprietatea ca* $\{1, 2, 3\} \subset X$.

Răspuns. Avem : $X = \{1, 2, 3\}$ sau $X = \{1, 2, 3, 4\}$ sau $X = \{1, 2, 3, 5\}$, sau $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

104. *Cîte submulțimi cu 4 elemente ale mulțimii* $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 40\}$ *există ? Să se scrie trei asemenea submulțimi.*

Răspuns.

Avem C_{40}^4 submulțimi cu patru elemente.

Exemple : $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{8, 32, 39, 40\}$, $\{21, 28, 32, 37\}$.

105. *Se dă* $M = \{3, 5, 7, 9, 11\}$. *Să se găsească mulțimile:*

a) $A = \{x \in M | x$ *este număr par*$\}$;

b) $B = \{x \in M |$ *există* $y \in M$, *astfel că împărțind* x *la* y *să obținem restul 6*$\}$.

c) $C = \{x \in M | x^2 - 1 = 0\}$.

Răspuns.

a) Elementele mulțimii M sînt numere impare, deci propoziția „x este număr par“ este falsă pentru orice x din M și deci $A = \varnothing$.

b) Împărțind fiecare număr din M cu oricare număr din M nu obținem restul 6, de exemplu împărțind 11 pe rînd cu 3, 5, 7, 9 și 11 obținem respectiv resturile 2, 1, 4, 2, 0 etc.

Propoziția „există $y \in M$, astfel că împărțind x la y obținem restul 6“ este falsă pentru orice $x \in M$. Rezultă $B = \varnothing$.

c) Rădăcinile ecuației $x^2 - 1 = 0$ fiind -1 și 1, oricare ar fi $x \in M$ avem $x^2 - 1 \neq 0$ adică propoziția „$x^2 - 1 = 0$“ este falsă oricare ar fi $x \in M$ și deci $C = \varnothing$.

Scanned with OKEN Scanner

106. *Se dau punctele A și B în planul π. Să se determine mulțimea:*

$$\{M \in \pi \mid |MA - MB| > AB\}.$$

Soluție.

Inegalitatea $|MA - MB| > AB$ este falsă oricare ar fi punctul M.

Într-adevăr, pentru punctele M care nu sînt situate pe dreapta AB, avem $|MA - MB| < AB$ (din triunghiul MAB); dacă M este pe segmentul AB, M diferit de A și B, atunci $|MA - MB| < MA + MB = AB$; în sfîrșit dacă M este în A, B sau se găsește pe dreapta AB, în afara segmentului AB, avem $|MA - MB| = AB$. Rezultă că pentru nici un punct M al planului π nu avem $|MA - MB| > AB$ și deci

$$\{M \in \pi \parallel |MA - MB| > AB\} = \varnothing.$$

107. *Fie $M = \{2, 3, 4, 5, 6, 61\}$. Să se scrie mulțimile A, B, C, D, E definite mai jos, indicîndu-se toate elementele lor.*

$A = \{x \in M \mid 2x \in M\}$;

$B = \{x \in M \mid$ *Există* $y \in M$ *astfel ca* $x + y = 6\}$;

$C = \{x \in M \mid$ *Oricare ar fi* $y \in M$ *și* $y \neq x$, *împărțind* x *la* y *obținem restul 1*$\}$.

$D = \{x \in M \mid x - 1 \in M$ *și* $x + 1 \in M\}$;

$E = \{x \in M \mid x$ *este par sau multiplu de 3*$\}$.

Răspuns.

$$A = \{2, 3\},\ B = \{2, 3, 4\},\ C = \{61\},\ D = \{3, 4, 5\},\ E = \{2, 3, 4, 6\}.$$

108. *Fie* $M = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$ *și* $N = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$.

Să se scrie mulțimile A, B, C, D, E definite mai jos, indicîndu-se explicit toate elementele.

$A = \{x \in M \mid$ *Există* $y \in N$ *astfel ca* $x \leqslant y\}$;

$B = \{x \in M \mid x$ *are cel puțin un divizor* $\neq 1$, *situat în* $N\}$;

$C = \{x \in N \mid x$ *are cel mult un divizor* $\neq 1$ *conținut în* $M\}$;

$D = \{x \in N \mid x$ *este par și* $x \notin M\}$;

$E = \{x \in N \mid x \in M$ *sau* $2x \in M\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

$A = \{1, 3, 4, 5, 8\}$, $B = \{3, 4, 5, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $D = \{2\}$, $E = \{1, 2, 3, 5, 8\}$.

109. *Fie* $M = \left\{x \in Q \mid x = \frac{7n-4}{n+3},\ n=1, 2, 3, 4, \ldots\right\}$.

a) *Să se determine submulțimile:*

$A = \{x \in M \mid x \leqslant 2\}$;
$B = \{x \in M \mid x < 7\}$;
$C = \{x \in M \mid x$ este întreg$\}$.

b) *Cîte elemente are mulțimea* $D = \left\{x \in M \mid x \leqslant \frac{699}{100}\right\}$?

Soluție.

a) Pentru a determina elementele lui M care nu sînt mai mari ca 2 va trebui să găsim numerele naturale n pentru care $\frac{7n-4}{n+3} \leqslant 2$. Avem $\frac{7n-4}{n+3} \leqslant 2 \Leftrightarrow 7n - 4 \leqslant 2(n+3) \Leftrightarrow 5n \leqslant 10 \Leftrightarrow n \leqslant 2$.

Pentru $n=1$ obținem $\frac{7n-4}{n+3} = \frac{3}{4}$, iar pentru $n = 2$, $\frac{7n-4}{n+3} = 2$ și deci $A = \left\{\frac{3}{4}, 2\right\}$.

Elementele mulțimii B se determină în mod asemănător: $\frac{7n-4}{n+3} < 7 \Leftrightarrow 7n - 4 < 7n+21 \Leftrightarrow -4 < 21$ inegalitate adevărată oricare ar fi n natural și deci $B = M$.

Să determinăm și mulțimea C. Să găsim n astfel ca $\frac{7n-4}{n+3}$ să fie întreg. Avem: $\frac{7n-4}{n+3} = 7 - \frac{25}{n+3}$ și deci $n+3$ trebuie să dividă pe 25. Obținem $n = 2$, $\frac{7n-4}{n+3} = 2$; $n = 22$ $\frac{7n-4}{n+3} = 6$ și deci $C = \{2, 6\}$.

b) Mai întîi vom observa că pentru valori diferite ale lui n, fracția $\frac{7n-4}{n+3}$ ia valori diferite (într-adevăr, din $\frac{7\alpha-4}{\alpha+3} = \frac{7\beta-4}{\beta+3}$ rezultă, după efectuarea calculelor $\alpha = \beta$ și deci $\alpha \neq \beta \Rightarrow \frac{7\alpha-4}{\alpha+3} \neq \frac{7\beta-4}{\beta+3}$).

Pentru elementele mulțimii D avem $\frac{7n-4}{n+3} \leqslant \frac{699}{100}$, de unde obținem $n \leqslant 2\,497$. Ținînd seama și de observarea de mai înainte, rezultă că mulțimea D are 2 497 elemente.

110. *Fie* $M = \left\{x \in Q \mid x = \frac{n+7}{n+1},\ n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$.

Să se determine submulțimea $A = \{x \in M \mid x \text{ este întreg}\}$.

Răspuns.

Deoarece $\frac{n+7}{n+1} = \frac{n+1+6}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} + \frac{6}{n+1} = 1 + \frac{6}{n+1}$, $\frac{n+7}{n+1}$ este întreg numai cînd $\frac{6}{n+1}$ este întreg, ceea ce are loc numai dacă $n+1$ este un divizor al lui 6 ; n fiind număr natural, rezultă pentru $n+1$ valorile : 2 ; 3 ; 6.

Se obține $A = \{2, 3, 4\}$.

111. *Fie* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) *Cîte submulțimi ale lui A conțin pe 1 ?*

b) *Cîte submulțimi cu 3 elemente conțin pe 1 ?*

c) *Cîte submulțimi cu 4 elemente conțin pe 1 ; Dar pe 1 și 2 ;*

d) *Dacă* $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, *cîte submulțimi X ale lui M îndeplinesc condițiile: X are m elemente* $(m \leqslant n)$ *și* $\{1, 2, 3, \ldots, p\} \subset X$ $(p \leqslant m)$ *?*

Rezolvare.

a) Pentru a obține toate părțile lui A care conțin pe 1, este suficient să adăugăm elementul 1 fiecărei submulțimi a mulțimii $\{2, 3, 4, 5\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\{2, 3, 4, 5\}$ are $2^4 = 16$ submulțimi, rezultă că 16 submulțimi ale lui A conțin pe 1.

b) Submulțimile lui A având cîte trei elemente printre care și 1, se obțin adăugînd elementul 1 fiecărei submulțimi de două elemente a mulțimii $\{2, 3, 4, 5\}$. Cum $\{2, 3, 4, 5\}$ are $C_4^2 = 6$ submulțimi cu cîte 2 elemente, rezultă că există 6 submulțimi ale lui A, fiecare având trei elemente printre care și 1.

c) Procedînd ca la punctul precedent, obținem $C_4^3 = 4$ părți ale lui A, având fiecare cîte 4 elemente printre care și 1.

Există $C_3^2 = 3$ submulțimi ale lui A care au cîte 4 elemente și conțin pe 1 și pe 2.

d) Fie $n > p$. Trebuie să găsim numărul părților lui M, având cîte m elemente, printre care p elemente date : $1, 2, 3, \ldots, p$.

Pentru aceasta este destul să scriem toate părțile mulțimii $\{p + 1, p + 2, \ldots, n\}$ care au cîte $m - p$ elemente și apoi să adăugăm la fiecare submulțime astfel obținută elementele $1, 2, 3, \ldots, p$. Deoarece mulțimea $\{p + 1, p + 2, \ldots, n\}$ are $n - p$ elemente și deci C_{n-p}^{m-p} submulțimi cu cîte $m - p$ elemente, rezultă că numărul submulțimilor X ale lui M, fiecare submulțime avînd m elemente și conținînd elementele $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$, este C_{n-p}^{m-p}.

Dacă $n = p$, atunci $m = n$ și singura mulțime X satisfăcînd condițiile din enunț este M.

112. *Să se determine mulțimile* :

a) $\{x \in Z \mid$ *există* $y \in Z$ *astfel ca* $x^2 + 2 = y^2\}$;

b) $\{x \in N^* \mid 3x^2 + 6x + 2$ *este multiplu de* $3\}$.

Răspuns.

a) Avem : $x^2 + 2 = y^2 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 2$; x și y fiind numere întregi, această egalitate este adevărată dacă și numai dacă :

$$\begin{cases} y - x = -1 \\ y + x = -2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y - x = -2 \\ y + x = -1 \end{cases}$$

$$\text{sau } \begin{cases} y - x = 2 \\ y + x = 1, \end{cases}$$

adică rezolvînd sistemele,

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{sau} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Deoarece nu există numere întregi x, y care să verifice aceste egalități, rezultă că mulțimea din enunț este vidă.

b) Mulțimea este vidă. Într-adevăr, nu există numere naturale x pentru care $3x^2 + 6x + 2$ să fie multiplu de trei, căci dacă ar exista, atunci deoarece $3x^2$ și $6x$ sînt multipli de trei, ca și $3x^2 + 6x + 2$ ar trebui ca 2 să fie multiplu de trei, ceea ce este absurd.

113. *Să se demonstreze egalitățile:*

a) $\{x \in Z | x^2 + 5x + 10$ *este pătratul unui număr natural*$\} = \{-6, -3, -2, 1\}$;

b) $\{x \in Z |$ *Există n natural astfel ca* $x^2 + 3x - 3 = n^2\} = \{-7, -4, 1, 4\}$;

c) $\{x \in Z | x^2 + 11x + 20$ *este pătratul unui număr natural*$\} = \{-16, 5\}$.

Răspuns.

a) Fie $A = \{x \in Z | x^2 + 5x + 10$ este pătratul unui număr natural$\}$.

Avem: $(-6)^2 + 5(-6) + 10 = 16 = 4^2$;
$(-3)^2 + 5(-3) + 10 = 4 = 2^2$;
$(-2)^2 + 5(-2) + 10 = 4 = 2^2$;
$1^2 + 5 \cdot 1 + 10 = 16 = 4^2$

și deci $\{-6, -3, -2, 1\} \subset A$. Să demonstrăm și incluziunea în sens invers, $A \subset \{-6, -3, -2, 1\}$.

Să presupunem că există $x \in Z$ și $n \in N$ astfel ca $x^2 + 5x + 10 = n^2$; rezultă că ecuația $x^2 + 5x + (10 - n^2) = 0$ are soluții întregi și deci discriminantul ecuației este un pătrat perfect α^2 (α natural).

$$\Delta = 25 - 4(10 - n^2) = \alpha^2.$$

Avem $4n^2 - \alpha^2 = 15 \Leftrightarrow (2n - \alpha)(2n + \alpha) = 15$; ținînd seama că $2n - \alpha$ și $2n + \alpha$ sînt numere naturale și $2n - \alpha < 2n + \alpha$, această egalitate este verificată numai dacă:

$$\begin{cases} 2n - \alpha = 3 \\ 2n + \alpha = 5 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 2n - \alpha = 1 \\ 2n + \alpha = 15, \end{cases}$$

adică dacă $\begin{cases} n = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} n = 4 \\ \alpha = 7. \end{cases}$

Pentru $n = 2$ ecuația $x^2 + 5x + (10 - n^2) = 0$ are rădăcinile -2, -3, iar dacă $n = 4$ ecuația are rădăcinile 1 și -6 și deci $A \subset \{-6, -3, -2, 1\}$. Ținînd seama și de $\{-6, -3, -2, 1\} \subset A$, rezultă $A = \{-6, -3, -2, 1\}$.

b), c) Se procedează ca la punctul a).

114. *Să se compare mulțimile:*

$$A = \left\{ x \in Q \mid x = \frac{2n + 1}{n + 4},\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots \right\};$$

$$B = \{x \in A \mid x < 2\}.$$

Răspuns.

Evident B este o parte a mulțimii A, $B \subset A$. Să arătăm că avem și $A \subset B$. Într-adevăr, $x \in A \Rightarrow x = \frac{2n + 1}{n + 4} = \frac{2n + 8 - 7}{n + 4} = \frac{2(n + 4) - 7}{n + 4} = 2 - \frac{7}{n + 4} < 2$, deci $x \in B$ și $A \subset B$.

Din $A \subset B$ și $B \subset A$ rezultă $A = B$.

115. *Să se compare mulțimile:*

$$A = \left\{ x \in Q \mid x = \frac{3n^2 + 1}{n^2 + n},\ n = 1, 2, 3, \ldots \right\};$$

$$B = \{x \in A \mid 2 \leqslant x < 3\};$$

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

B este o parte nevidă (pentru $n = 1$ se obține $x = 2 \in B$) a lui A, $B \subset A$.

Să arătăm că avem și $A \subset B$. Pentru aceasta trebuie să verificăm că oricare ar fi numărul natural n avem:

$$2 \leqslant \frac{3n^2 + 1}{n^2 + n} < 3,$$

$$2 \leqslant \frac{3n^2 + 1}{n^2 + n} \Leftrightarrow 2n^2 + 2n \leqslant 3n^2 + 1 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)^2 \geqslant 0,$$

ceea ce este evident adevărat;

$$\frac{3n^2 + 1}{n^2 + n} = \frac{3(n^2 + n) - 3n + 1}{n^2 + n} = 3 - \frac{3n - 1}{n^2 + n} < 3.$$

Deoarece $A \subset B$ și $B \subset A$, mulțimile A și B sînt egale.

116. *Notăm cu* $[x]$ *cel mai mare număr întreg cel mult egal cu* x $(x \in R)$. *Să se determine două elemente ale mulțimii* $M = \left\{ y \in R \mid y = \frac{[x]}{x},\ x \geqslant 1 \right\}$ *și apoi să se demonstreze că* $M = \left(\frac{1}{2},\ 1 \right]$.

Răspuns.

Dacă $x = 3{,}5$, atunci $[x] = [3{,}5] = 3$ și

$$\frac{[x]}{x} = \frac{3}{3{,}5}. \text{ Deci } \frac{3}{3{,}5} \in M.$$

Dacă $x = \sqrt{3}$, atunci $[\sqrt{3}] = 1$ și $\frac{[x]}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Deci $\frac{1}{\sqrt{3}} \in M$.

Fie $y \in M$, atunci $y = \frac{[x]}{x}$ unde $x \geqslant 1$. Avem $x = n + \varepsilon$ unde $1 > \varepsilon \geqslant 0$ și $n \geqslant 1$. Cu această notație obținem

$[x] = [n + \varepsilon] = n$ și deci $\frac{[x]}{x} = \frac{n}{n+\varepsilon}$. Evident $\frac{n}{n+\varepsilon} \leqslant 1$.

Să arătăm acum că $\frac{n}{n+\varepsilon} > \frac{1}{2}$. Avem $\frac{n}{n+\varepsilon} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2n > n + \varepsilon \Leftrightarrow n > \varepsilon$.

Ultima inegalitate fiind adevărată rezultă că $\frac{n}{n+\varepsilon} > \frac{1}{2}$ și deci $y = \frac{[x]}{x} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, ceea ce demonstrează că $M \subset \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Dacă $z \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, atunci $1 \geqslant z > \frac{1}{2}$, de unde $1 \leqslant \frac{1}{z} < 2$ și deci $\left[\frac{1}{z}\right] = 1$. Putem scrie $z = \frac{\left[\frac{1}{z}\right]}{\frac{1}{z}}$ unde $\frac{1}{z} \geqslant 1$ și deci $z \in M$.

Aceasta dovedește că $\left(\frac{1}{2}, 1\right] \subset M$.

117. *Să se demonstreze că* $\left\{y \in R | y = \frac{x - [x]}{x}, x \geqslant 1\right\} = \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Răspuns.

Fie $M = \left\{y \in R | y = \frac{x - [x]}{x}, x \geqslant 1\right\}$ și $y = \frac{x - [x]}{x}$, un element oarecare al acestei mulțimi. Deoarece $x \geqslant 1$, avem $x \geqslant [x]$ și deci $\frac{x - [x]}{x} \geqslant 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Din $[x] \geqslant 1$ și $x - [x] < 1$ rezultă $x - [x] < [x]$, adică $\frac{[x]}{x} > \frac{1}{2}$. Avem $\frac{x-[x]}{x} = 1 - \frac{[x]}{x} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Am arătat astfel că $0 \leqslant \frac{x-[x]}{x} < \frac{1}{2}$, adică $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ și deci $M \subset \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

Fie $z \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Avem : $0 \leqslant z < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -z \leqslant 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - z \leqslant 1 \Rightarrow 1 \leqslant \frac{1}{1-z} < 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{1-z}\right] = 1$.

Se poate scrie $z = \frac{\frac{z}{1-z}}{\frac{1}{1-z}} = \frac{\frac{1}{1-z} - 1}{\frac{1}{1-z}} = \frac{\frac{1}{1-z} - \left[\frac{1}{1-z}\right]}{\frac{1}{1-z}}$

unde $\frac{1}{1-z} \geqslant 1$ și deci $z \in M$. Aceasta dovedește că $\left[0, \frac{1}{2}\right) \subset M$. Din $M \subset \left[0, \frac{1}{2}\right)$ și $\left[0, \frac{1}{2}\right) \subset M$ rezultă $M = \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

118. *Să se nege propozițiile* (A și B *mulțimi*).

$P_1 : A \subset B$

$P_2 : A = B$

Răspuns.

$A \subset B \Leftrightarrow$ oricare ar fi $x \in A$, avem $x \in B$.

non $(A \subset B) \Leftrightarrow$ (există x) $[(x \in A) \wedge (x \notin B)]$.

$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

non $(A = B) \Leftrightarrow$ non $[(A \subset B) \wedge (B \subset A)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ [non $(A \subset B) \vee$ non $(B \subset A)] \Leftrightarrow$ {(există x) $[(x \in A) \wedge (x \notin B)]$} $\vee$ {(există x)$[(x \in B) \wedge (x \notin A)]$}.

119. *Să se scrie ca intervale următoarele mulțimi*:

a) $[1, 3) \cup [2, 4)$;

b) $[1, 3) \cap [2, 4)$;

c) $([1, 3) \cap [2, 4)) \cup [3, 5)$.

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

a) $[1, 3) \cup [2, 4) = [1, 4)$;
b) $[1, 3) \cap [2, 4) = [2, 3)$;
c) Avem $([1, 3) \cap [2, 4)) \cup [3, 5) = [2, 3) \cup [3, 5) = [2, 5)$.

120. *Să se determine mulțimea X astfel încît:*

$$X \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\}.$$

Răspuns.

$X = \{3\}$; $X = \{1, 3\}$; $X = \{2, 3\}$; $X = \{1, 2, 3\}$.

121. *Să se determine mulțimea A știind că îndeplinește simultan condițiile:*

a) $A \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$;
b) $A \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$.

Răspuns.

Din $A \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$, rezultă că elementele mulțimii A se află printre elementele 1, 2, 3, 4.

Condiția b) arată că $1 \in A$ și $2 \in A$ și $3 \notin A$; condiția a) arată că $4 \in A$, deci $A = \{1, 2, 4\}$.

122. *Să se demonstreze că:*

$$\{x \in R \mid |x - 1| + |x - 2| > 5\} = \{x \in R \mid \frac{5}{x - 4} > -1, x \neq 4\}.$$

Răspuns.

Fie $A = \{x \in R \mid |x - 1| + |x - 2| > 5\}$;

$A_1 = \{x \in R \mid x < 1, |x - 1| + |x - 2| > 5\}$;

$A_2 = \{x \in R \mid 1 \leqslant x \leqslant 2, |x - 1| + |x - 2| > 5\}$;

$A_3 = \{x \in R \mid x > 2, |x - 1| + |x - 2| > 5\}$;

$$B = \left\{x \in R \mid \frac{5}{x - 4} > -1, x \neq 4\right\};$$

$$B_1 = \left\{x \in R \mid x < 4, \frac{5}{x - 4} > -1\right\};$$

$$B_2 = \left\{x \in R | x > 4, \frac{5}{x-4} > -1\right\}.$$

Evident, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ și $B = B_1 \cup B_2$.

Avem: $A_1 = \{x \in R | x < 1, -x + 1 - x + 2 > 5\} =$
$= \{x \in R | x < 1, x < -1\} = \{x \in R | x <$
$< -1\}$;
$A_2 = \{x \in R | 1 \leqslant x \leqslant 2, x - 1 - x + 2 > 5\} =$
$= \{x \in R | 1 \leqslant x \leqslant 2, 1 > 5\} = \emptyset$,
$A_3 = \{x \in R | x > 2, x - 1 + x - 2 > 5\} =$
$= \{x \in R | x > 2, x > 4\} = \{x \in R | x > 4\}$;
$B_1 = \{x \in R | x < 4, \text{ și } 5 < -(x-4)\} =$
$= \{x \in R | x < 4, x < -1\} = \{x \in R | x <$
$< -1\}$;
$B_2 = \{x \in R | x > 4, \text{ și } 5 > -(x-4)\} =$
$= \{x \in R | x > 4 \text{ și } x > -1\} = \{x \in R | x >$
$> 4\}$.

Rezultă $A_1 = B_1$, $A_2 = \emptyset$, $A_3 = B_2$ și $A_1 \cup A_2 \cup A_3 =$
$= B_1 \cup \emptyset \cup B_2 = B_1 \cup B_2$, adică $A = B$.

123. *Fie mulțimile*: $A = \{x \in R | |x| + |1 - x| \geqslant 2\}$,

$B = \{x \in R | 4x^2 - 4x - 3 \geqslant 0\}$,

$$C = \left\{x \in R | \frac{3}{x+1} < 1\right\}.$$

Să se compare A cu B și B cu C.

Răspuns.

Avem:

$A = \{x \in R | x < 0, |x| + |1 - x| \geqslant 2\} \cup \{x \in R | 0 \leqslant$
$\leqslant x \leqslant 1, |x| + |1 - x| \geqslant 2\} \cup \{x \in R | x > 1, |x| + |1 - x| \geqslant$
$\geqslant 2\} = \{x \in R | x < 0, -x + 1 - x \geqslant 2\} \cup \{x \in R | 0 \leqslant$
$\leqslant x \leqslant 1, x + 1 - x \geqslant 2\} \cup \{x \in R | x > 1, x - 1 + x \geqslant 2\} =$

$$= \left\{x \in R | x \leqslant -\frac{1}{2}\right\} \cup \emptyset \cup \left\{x \in R | x \geqslant \frac{3}{2}\right\} = \left\{x \in R | x \leqslant -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x \in R | x \geqslant \frac{3}{2}\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

$B = \{x \in R | (2x + 1)(2x - 3) \geqslant 0\} = \{x \in R | [(2x + 1 \geqslant 0) \wedge (2x - 3 \geqslant 0)] \vee [(2x + 1 \leqslant 0) \wedge (2x - 3 \leqslant 0)]\} = \left\{x \in R | x \geqslant \frac{3}{2}\right\} \cup \left\{x \in R | x \leqslant -\frac{1}{2}\right\}.$

$C = \left\{x \in R | \frac{3}{x+1} - 1 < 0\right\} = \left\{x \in R | \frac{2-x}{x+1} < 0\right\} =$

$= \{x \in R | (x > 2, x > -1) \vee (x < 2, x < -1)\} =$

$= \{x \in R | x > 2\} \cup \{x \in R | x < -1\}.$

Rezultă $A = B$, $C \subset B$, $B \neq C$.

124. *Fie* $E = \{1, 2, 3\}$. *Să se determine submulțimile* X *și* Y *ale lui* E *care verifică egalitatea* $X \cup Y = E$.

Răspuns.

Avem: $X = \emptyset$, $Y = \{1, 2, 3\}$;
$X = \{1\}$, $Y = \{2, 3\}$;
$X = \{1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$;
$X = \{2\}$, $Y = \{1, 3\}$;
$X = \{2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ etc.

Se vor găsi 27 de cupluri (X, Y) care îndeplinesc condiția $X \cup Y = E$.

125. *Fie* X *și* Y *două submulțimi ale mulțimii* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *și condițiile*:

1) $X \cap Y = \{4, 6, 9\}$;
2) $X \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$;
3) $Y \cup \{4, 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

a) *Să se arate că din condițiile 1) și 2) rezultă* $1 \in X$ *și* $1 \notin Y$; $8 \in X$ *și* $8 \notin Y$; $7 \notin X$.

b) *Să se determine mulțimile* X *și* Y *satisfăcînd condițiile 1), 2), 3).*

Soluție.

a) Elementele mulțimilor X și Y trebuie căutate printre elementele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Deoarece $1 \in X \cup \{3, 4, 5\}$ (condiția 2), rezultă $1 \in X$ și cum $1 \notin X \cap Y$ (condiția 1) deducem $1 \notin Y$. La fel se arată că $8 \in X$ și $8 \notin Y$.

Deoarece $7 \notin X \cup \{3, 4, 5\}$, rezultă $7 \notin X$.

b) Avem :

$1 \in X$ și $1 \notin Y$ (punctul a);
$2 \notin X$ (condiția 2) și $2 \in Y$ (condiția 3);
$3 \notin X$ (condiția 1) și $3 \in Y$ (condiția 3);
$4 \in X$ și $4 \in Y$ (condiția 1);
$5 \notin X$ (condiția 1) și $5 \in Y$ (condiția 3);
$6 \in X$ și $6 \in Y$ (condiția 1);
$7 \notin X$ (condiția 1) și $7 \in Y$ (condiția 3);
$8 \in X$ și $8 \notin Y$ (punctul a);
$9 \in X$ și $9 \in Y$ (condiția 1).

Așadar. $X = \{1, 4, 6, 8, 9\}$ și $Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

126. *Fie A o mulțime cu 10 elemente, B o mulțime cu 15 elemente și $A \cap B$ avînd 6 elemente. Cîte elemente are $A \cup B$? Generalizare.*

Răspuns.

$A \cup B$ are $10 + 15 - 6 = 19$ elemente.

Dacă A are n elemente, B m elemente și $A \cap B$ are p elemente, atunci $A \cup B$ are $m + n - p$ elemente.

127. *Fie A o mulțime cu 12 elemente, B o mulțime cu 18 elemente, și $A \cup B$ avînd 25 de elemente. Cîte elemente are $A \cap B$? Generalizare.*

Răspuns.

$A \cap B$ are $12 + 18 - 25 = 5$ elemente.

Dacă A are m elemente, B are n elemente și $A \cup B$ are p elemente, atunci $A \cap B$ are $m + n - p$ elemente.

128. *Care dintre propozițiile următoare sînt adevărate și care sînt false ?*

P_1 : „Mulțimea A are 5 elemente, mulțimea B are cel mult trei elemente, iar $A \cap B$ are 16 submulțimi“.

P_2 : „Dacă mulțimea A are n elemente și numărul submulțimilor sale este mai mare decît $5n$, atunci A are cel puțin 5 elemente“.

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

$A \cap B$ are $16 = 2^4$ submulțimi și deci 4 elemente, de unde rezultă că B are cel puțin 4 elemente, ceea ce contrazice faptul că B are cel mult trei elemente. Propoziția P_1 este, prin urmare, falsă.

Propoziția P_2 este adevărată. Într-adevăr, avînd n elemente A are 2^n submulțimi și $2^n > 5n \Rightarrow n \geqslant 5$ (dacă $n < 5$, atunci $2^n < 5n$).

129. *Mulțimea A are trei elemente, mulțimea B are două elemente, iar $A \cup B$ conține 16 submulțimi.*

Cîte elemente are $A \cap B$?

Răspuns.

Mulțimea A avînd 3 elemente, iar mulțimea B 2 elemente, $A \cup B$ are cel mult $3 + 2 = 5$ elemente.

$A \cup B$ are însă 2^4 submulțimi și deci 4 elemente ; rezultă că $A \cap B$ are un element.

130. *Să se arate că dacă $A \subset B$ și $C \subset D$, atunci :*

a) $A \cup C \subset B \cup D$;

b) $A \cap C \subset B \cap D$.

În particular, $(A \subset B) \wedge (C \subset B) \Rightarrow (A \cup C \subset B) \wedge$ $\wedge (A \cap C \subset B)$;

$$(A \subset B) \wedge (A \subset C) \Rightarrow (A \subset B \cap C).$$

c) Să se verifice rezultatele, reprezentîndu-se mulțimile prin mulțimi de puncte în plan.

Soluție.

a) Fie $x \in A \cup C$. Avem $x \in A \cup C \Rightarrow (x \in A) \vee (x \in C)$ și cum prin ipoteză $x \in A \Rightarrow x \in B$ și de asemenea $x \in C \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in D$, obținem $x \in B \cup D$. Am arătat că $A \cup C \subset B \cup D$.

b) $x \in A \cap C \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in C)$ și ținînd seama că $x \in A \Rightarrow x \in B$, $x \in C \Rightarrow x \in D$, avem $x \in A \cap C \Rightarrow$ $\Rightarrow (x \in B) \wedge (x \in D) \Rightarrow x \in B \cap D$, deci $A \cap C \subset B \cap D$.

În particular, dacă $B = D$ obținem $(A \subset B) \wedge (C \subset B) \Rightarrow$ $\Rightarrow (A \cup C) \subset B \cup B = B$, $A \cap C \subset B \cap B = B$.

Scanned with OKEN Scanner

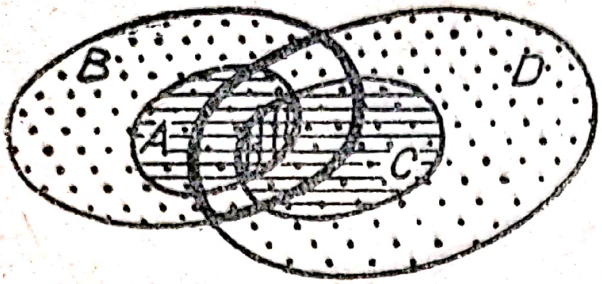


Fig. 4

Dacă $A \subset B$ și $A \subset C$, aplicînd relația de la punctul b) obținem $A \cap A \subset B \cap C$, adică $A \subset B \cap C$.

c) Reprezentînd mulțimile A, B, C, D prin mulțimi de puncte ale planului (fig. 4), $A \cup C$ este porțiunea haşurată orizontal și este inclusă în $B \cup D$ reprezentată prin porțiunea punctată; $A \cap C$ este reprezentată prin partea haşurată și orizontal și vertical și este inclusă în $B \cap D$ — partea cu frontiera îngroșată.

131. *Să se demonstreze că* : $(A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B)$.

Soluție.

Fie $x \in A$. Avem $x \in A \cup B$ și deoarece $A \cup B = A \cap B$, rezultă $x \in B$ și deci $A \subset B$. Fie $y \in B$. Avem $y \in A \cup B$ și deoarece $A \cup B = A \cap B$, rezultă $y \in A$ și deci $B \subset A$. Am demonstrat astfel că $(A \cup B = A \cap B) \Rightarrow (A = B)$.

Fie acum $A = B$. În acest caz $A \cup B = A$ și $A \cap B = A$ și deci $A \cup B = A \cap B$. Am demonstrat astfel că $(A = B) \Leftrightarrow (A \cup B = A \cap B)$.

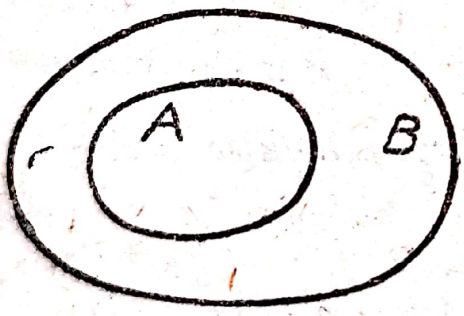


Fig. 5

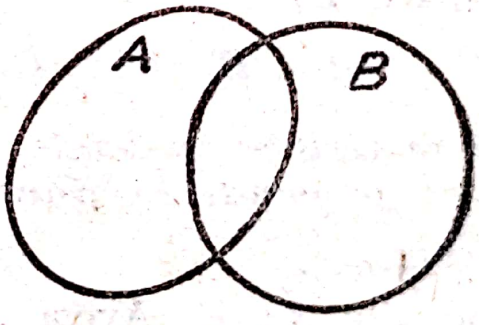


Fig. 6

132. *Să se determine mulțimile A și B care îndeplinesc condițiile* :

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
2) $A \cap B = \varnothing$;
3) *Oricare ar fi* $x \in A$, *există* $y \in B$ *astfel ca* $x - y = 1$;
4) *Oricare ar fi* $x \in B$, *există* $y \in A$, *astfel ca* $y - x = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

$1 \notin A$ fiindcă dacă $1 \in A$ ar trebui să existe $y \in B$, deci $y \in A \cup B$, astfel ca $1 - y = 1$, or această ecuație are soluția $y = 0$ și $0 \notin B$ (pentru că $0 \notin A \cup B$).

Ținînd seama și de condiția 1), rezultă $1 \in B$.

Din condiția 4), pentru $x = 1$, avem $y - 1 = 1$, $y = 2$, deci $2 \in A$. $3 \in B$ căci dacă $3 \in A$, atunci din condiția 3) ar rezulta $3 - y = 1$, $y = 2$ și $2 \in B$, ceea ce este în contradicție cu $2 \in A$. În mod asemănător se arată că $4 \in A$, $5 \in B$, $6 \in A$. deci $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$.

133. *Să se nege propozițiile:*

$a)$ $x \in A \cup B$; $b)$ $x \in A \cap B$; $c)$ $x \in A - B$.

Răspuns.

a) $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$.

non $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow$ non $[(x \in A) \vee (x \in B)] \Leftrightarrow$ non $(x \notin A) \wedge$ non $(x \in B) \Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$.

Deci $x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B)$.

b) $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$.

non $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow$ non$[(x \in A) \wedge (x \in B)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (non $x \in A$) $\vee$ (non $x \in B$) $\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$.

Deci: $x \notin A \cap B \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$.

c) $x \in A - B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$.

non $(x \in A - B) \Leftrightarrow x \notin A - B \Leftrightarrow$ non $[(x \in A) \wedge (x \notin B)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ non $(x \in A) \vee$ non $(x \notin B) \Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \in B)$.

134. *Să se nege propoziția:* $A \subset B - C$.

Răspuns.

non $(A \subset B - C) \Leftrightarrow$ există $x \in A$ astfel încît $x \notin (B - C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ există $x \in A$ astfel încît $(x \notin B) \vee (x \in C)$.

135. *Să se nege propozițiile:*

$$P_1 : A \subset (B \cup C)$$
$$P_2 : A \subset (B \cap C)$$

Răspuns.

$A \subset B \cup C \Leftrightarrow$ (pentru orice $x \in A$ avem $(x \in B) \vee (x \in C)$.

non $(A \subset B \cup C) \Leftrightarrow$ [există $x \in A$ astfel încît $(x \notin B) \wedge (x \notin C)$].

Scanned with OKEN Scanner

$A \subset B \cap C \Leftrightarrow$ [pentru orice $x \in A$ avem $(x \in B) \wedge (x \in C)$]; non $(A \subset B \cap C) \Leftrightarrow$ [există $x \in A$ astfel încît $(x \notin B) \vee (x \notin C)$.

136. *Să se demonstreze că dacă*

$$(X \notin A \cup B) \Rightarrow (X \subset A) \vee (X \subset B)$$

atunci $(A \subset B) \vee (B \subset A)$.

Soluție.

Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că în ipoteza $(X \subset A \cup B) \Rightarrow (X \subset A) \vee (X \subset B)$, nu am avea $(A \subset B) \vee (B \subset A)$ și deci avem $(A \not\subset B) \wedge (B \not\subset A)$, adică: (există $a \in A$ și $a \notin B$) $\wedge$ (există $b \in B$ și $b \notin A$).

Fie $X = \{a, b\}$. Avem: $X \subset A \cup B$ dar $X \not\subset A$ (căci $b \notin A$) și $X \not\subset B$ (fiindcă $a \notin B$), ceea ce contrazice ipoteza că oricare mulțime inclusă în $A \cup B$, este inclusă în A sau în B. Presupunerea făcută este deci falsă și proprietatea este demonstrată.

Este adevărată și reciproca.

137. *Fie mulțimea* $M = \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4.\}$

Să se nege propozițiile P_1, P_2 *și să se precizeze care dintre propozițiile* P_1, P_2, *non* P_1, *non* P_2 *sînt false și care adevărate.*

P_1: *oricare ar fi* $A \in M$ *și* $B \in M$, *avem* $A \cup B \in M$.

P_2: *oricare ar fi* $A \in M$ *și* $B \in M$ *avem* $A \cap B \in M$.

Răspuns.

non P_1: există $A \in M$ și $B \in M$ astfel ca $A \cup B \notin M$, propoziție adevărată. Într-adevăr, dacă $A = \{1, 2\}$ și $B = \{1, 3, 4\}$ atunci $A \cup B = \{1, 2. 3, 4\} \notin M$. Rezultă P_1 falsă.

non P_2: există $A \in M$ și $B \in M$ astfel ca $A \cap B \notin M$, propoziție adevărată, căci pentru $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 4\}$ avem

$$A \cap B = \{1, 3\} \notin M.$$

non P_2 fiind adevărată P_2 este falsă.

138. *Fie mulțimea* $M = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2. 3,4\}\}$

Să se nege propoziţiile:

P_1: *Oricare ar fi* $X \in M$ *şi* $Y \in M$ *avem* $(X \cup Y \in M) \wedge (X \cap Y \in M)$.

P_2: *Oricare ar fi* $X \in M$ *şi* $Y \in M$ *avem* $(X \cup Y \in M) \vee (X \cap Y \in M)$.

Să se precizeze care dintre propoziţiile P_1, P_2, *non* P_1 *şi non* P_2 *sînt adevărate şi care sînt false ?*

Răspuns.

non P_1: există $X \in M$ şi $Y \in M$ astfel încît $(X \cup Y \notin M) \vee (X \cap Y \notin M)$; non P_1 este adevărată, căci $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \varnothing \notin M$.

non P_2: există $x \in M$ şi $y \in M$ astfel încît $(X \cup Y \notin M) \wedge (X \cap Y \notin M)$; non P_2 este falsă.

139. *Să se rezolve ecuaţiile:*

1) $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\} \cap X$.

2) $A \cup X = B \cap X$. *Discuţie.*

Soluţie.

1) Dacă X satisface ecuaţia, atunci $\{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2, 3\}$ şi $\{1, 2\} \cup X \subset X$.

Din prima incluziune deducem $X \subset \{1, 2, 3\}$, iar din a doua $\{1, 2\} \subset X$, adică $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3\}$, relaţii satisfăcute de $X = \{1, 2\}$ şi $X = \{1, 2, 3\}$. Evident ecuaţia (1) este satisfăcută atît de $X = \{1, 2\}$ cît şi de $X = \{1, 2, 3\}$, care sînt soluţiile ecuaţiei.

2) Avem:

$$A \cup X = B \cap X \Leftrightarrow (A \cup X \subset B \cap X) \wedge (B \cap X \subset A \cup X) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [(A \cup X \subset B) \wedge (A \cup X \subset X) \wedge (B \cap X \subset A \cup X)] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (X \subset B) \wedge (A \subset X) \Leftrightarrow (A \subset X \subset B) \wedge (A \subset B),$$

deci

$$(A \cup X = B \cap X) \Leftrightarrow (A \subset X \subset B) \wedge (A \subset B).$$

Rezultă că dacă $A \subset B$, $B \neq \varnothing$, atunci oricare parte a lui B care conţine pe A este soluţie a ecuaţiei $A \cup X = B \cap X$.

Dacă $A \not\subset B$, ecuaţia nu are soluţii.

Scanned with OKEN Scanner

140. *Se dau mulțimile:*

$$A = \{x | x = 3n - 2, n \in N^*\};$$
$$B = \{x | x = 1003 - 2m, m \in N^*\};$$
$$C = \{x | x = 6p + 1, p \in Z,\ 0 \leqslant p \leqslant 166\}.$$

Să se demonstreze că $A \cap B = C$.

Soluție.

Fie $x \in A \cap B$. Să arătăm că $x \in C$. Într-adevăr, dacă $x \in A \cap B$, atunci $(x \in A) \wedge (x \in B)$, adică există numerele naturale m și n astfel că $x = 3n - 2 = 1003 - 2m$; dar $3n - 2 = 1003 - 2m \Leftrightarrow m = \frac{1005 - 3n}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow m = 502 - n - \frac{n-1}{2}$ și deoarece m și n sînt numere naturale, rezultă că $\frac{n-1}{2}$ trebuie să fie un întreg pe care să-l notăm cu p: $\frac{n-1}{2} = p$. Rezultă $n = 2p + 1$ și $m = 502 - 2p - 1 - p = 501 - 3p$; m și n fiind naturale avem:

$2p + 1 \geqslant 1$ și $501 - 3p \geqslant 1$, adică $0 \leqslant p \leqslant 166$; iar

$x = 3n - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 6p + 1$, deci $x \in C$.

Reciproc, fie $x \in C$ și să arătăm că $x \in A \cap B$. Dacă $x \in C$ atunci există p întreg, $0 \leqslant p \leqslant 166$, astfel ca $x = 6p + 1$.

Să arătăm că x poate fi scris sub forma $3n - 2$, $n \in N^*$. Avem: $x = 6p + 1 = 6p + 1 + 2 - 2 = 6p + 3 - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 3n - 2$, unde am notat $2p + 1 = n$. Rezultă $x \in A$. Să arătăm că $x \in B$. Într-adevăr, $x = 6p + 1 = 6p + 1 + 1003 - 1003 = 6p - 1002 + 1003 = 1003 - 2(501 - 3p) = 1003 - 2m$, unde am pus $501 - 3p = m$ (m este natural, fiind întreg și pozitiv: $m = 501 - 3p = 3 + (498 - 3p) = 3 + 3(166 - p) \geqslant 3$.

Din $x \in A$ și $x \in B$ rezultă $x \in A \cap B$.

Am demonstrat incluziunile $A \cap B \subset C$ și $C \subset A \cap B$, de unde rezultă egalitatea propusă.

141. *Fie* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6, 7\}$, *părți ale mulțimii* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Să se determine mulțimile:

a) $A \cup B$; *b)* $A \cap B$; *c)* $A - B$; *d)* $B - A$.

Răspuns.

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
b) $A \cap B = \{1, 4\}$;
c) $A - B = \{2, 3, 5\}$;
d) $B - A = \{6, 7\}$.

142. *Fie* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7\}$, *părți ale mulțimii* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Să se determine mulțimile:

a) $A \cup B$; *b)* $A \cap B$; *c)* $A - B$; *d)* $B - A$.

Răspuns.

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
b) $A \cap B = \varnothing$
c) $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
d) $B - A = \{6, 7\}$.

143. *Fie mulțimea* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *și părțile ei* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *și* $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Să se determine mulțimile: $\mathbf{C}_E A$, $\mathbf{C}_E B$ *și* $\mathbf{C}_A B$

b) Să se determine mulțimile: $\mathbf{C}_E(\mathbf{C}_E A)$, $\mathbf{C}_E(\mathbf{C}_E B)$, $\mathbf{C}_E(\mathbf{C}_A B)$.

c) Ce se poate spune despre mulțimea $\mathbf{C}_B A$ *?*

Răspuns.

a) $\mathbf{C}_E A = E - A = \{7, 8, 9, 10\}$;
$\mathbf{C}_E B = E - B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
$\mathbf{C}_A B = A - B = \{5,6\}$.

b) $\mathbf{C}_E(\mathbf{C}_E A) = E - \mathbf{C}_E A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
$\mathbf{C}_E(\mathbf{C}_E B) = E - \mathbf{C}_E B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 4\}$.
$\mathbf{C}_E(\mathbf{C}_A B) = E - \mathbf{C}_A B = E - \{5,6\} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10\}$.

c) Mulțimea notată cu semnul $\mathbf{C}_B A$ a fost definită în cazul $A \subset B$, condiție ce nu este îndeplinită în cadrul exercițiului nostru și deci în acest caz notația $\mathbf{C}_B A$ nu are sens.

Scanned with OKEN Scanner

144. *Fie mulțimile* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *și* $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *și* $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Să se verifice că $\mathbf{C}_E A \subset \mathbf{C}_F A$.

b) Să se arate că, în general, dacă $E \subset F$ *și* $A \subset E$, *atunci* $\mathbf{C}_E A \subset \mathbf{C}_F A$.

Răspuns.

a) $\mathbf{C}_E A = \{5, 6, 7, 8\}$

$\mathbf{C}_F A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Deci $\mathbf{C}_E A \subset \mathbf{C}_F A$.

b) Avem:

$x \in \mathbf{C}_E A \Rightarrow x \in E$ și $x \notin A \Rightarrow x \in F$ și $x \notin A \Rightarrow x \in \mathbf{C}_F A$.

Deci $\mathbf{C}_E A \subset \mathbf{C}_F A$.

145. *Fie* $N^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$Z^\circ_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$Z_- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

$Z^\circ_- = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$,

R *mulțimea numerelor reale,*

$R_+ = \{x \in R \mid x > 0\}$,

$R^\circ_+ = \{x \in R \mid x \geqslant 0\}$,

$R_- = \{x \in R \mid x < 0\}$,

$R^\circ_- = \{x \in R \mid x \leqslant 0\}$,

Q *mulțimea numerelor raționale,* I *mulțimea numerelor iraționale.*

Să se precizeze mulțimile:

$$\mathbf{C}_Z N,\ \mathbf{C}_Z Z_-,\ \mathbf{C}_Z Z^\circ_+,\ \mathbf{C}_Z Z^\circ_-,\ \mathbf{C}_R R_+,\ \mathbf{C}_R R^\circ_+,\ \mathbf{C}_R R_-,\ \mathbf{C}\ R^\circ_-,\ \mathbf{C}_R I,\ \mathbf{C}_R Q.$$

Răspuns.

$\mathbf{C}_Z N = Z_-$, $\mathbf{C}_Z Z_- = Z^\circ_+$, $\mathbf{C}_Z Z^\circ_+ = Z_-$, $\mathbf{C}_Z Z^\circ_- = N^*$,

$\mathbf{C}_R R_+ = R^\circ_-$, $\mathbf{C}_R R_- = R^\circ_+$, $\mathbf{C}_R R^\circ_- = R_+$, $\mathbf{C}_R I = Q$, $\mathbf{C}_R Q = I$

146. *Să se scrie ca intervale mulțimile:*

$$\mathbf{C}_R[2, +\infty),\ \mathbf{C}_R(1, +\infty),\ \mathbf{C}_R(-\infty, 3),\ \mathbf{C}_R(-\infty, 4).$$

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

$$\mathbf{C}_R[2, +\infty) = (-\infty, 2),\ \mathbf{C}_R(1, +\infty) = (-\infty, 1],\ \mathbf{C}_R(-\infty, 3) = [3, +\infty),\ \mathbf{C}_R(-\infty, 4) = 4, +\infty).$$

147. *În figura 7 planul π este împărțit în mai multe regiuni. Să se exprime mulțimea punctelor fiecărei regiuni cu ajutorul mulțimilor A, B, C și simbolurilor reuniunii, intersecției și diferenței.*

Răspuns.

Regiunea haşurată orizontal:

$$(A - B) - C = (A - C) - B = A - (B \cup C) = A - [(A \cap C) \cup (A \cap B)].$$

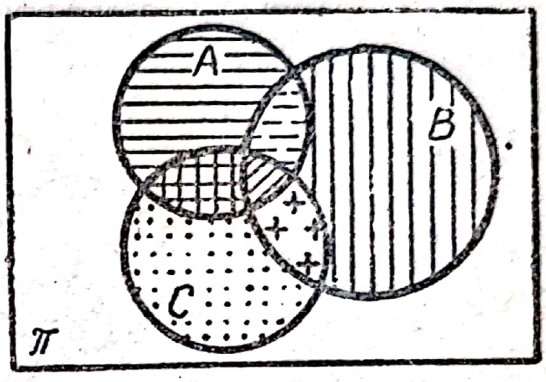


Fig. 7

Regiunea haşurată vertical:

$$(B - A) - C = (B - C) - A = B - (A \cup C) = B - [(B \cap C) \cup (B \cap A)].$$

Regiunea punctată:

$$(C - B) - A = (C - A) - B = C - [(C \cap A) \cup (C \cap B)] = C - (B \cup A).$$

Regiunea cu minusuri:

$$(A \cap B) - (B \cap C) = (A \cap B) - C = (A \cap B) - (A \cap B \cap C).$$

Regiunea cu plusuri:

$$(B \cap C) - (B \cap A) = (B \cap C) - A = (B \cap C) - (A \cap B \cap C).$$

Regiunea cu pătrățele:

$$(C \cap A) - (C \cap B) = (C \cap A) - B = (C \cap A) - (A \cap B \cap C).$$

Regiunea haşurată oblic: $A \cap B \cap C$.

Regiunea nehaşurată a planului π:

$$\pi - (A \cup B \cup C).$$

Scanned with OKEN Scanner

148. *Fie M mulțimea punctelor din planul π situate în interiorul său pe conturul triunghiului din figura 8 și B mulțimea punctelor din același plan situate în interiorul sau pe conturul cercului. Să se haşureze porțiunile din plan reprezentînd mulțimile următoare (se va face un desen pentru fiecare caz în parte):*

a) $A \cup B$; *b)* $A \cap B$; *c)* $A - B$; *d)* $B - A$.

Răspuns.

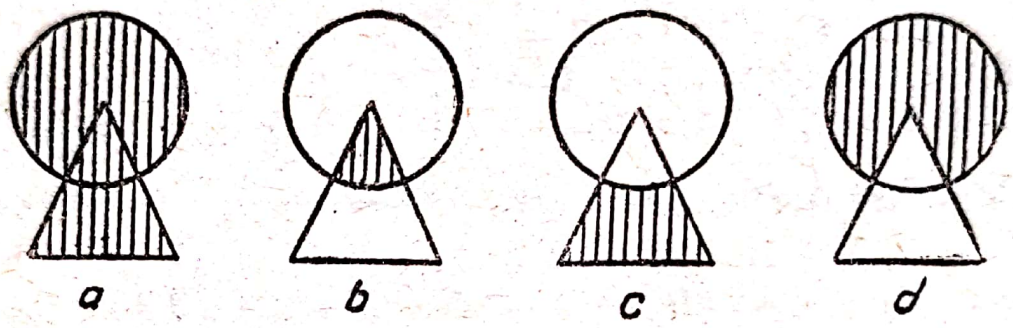


Fig. 8

149. *În planul π reprezentat printr-un dreptunghi, se consideră un triunghi, un pătrat și un cerc (vezi figura 9). Dacă notăm cu A mulțimea punctelor din π situate în interiorul sau pe conturul triunghiului, cu B mulțimea punctelor din planul π situate în interiorul sau pe conturul pătratului și cu C mulțimea punctelor planului π, așezate în interiorul sau pe conturul cercului, să se haşureze mulțimile următoare:*

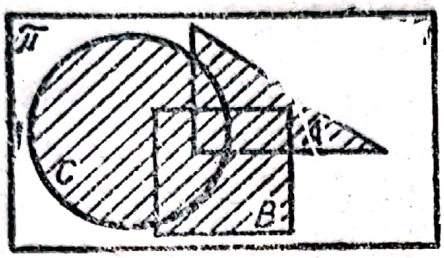
(Se va face cîte un desen pentru fiecare caz în parte).

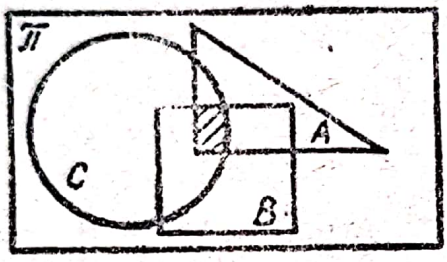
1) $A \cup B \cup C$; *4)* $A - C$; *7)* $C - A$; *10)* $\mathbb{C}_\pi B$;
2) $A \cap B \cap C$; *5)* $B - C$; *8)* $C - B$; *11)* $\mathbb{C}_\pi C$.
3) $A - B$; *6)* $B - A$; *9)* $\mathbb{C}_\pi A$;

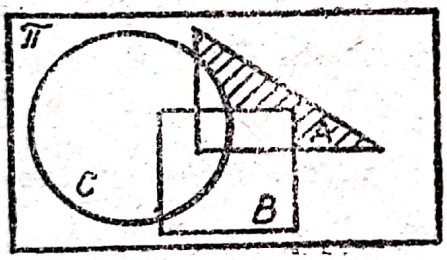
Răspuns.

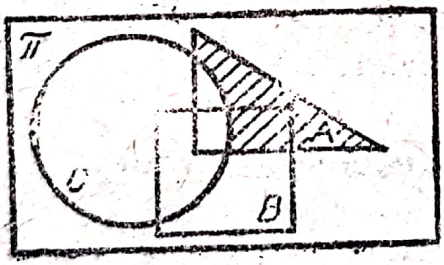
Scanned with OKEN Scanner

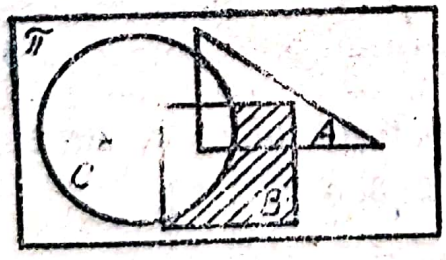
Fig. 9

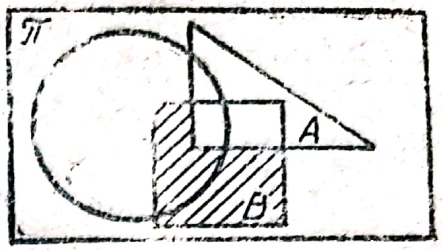
1


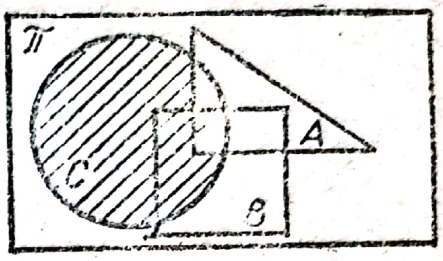
2


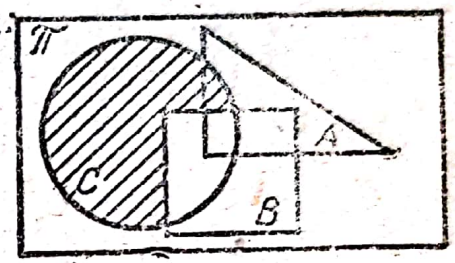
3


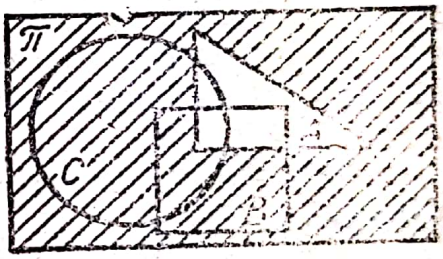
4


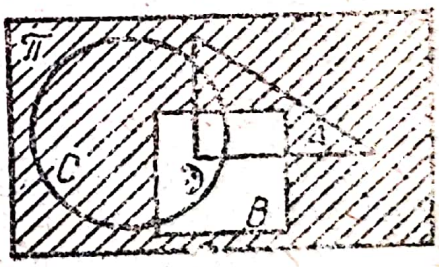
5


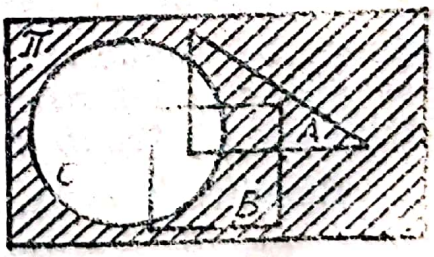
6


7


8


9


10


11


Scanned with OKEN Scanner

150. *Fie* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *și* $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, *părți ale mulțimii* N^*.

Folosind simbolurile $\cup$, $\cap$, $-$ (*diferența*), C (*complementara*), *exprimați cu ajutorul lui* A, B *și* N^* *mulțimile*:

1) $\{5, 6, 7\}$;
2) $\{1, 2, 3, 4\}$;
3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
4) $\{8, 9, 10 \ldots\}$;
5) $\{8, 9, 10\}$;
6) $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, \ldots\}$;
7) $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10\}$.

Răspuns.

1) $\{5, 6, 7\} = A \cap B$;
2) $\{1, 2, 3, 4\} = A - B$;
3) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = A \cup B$;
4) $\{8, 9, 10 \ldots\} = \mathbf{C}_{N^*}A$;
5) $(8, 9, 10\} = B - A$;
6) $\{1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, \ldots\} = \mathbf{C}_{N^*}B$;
7) $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10\} = (A - B) \cup (B - A)$.

Aceste exprimări nu sînt unice. De exemplu $\{1, 2, 3, 4\} = A - B = A \cap \mathbf{C}_{N^*}B$ etc.

151. *Să se determine mulțimile* A *și* B *care satisfac condițiile*:

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
2. $A \cap B = \{1, 2\}$;
3. $A - B = \{5\}$.

Soluție.

1 și 2 fac parte din ambele mulțimi, căci aparțin intersecției (condiția 2), $5 \in A$ și $5 \notin B$ (datorită condiției 3).

Să arătăm că 3, 4, 6, 7 fac parte numai din B. Într-adevăr, datorită condițiilor 1 și 2, elementul 3 aparține uneia singure dintre mulțimile A, B; dacă $3 \in A$, atunci $3 \notin B$ (astfel 3 ar aparține intersecției) și deci $3 \in A - B$, ceea ce este fals; rezultă $3 \in B$. Analog se arată că 4, 6 și 7 fac parte din B.

Rezultă $A = \{1, 2, 5\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Scanned with OKEN Scanner

152. *Să se determine mulțimea E și părțile sale A, B știind că sînt îndeplinite condițiile:*

a) $\mathbf{C}_E A = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}$.
b) $\mathbf{C}_E B = \{2, 6, 18, 20\}$,
c) $A \cup B = \{1, 5, 6, 9, 13, 14\}$.

Soluție.

Din c) rezultă:

$(1 \in A$ sau $1 \in B)$ și $1 \in E$ (căci $A \subset E$, $B \subset E$), și cum $1 \notin \mathbf{C}_E A$ (condiția a)) și $1 \notin \mathbf{C}_E B$ (condiția b)), rezultă

$1 \in A$ și $1 \in B$ și $1 \in E$;

$(5 \in A$ sau $5 \in B)$ și $5 \in E$ și deoarece $5 \in \mathbf{C}_E A$, rezultă $5 \in E$ și $5 \notin A$ și $5 \in B$ (căci $5 \in A \cup B$);

$(6 \in A$ sau $6 \in B)$ și $6 \in E$ și deoarece $6 \in \mathbf{C}_E B$, rezultă $6 \in E$ și $6 \notin B$ și $6 \in A$;

$(9 \in A$ sau $9 \in B)$ și deoarece $9 \in \mathbf{C}_E A$, rezultă $9 \in E$ și $9 \notin A$ și $9 \in B$;

$(13 \in A$ sau $13 \in B)$ și $13 \in E$ și deoarece $13 \in \mathbf{C}_E A$, rezultă $13 \in E$ și $13 \notin A$ și $13 \in B$;

$(14 \in A$ sau $14 \notin B)$ și $14 \in E$ și cum $14 \notin \mathbf{C}_E A$ și $14 \notin \mathbf{C}_E B$. rezultă $14 \in A$ și $14 \in B$;

Așadar $A = \{1, 6, 14\}$ și $B = \{1, 5, 9, 13, 14\}$.

Din $\mathbf{C}_E A = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}$ rezultă $E - \{1, 6, 14\} = \{2, 5, 9, 13, 18, 20\}$ și deci $E = \{1, 6, 14\} \cup \{2, 5, 9, 13, 18, 20\} = \{1, 2, 5, 6, 9, 13, 14, 18, 20\}$.

Mulțimile astfel găsite verifică condițiile cerute.

153. *Dacă notăm cu A o mulțime de puncte din planul T, să se determine o altă mulțime de puncte X a planului T, astfel ca $A - X = \varnothing$.*

Să se rezolve ecuația $A - X = \varnothing$, unde A și X sînt părți ale mulțimii T, A avînd cel puțin un element.

Răspuns.

Porțiunea X haşurată vertical (vezi fig. 10) și conținînd porțiunea A (cu pătrățele), satisface condiția $A - X = \varnothing$, căci nu există

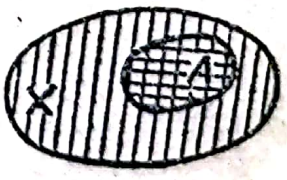


Fig. 10

puncte din A care să nu aparțină lui X. Există o infinitate de porțiuni ale planului care conțin porțiunea A, deci o infinitate de mulțimi satisfăcînd $A - X = \emptyset$.

Pentru a rezolva ecuația $A - X = \emptyset$, vom arăta că $A \subset X$. Într-adevăr, deoarece A nu este vidă, există $a \in A$. Să arătăm că $a \in X$. Dacă $a \notin X$, atunci din $a \in A$ și $a \notin X$ ar rezulta $a \in A - X$, adică mulțimea $A - X$ nu ar fi vidă, conținînd pe a, ceea ce contrazice $A - X = \emptyset$. Am arătat că $a \in A \Rightarrow a \in X$, adică $A \subset X$. Rezultă că orice parte a mulțimii notate T, conținînd A, este soluție a ecuației.

154. *Să se rezolve ecuația* $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$.
Să se arate apoi că ecuația $A \cup X = B$ *unde* $A \subset B$ *și* $A \neq \emptyset$, *este echivalentă cu* $B - A \subset X \subset B$. *Ce se întîmplă în cazul* $A \not\subset B$? *Dar* $A = B$?

Soluție.

Ecuația $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$ este echivalentă cu $\{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2, 3\}$ și $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2\} \cup X$; din prima incluziune rezultă:
$X \subset \{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2, 3\}$, deci $X \subset \{1, 2, 3\}$; reciproc, evident $X \subset \{1, 2, 3\} \Rightarrow [\{1, 2\} \cup X] \subset \{1, 2, 3\}$.

Din $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2\} \cup X$ rezultă $3 \in X$ și reciproc.

Ecuația propusă este deci echivalentă cu $X \subset \{1, 2, 3\}$ și $3 \in X$. Oricare submulțime a lui $\{1, 2, 3\}$ care conține pe 3, este soluție a ecuației date, deci $X = \{1, 2, 3\}$ sau $X = \{1, 3\}$ sau $X = \{2, 3\}$ sau $X = \{3\}$.

Fie $A \neq B$, $A \subset B$, $A \neq \emptyset$. Ecuația $A \cup X = B$ este echivalentă cu $A \cup X \subset B$ și $B \subset A \cup X$. Din $A \cup X \subset B$ rezultă $X \subset A \cup X \subset B$, deci $X \subset B$ și reciproc ($A \subset B$ și $X \subset B$) $\Rightarrow A \cup X \subset B$.

Pentru a avea $B \subset A \cup X$ trebuie ca oricare ar fi $b \in B$ să avem $b \in A \cup X$; există posibilitățile următoare: ($b \in B$ și $b \in A$) sau ($b \in B$ și $b \notin A$); în primul caz, evident $b \in A \cup X$, iar în cazul al doilea, deoarece $b \notin A$, pentru a avea $b \in A \cup X$, trebuie ca $b \in X$ și deci ($b \in B$ și $b \notin A$) $\Rightarrow b \in X$, adică $b \in B - A \Rightarrow b \in X$, sau $B - A \subset X$. Reciproc, dacă $B - A \subset X$, atunci $B \subset A \cup X$.

Scanned with OKEN Scanner

puncte din A care să nu aparțină lui X. Există o infinitate de porțiuni ale planului care conțin porțiunea A, deci o infinitate de mulțimi satisfăcînd $A - X = \emptyset$.

Pentru a rezolva ecuația $A - X = \emptyset$, vom arăta că $A \subset X$. Într-adevăr, deoarece A nu este vidă, există $a \in A$. Să arătăm că $a \in X$. Dacă $a \notin X$, atunci din $a \in A$ și $a \notin X$ ar rezulta $a \in A - X$, adică mulțimea $A - X$ nu ar fi vidă, conținînd pe a, ceea ce contrazice $A - X = \emptyset$. Am arătat că $a \in A \Rightarrow a \in X$, adică $A \subset X$. Rezultă că orice parte a mulțimii notate T, conținînd A, este soluție a ecuației.

154. *Să se rezolve ecuația* $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$.
Să se arate apoi că ecuația $A \cup X = B$ *unde* $A \subset B$ *și* $A \neq \emptyset$, *este echivalentă cu* $B - A \subset X \subset B$. *Ce se întîmplă în cazul* $A \not\subset B$? *Dar* $A = B$?

Soluție.
Ecuația $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3\}$ este echivalentă cu $\{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2, 3\}$ și $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2\} \cup X$; din prima incluziune rezultă :
$X \subset \{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2, 3\}$, deci $X \subset \{1, 2, 3\}$; reciproc, evident $X \subset \{1, 2, 3\} \Rightarrow [\{1, 2\} \cup X] \subset \{1, 2, 3\}$.
Din $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2\} \cup X$ rezultă $3 \in X$ și reciproc.
Ecuația propusă este deci echivalentă cu $X \subset \{1, 2, 3\}$ și $3 \in X$. Oricare submulțime a lui $\{1, 2, 3\}$ care conține pe 3, este soluție a ecuației date, deci $X = \{1, 2, 3\}$ sau $X = \{1, 3\}$ sau $X = \{2, 3\}$ sau $X = \{3\}$.
Fie $A \neq B$, $A \subset B$, $A \neq \emptyset$. Ecuația $A \cup X = B$ este echivalentă cu $A \cup X \subset B$ și $B \subset A \cup X$. Din $A \cup X \subset B$ rezultă $X \subset A \cup X \subset B$, deci $X \subset B$ și reciproc ($A \subset B$ și $X \subset B$) $\Rightarrow A \cup X \subset B$.
Pentru a avea $B \subset A \cup X$ trebuie ca oricare ar fi $b \in B$ să avem $b \in A \cup X$; există posibilitățile următoare: ($b \in B$ și $b \in A$) sau ($b \in B$ și $b \notin A$); în primul caz, evident $b \in A \cup X$, iar în cazul al doilea, deoarece $b \notin A$, pentru a avea $b \in A \cup X$, trebuie ca $b \in X$ și deci ($b \in B$ și $b \notin A$) $\Rightarrow b \in X$, adică $b \in B - A \Rightarrow b \in X$, sau $B - A \subset X$. Reciproc, dacă $B - A \subset X$, atunci $B \subset A \cup X$.

Scanned with OKEN Scanner

într-adevăr, fie $b \in B$; avem ($b \in B$ și $b \in A$) sau ($b \in B$ și $b \notin A$); în primul caz, evident $b \in A \cup X$, iar în cazul al doilea ($b \in B$ și $b \notin A$) $\Leftrightarrow b \in B - A$ și cum $B - A \subset X$ rezultă $b \in X$ și deci $b \in A \cup X$.

Ecuația propusă este satisfăcută deci numai de mulțimile X îndeplinind condițiile $B - A \subset X \subset B$.

Dacă $A \not\subset B$, ecuația nu are soluții.

Dacă $A = B \neq \emptyset$, echivalența se păstrează. Ecuația devine $A \cup X = A$ și este verificată de oricare parte X a lui A.

Dacă $A = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, atunci $X = B$ este singura soluție.

155. *Să se verifice că*

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B),$$

dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *și* $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Să se demonstreze apoi egalitatea, A și B fiind mulțimi oarecare nevide și $A \neq B$.

Dacă măcar una din mulțimile A și B este vidă, mai este adevărată egalitatea ?

Dar dacă $A = B$ *?*

Răspuns.

$A - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{5, 6\}$, $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 5, 6\}$.

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$, $(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 5, 6\}$, de unde rezultă egalitatea din enunț.

Fie $x \in (A - B) \cup (B - A)$ și arătăm că $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$. Dacă $x \in (A - B) \cup (B - A)$, atunci $x \in A - B$ sau $x \in B - A$; dacă $x \in A - B$, atunci $x \in A$ și $x \notin B$; aparținînd lui A, x aparține și lui $A \cup B$; deoarece $x \notin B$, avem și $x \notin A \cap B$. Din $x \in A \cup B$ și $x \notin A \cap B$, rezultă $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$. La același rezultat se ajunge și în cazul $x \in B - A$.

Reciproc, să arătăm că dacă $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$, atunci $x \in (A - B) \cup (B - A)$. Într-adevăr, dacă $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$, atunci $x \in A \cup B$ și $x \notin A \cap B$. Aparținînd

reuniunii, x aparține lui A sau lui B; neaparținînd intersecției, $x \notin A$ sau $x \notin B$. Din $[(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [(x \notin A) \vee (x \notin B)]$ rezultă: $[(x \in A) \wedge (x \notin A) \vee [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \vee [(x \in B) \wedge (x \notin A)] \vee [(x \in B) \wedge (x \notin B)]$, de unde obținem $[(x \in A) \wedge (x \notin B)] \vee [(x \in B) \wedge (x \notin A)]$, adică $(x \in A - B) \vee (x \in B - A)$, deci $x \in (A - B) \cup (B - A)$.

Din incluziunile $(A - B) \cup (B - A) \subset (A \cup B) - (A \cap B)$ și $(A \cup B) - (A \cap B) \subset (A - B) \cup (B - A)$ rezultă egalitatea din enunț.

Egalitatea este adevărată și cînd una din mulțimi (sau chiar amîndouă) este mulțimea vidă.

De asemenea, în cazul $A = B$, egalitatea se păstrează.

156. *a) Să se arate, folosindu-se un exemplu, că în general egalitatea* $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$, *este falsă (reuniunea nu este distributivă față de diferență).*

b) Să se demonstreze că egalitatea de mai sus este adevărată atunci și numai atunci cînd $A = \varnothing$.

Soluție.

a) Fie $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{4, 5\}$. Avem $A \cup (B - C) = \{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$ și $(A \cup B) - (A \cup C) = \{1, 2, 3. 4\} - \{1, 2, 4, 5\} = \{3\}$. Deci $A \cup (B - C) \neq (A \cup B) - (A \cup C)$.

b) Dacă $A = \varnothing$, egalitatea este adevărată: $A \cup (B - C) = \varnothing \cup (B - C) = B - C$, $(A \cup B) - (A \cup C) = (\varnothing \cup B) - (\varnothing \cup C) = B - C$. Să presupunem că $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$ și $A \neq \varnothing$. În acest caz există $x \in A$.

Avem $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B - C) \Rightarrow x \in (A \cup B) - (A \cup C) \Rightarrow [(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge [x \notin (A \cup C)] \Rightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin A \cup C)] \vee [(x \in B) \wedge (x \notin A \cup C) \Rightarrow [(x \in A) \wedge (x \notin A) \wedge (x \notin C)] \vee [(x \in B) \wedge (x \notin A \wedge (x \notin C)] \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)$. Am obținut astfel contradicția $x \in A$ și $x \notin A$. Rezultă $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$ numai dacă $A = \varnothing$.

Scanned with OKEN Scanner

157. *Fie A și B părți ale unei mulțimi E. Să se demonstreze că*

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\complement_E B \subset \complement_E A)$$

și apoi să se verifice proprietatea reprezentînd A și B prin mulțimi de puncte din plan.

Soluție.

Să presupunem A și B nevide și $A \neq E$, $B \neq E$.

Deoarece $A \subset B$, avem $x \in A \Rightarrow x \in B$ și dacă $x \notin B$, atunci $x \notin A$.

$$x \in \complement_E B \Rightarrow (x \notin B) \wedge (x \in E) \Rightarrow (x \notin A) \wedge (x \in E) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in \complement_E A \text{ adică } \complement_E B \subset \complement_E A.$$

Dacă $\complement_E B \subset \complement_E A$, atunci $x \notin \complement_E A \Rightarrow x \notin \complement_E B$.

Avem $x \in A \Rightarrow x \notin \complement_E A \Rightarrow x \notin \complement_E B \Rightarrow x \in B$, deci $A \subset B$ și echivalența este demonstrată.

Proprietatea este adevărată și cînd una (sau mai multe) din condițiile $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \neq E$, $B \neq E$ nu este îndeplinită.

158. *Să se determine mulțimile A și B incluse în E, astfel ca:*

1. $A \Delta B = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$;
2. $A \cap B = \{1, 3\}$;
3. $\complement_E A = \{5, 6, 7, 9, 10\}$;
4. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Soluție.

Ținînd seama de condițiile 3, 4 și de faptul că $A \subset E$, obținem $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$. Din $A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ și $A \cap B = \{1, 3\}$ rezultă $A - B = \{2, 4, 8\}$ și deci $2 \notin B$, $4 \notin B$, $8 \notin B$.

Avem: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 4, 8\} \cup (B - A) = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$;

$5 \in \{2, 4, 8\} \cup (B - A) \Rightarrow 5 \in B - A \Rightarrow 5 \in B$ și analog $9 \in B$, $10 \in B$.

Deoarece $6 \notin A$, avem și $6 \notin B$ căci dacă $6 \in B$ atunci $6 \in B - A$ și ar rezulta $6 \in \{2, 4, 8\} \cup (B - A) = \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$, deci $6 \in \{2, 4, 5, 8, 9, 10\}$, ceea ce este fals; la fel $7 \notin B$.

Scanned with OKEN Scanner

Am obținut : $1 \in B$, $2 \notin B$, $3 \in B$, $4 \notin B$, $5 \in B$, $6 \notin B$, $7 \notin B$, $8 \notin B$, $9 \in B$. $10 \in B$ și deci $B = \{1, 3, 5, 9, 10\}$.

159. *Să se rezolve ecuațiile :*

1) $\{1, 2\} \Delta X = \{1, 2, 3\}$;
2) $A \Delta X = B$.

Soluție.

1) Avem : $\{1, 2\} \Delta X = \{1, 2, 3\} \Rightarrow \{1, 2\} \Delta (\{1, 2\} \Delta X) = \{1, 2\} \Delta \{1, 2, 3\} \Rightarrow (\{1, 2\} \Delta \{1, 2\}) \Delta X = \varnothing \cup \{3\} \Rightarrow \varnothing \Delta X = \{3\} \Rightarrow X = \{3\}^*$. Evident $X = \{3\}$ verifică ecuația $\{1, 2\} \Delta X = \{1, 2, 3\}$.

2) Avem : $A \Delta X = B \Rightarrow A \Delta (A \Delta X) = A \Delta B \Rightarrow (A \Delta A) \Delta X = A \Delta B \Rightarrow \varnothing \Delta X = A \Delta B \Rightarrow X = A \Delta B$; $X = A \Delta B \Rightarrow A \Delta X = A \Delta (A \Delta B) \Rightarrow A \Delta X = (A \Delta A) \Delta B \Rightarrow A \Delta X = \varnothing \Delta B \Rightarrow A \Delta X = B$, deci $A \Delta X = B \Leftrightarrow X = A \Delta B$.

160. *Să se găsească părțile A, B, C ale mulțimii* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, *care îndeplinesc simultan condițiile :*

1. $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
2. $A \cap B \cap C = \{4\}$;
3. $A - B = \{1, 2\}$;
4. $A - C = \{1, 3\}$;
5. $5 \notin A \cup B$.

Soluție.

Din condițiile 3 și 4 rezultă că A conține 1, 2, 3 și $1 \notin B$ $1 \notin C$, $2 \notin B$, $3 \notin C$. Tot din aceste condiții rezultă că $2 \in C$. Într-adevăr, dacă 2 n-ar aparține lui C, avînd în vedere că $2 \in A$ (condiția 3), am avea : $(2 \in A$ și $2 \notin C) \Rightarrow 2 \in A - C$, ceea ce contravine condiției 4, deci $2 \in C$.

Analog, $3 \in B$, căci dacă n-ar aparține am avea : $3 \notin B$ și $3 \in A$ (condiția 4), adică $3 \in A - B$, ceea ce contrazice condiția 3.

Din condiția 2 rezultă că toate mulțimile căutate conțin pe 4. Din condiția 5 se obține : $5 \notin A \cup B \Leftrightarrow$ non$(5 \in A \cup B) \Leftrightarrow$

* S-a folosit asociativitatea diferenței simetrice (vezi exercițiul nr. 537).

$\Leftrightarrow$ non $[(5 \in A) \vee (5 \in B)] \Leftrightarrow (\text{non } 5 \in A) \wedge (\text{non } 5 \in B) \Leftrightarrow (5 \notin A) \wedge (5 \notin B)$. Rezultă (ținînd seama și de condiția 1) $5 \in C$.

Am găsit deci mulțimile: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4,\}$, $C = \{2, 4, 5\}$.

161 *Să se găsească părțile A, B ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, care îndeplinesc simultan condițiile:*

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
2. $A - B = \{1, 4\}$;
3. $A \cap B \not\subset \{3, 4, 5\}$;
4. *Mulțimile A, B au același număr de elemente.*

Soluție.

Din condiția 2 rezultă $1 \in A$, $1 \notin B$, $4 \in A$, $4 \notin B$.

Din 1, 2, 3 rezultă: $2 \in A$ și $2 \in B$. Într-adevăr: $A \cap B \not\subset \{3, 4, 5\} \Leftrightarrow$ non $(A \cap B \subset \{3, 4, 5\}) \Leftrightarrow$ non $(x \in A \cap B \Rightarrow x \in \{3, 4, 5\}) \Leftrightarrow$ non (oricare ar fi $x \in A$ și $x \in B$, avem $x \in \{3, 4, 5\}) \Leftrightarrow$ (există x astfel că $x \in A$ și $x \in B$ și $x \notin \{3, 4, 5\}$) $(*)$.

Ținînd seama și de condiția 1, rezultă că acest element este 1 sau 2. Dar cum $1 \notin B$, rezultă că singurul element care satisface condițiile $(*)$ este 2 și deci $2 \in A$, $2 \in B$. Rămîne să stabilim și apartenența elementelor 3 și 5. Din condiția ca mulțimile căutate să aibă același număr de elemente, rezultă $3 \in B$ și $5 \in B$. Într-adevăr, distribuind numerele 3 și 5 celor două mulțimi A și B, cu respectarea condiției 3, obținem:

A	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$
B	$\{2, 3, 5\}$	$\{2\}$	$\{2, 5\}$	$\{2, 3\}$

Se observă că într-un singur caz mulțimile A, B au același număr de elemente, deci $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$.

162. *Să se găsească submulțimile A, B, C ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$, care îndeplinesc condițiile*

Scanned with OKEN Scanner

1. $1 \in A$;
2. $\{2, 4\} \cap B = \varnothing$;
3. $3 \in A \cap B \cap C$;
4. $4 \in A \cap C$;
5. $A \cap B \not\subset C$;
6. $B \cup C \not\subset A$;
7. $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$.

Soluție.

A, B, C fiind părți ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$, elementele lor sînt printre elementele 1, 2, 3, 4.

Scriind 6, ca negație a propoziției $B \cup C \subset A$, obținem: $B \cup C \not\subset A \Leftrightarrow$ non $(B \cup C \subset A) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (Există $x \in B \cup C$ și $x \notin A$) $\Leftrightarrow$ (Există x astfel ca: $[(x \in B) \vee (x \in C)] \wedge (x \notin A) \Leftrightarrow$ [Există x astfel ca: $[(x \in B) \wedge (x \notin A)] \vee [(x \in C) \wedge (x \notin A)]$.

Vom arăta că numai elementul 2 satisface condiția 6. Într-adevăr, acest element nu poate fi 1, căci el ar trebui să nu aparțină lui A, or $1 \in A$ (condiția 1); de asemenea $4 \in A$ (condiția 4) și $3 \in A$ (condiția 3); rămîne ca elementul 2 să satisfacă condiția 6; deoarece $2 \notin B$ (condiția 2), rezultă $2 \notin A$ și $2 \in C$.

Condiția 5 se mai scrie: $A \cap B \not\subset C \Leftrightarrow$ non $(A \cap B \subset C) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ [există $x \in A$ și $x \in B$ astfel că $x \notin C$]. Din 5 rezultă deci că există cel puțin un element x astfel ca: $x \in A$ și $x \in B$ și $x \notin C$. (*). Acest element nu poate fi decît 1. Într-adevăr, 2 nu poate fi căci ca să satisfacă condițiile (*) ar trebui să aparțină lui A, apoi condiția (*) nu este satisfăcută de numărul 4 și nici de 3, deoarece din condiția 3 rezultă $3 \in C$. Rămîne ca elementul 1 să satisfacă (*), adică $1 \in A$ și $1 \in B$ și $1 \notin C$.

Deci $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$.

Mulțimile A, B, C verifică condițiile 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

163. *Să se găsească părțile A și B ale mulțimii* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *care îndeplinesc condițiile*:

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
2. $A \cap B = \{2, 3\}$;
3. $\{2, 3, 4, 5\} \cap B \not\subset A$;
4. $\{1, 4\} \cap A \not\subset B$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

Deoarece din condiția 2 rezultă că numerele 2 și 3 fac parte din ambele mulțimi rămîne să stabilim apartenența lui 1, 4 și 5.

Condiția 3 este negația propoziției : $\{2, 3, 4, 5\} \cap B \subset A$, adică a propoziției : „oricare ar fi $x \in \{2, 3, 4, 5\} \cap B$, avem $x \in A$“. Negarea se face astfel :

„Există un element al mulțimii $\{2, 3, 4, 5\} \cap B$ care nu aparține lui A“, sau ținînd seama că $2 \in A$, $3 \in A$ (condiția 2). „Există un element al mulțimii $\{4, 5\} \cap B$ care nu face parte din A“. Rezultă posibilitățile : ($4 \in B$ și $4 \notin A$) sau ($5 \in B$ și $5 \notin A$). Deci cel puțin unul din numerele 4, 5 aparține lui B și nu aparține lui A.

Analog, din condiția 4 rezultă că cel puțin unul din numerele 1, 4 aparține lui A și nu aparține lui B.

Iată tabelul tuturor cazurilor posibile (elementele comune 2, 3 nu sînt trecute în tabel) :

A	1	1,5	4	1,4
B	4,5	4	1,5	5

Deci mulțimile care satisfac condițiile din enunț sînt :

$\begin{cases} A = \{1, 2, 3\}, \\ B = \{2, 3, 4, 5\}; \end{cases}$ $\begin{cases} A = \{1, 2, 3, 5\}, \\ B = \{2, 3, 4\} \end{cases}$

$\begin{cases} A = \{2, 3, 4\} \\ B = \{1, 2, 3, 5\}; \end{cases}$ $\begin{cases} A = \{1, 2, 3, 4\} \\ B = \{2, 3, 5\} \end{cases}$

164. *Să se găsească părțile A, B, C ale mulțimii $\{1, 2, 3\}$, care satisfac simultan condițiile :*

1) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\}$;
2) $A \cap B \not\subset C$;
3) $A \cap C \not\subset B$;
4) $B \cap C = \{2\}$;
5) $1 \in B - C$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

3) este negația propoziției $A \cap C \subset B$, adică negația propoziției: „oricare ar fi $x \in A \cap C$, avem $x \in B$“; negînd obținem: „există $x \in A \cap C$ și $x \notin B$“, adică există x astfel ca: „$(x \in A) \wedge (x \notin B) \wedge (x \in C)$“. Acest element x nu poate fi 1 din cauza condiției 5), $(1 \in B) \wedge (1 \notin C)$; nici 2 nu poate fi, deoarece din condiția 4) rezultă $(2 \in B) \wedge$ $\wedge (2 \in C)$; mai rămîne numărul 3, care satisface condițiile $3 \in A$, $3 \notin B$, $3 \in C$.

Analog din condiția 2) se obține:

$A \cap B \not\subset C \Leftrightarrow$ non $(A \cap B \subset C) \Leftrightarrow$ „există un element x astfel ca: $(x \in A) \wedge (x \in B) \wedge (x \notin C)$“. Acest număr nu poate fi 2, deoarece $2 \in B$ și $2 \in C$ (condiția 4); nici 3 nu poate fi, deoarece din condiția 3) a rezultat $3 \notin B$; mai rămîne o singură posibilitate, anume:

$$(1 \in A) \wedge (1 \in B) \wedge (1 \notin C).$$

Am stabilit apartenența sau neapartenența elementelor 1 și 3 la cele 3 mulțimi; din condițiile impuse nu rezultă dacă 2 aparține sau nu mulțimii A. Este deci posibil și $2 \in A$, dar și $2 \notin A$.

Am găsit deci următoarele două posibilități:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$ sau
$A = \{1, 3\}$ $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$.

165. *Să se găsească submulțimile A și B ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ care satisfac condițiile:*

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
2. $A \cap B = \{1, 2\}$.
3. $5 \notin A - B$.
4. *A are mai multe elemente decît B.*

Soluție.

Elementele 1 și 2 fac parte din ambele mulțimi (condiția 2). Rămîne să stabilim apartenența lui 3, 4 și 5

Condiția 3 este negația propoziției $5 \in A - B$, deci $5 \notin A - B \Leftrightarrow$ non $(5 \in A - B) \Leftrightarrow$ non $[(5 \in A) \wedge (5 \notin B)] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ (non $5 \in A$) $\vee$ (non $5 \notin B$) $\Leftrightarrow$ $(5 \notin A) \vee (5 \in B)$. Dar în

Scanned with OKEN Scanner

condițiile 1 și 2, dacă $5 \notin A$, atunci $5 \in B$ și reciproc, deci $5 \notin A$ și $5 \in B$.

Să arătăm că 3 și 4 aparțin lui A. Într-adevăr, distribuind numerele 3 și 4 celor două mulțimi, cu respectarea condiției 2, există posibilitățile următoare:

A	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$
B	$\{1, 2, 5, 4\}$	$\{1, 2, 5, 3\}$	$\{1, 2, 5, 3, 4\}$	$\{1, 2, 5\}$

Se constată că numai în ultimul caz A are mai multe elemente decît B (condiția 4), deci $3 \in A$, $4 \in A$ și $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$.

166. *Să se determine mulțimile nevide A și B părți ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ care îndeplinesc simultan condițiile:*

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

2) *Propoziția „Există $x \in A$ și $y \in B$ astfel că $\{x\} \cup \{y\} \not\subset (A \cap B)$" este falsă.*

Soluție.

Dacă propoziția de la punctul 2 este falsă, atunci negația ei este adevărată. Negînd obținem următoarea propoziție adevărată:

„Oricare ar fi $x \in A$ și $y \in B$ avem $\{x\} \cup \{y\} \subset (A \cap B)$".

Avem: $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B) \Rightarrow x \in B$, deci $A \subset B$; de asemenea $y \in B \Rightarrow y \in A \cap B \Rightarrow (y \in A) \wedge (y \in B) \Rightarrow y \in A$, deci $B \subset A$.

Din $A \subset B$ și $B \subset A$ rezultă $A = B$.

Din prima condiție a enunțului și din $A = B$ rezultă

$$A \cup B = A \cup A = A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

deci

$$A = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Evident, mulțimile găsite satisfac condițiile din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

167. *Să se determine părțile A și B ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ care satisfac simultan condițiile:*

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
2. $A \cap B = \{1, 2, 3\}$;
3. $A - B = \{4, 6\}$.

Soluție.

Elementele mulțimilor A și B se găsesc printre elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (condiția 1).

Elementele 1, 2, 3 aparțin ambelor mulțimi (condiția 2); rămîne să stabilim apartenența sau neapartenența elementelor 4, 5, 6.

Din condiția 3 rezultă $4 \in A$, $6 \in A$, $4 \notin B$, $6 \notin B$.

5 aparține numai uneia dintre mulțimile A, B (condițiile 1, 2); dacă $5 \in A$ și $5 \notin B$, atunci ar rezulta $5 \notin A - B$, ceea ce este fals căci $A - B = \{4, 6\}$; rămîne doar posibilitatea $5 \notin A$, $5 \in B$ și $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$, mulțimi care verifică condițiile din enunț.

168. *Să se determine părțile A și B ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$, știind că avem simultan:*

1. $A \cap B \supset \{1, 2\}$;
2. $A - B \subset \{1, 2, 4\}$;
3. $\{1, 2, 3\} \not\subset B$.
4. *A are mai puține elemente decît B.*

Soluție.

Elementele mulțimilor A și B se găsesc printre elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

Din condiția 1 rezultă: $1 \in A$, $1 \in B$, $2 \in A$, $2 \in B$.

Din condițiile 1, 3 rezultă $3 \notin B$; datorită condiției 2 avem și $3 \notin A$ (altfel din $3 \in A$ și $3 \notin B$ ar rezulta $3 \in A - B$, ceea ce contravine condiției $A - B \subset \{1, 2, 4\}$). Am obținut rezultatul următor: 1 și 2 fac parte din ambele mulțimi A și B, iar 3 nu aparține nici lui A și nici lui B; mai rămîne elementul 4.

Deoarece B are mai multe elemente decît A (condiția 4), trebuie să avem $4 \notin A$, $4 \in B$. Am obținut astfel:

Scanned with OKEN Scanner

$$A = \{1, 2\},\ B = \{1, 2, 4\},$$

mulțimi care verifică condițiile din enunț.

169. *Fie A și B două părți nevide ale mulțimii E($A \neq E$, $B \neq E$). Ce relație există între A și B în fiecare din cazurile următoare (unde $x \in E$) ?*

a) $x \in A \Rightarrow x \in B$;
b) $x \in A \Rightarrow x \notin B$;
c) $x \notin A \Rightarrow x \in B$;
d) $x \notin A \Rightarrow x \notin B$;
e) $x \in A \Leftrightarrow x \in B$;
f) $x \in A \Leftrightarrow x \notin B$;
g) $x \notin A \Leftrightarrow x \notin B$;
h) $x \in A \not\Rightarrow x \notin B$;
i) $x \notin A \not\Rightarrow x \in B$;
j) $x \notin A \not\Rightarrow x \notin B$;
k) $x \in A \not\Leftrightarrow x \in B$.

Răspuns.

a) $A \subset B$;
b) $A \cap B = \varnothing$;
c) $\complement_E A \subset B$;
d) $B \subset A$;
e) $A = B$;
f) $A = \complement_E B$;
g) $A = B$;
z) $A \cap B \neq \varnothing$
i) $\complement_E A \not\subset B$ (sau $A \cup B \neq E$);
j) $B \not\subset A$;
k) $A \neq B$;

170. *Să se găsească părțile A, B, C ale mulțimii $\{1, 2, 3. 4, 5, 6\}$ astfel ca următoarele condiții să fie îndeplinite simultan:*

1) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
2) $A \cap B \cap C = \{5\}$;
3) $A - B = \{1, 3, 6\}$;
4) $A - C = \{1, 2, 4\}$.

Soluție.

Elementele mulțimilor A, B, C se găsesc printre elementele mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și fiecare element al acestei mulțimi aparține măcar uneia dintre mulțimile A, B, C.

Avem:

$1 \in A$, $1 \notin B$, $1 \notin C$ (condițiile 3, 4);

$2 \in A$, $2 \notin C$ (condiția 4), $2 \in B$ (dacă am avea $2 \notin B$, cum $2 \in A$, ar rezulta $2 \in A - B$, ceea ce contrazice condiția 3);

$3 \in A$, $3 \notin B$ (condiția 3), $3 \in C$ (dacă 3 nu ar aparține lui C atunci cum $3 \in A$, am avea $3 \in A - C$, ceea ce contrazice condiția 4):

Scanned with OKEN Scanner

$4 \in A$, $4 \notin C$, $4 \in B$ (aceeași justificare ca pentru elementul 2);

$5 \in A$, $5 \in B$, $5 \in C$ (condiția 2);

$6 \in A$, $6 \notin B$, $6 \in C$ (aceeași justificare ca pentru elementul 3).

Deci:

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 5\}$, $C = \{3, 5, 6\}$, mulțimi care verifică egalitățile din enunț.

171. *Să se determine mulțimea X știind că:*

$$\{1, 2, 3\} \in \mathcal{P}(X);$$
$$\{3, 4, 5\} \in \mathcal{P}(X);$$
$$\{4, 5, 6\} \in \mathcal{P}(X);$$
$$X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Răspuns.

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

172. *Fie mulțimea $E = \{x, y, z, u, v\}$. Să se determine x, y, z, u, v știind că următoarele condiții sînt îndeplinite simultan:*

$$\{x, y, 1\} \in \mathcal{P}(E);$$
$$\{y, z, 2\} \in \mathcal{P}(E);$$
$$\{u, 3, 4\} \in \mathcal{P}(E);$$
$$\{z, u, 5\} \in \mathcal{P}(E);$$
$$\{x, y, 4, 5\} \in \mathcal{P}(E).$$

(elementele scrise între acolade se presupun diferite).

Răspuns.

$$x = 2,\ y = 3,\ z = 4,\ u = 1,\ v = 5.$$

173. *Fie mulțimea $E = \{a, b, c\}$. Să se determine mulțimea $\mathcal{P}(E)$. Ce relație există între $\{a, b\}$ și $\mathcal{P}(E)$? Dar între $\varnothing$ și $\mathcal{P}(E)$? Dar între $\{\varnothing, \{a\}\}$ și $\mathcal{P}(E)$? Dar între $\{\{a, b\}\}$ și $\mathcal{P}(E)$?*

Răspuns.

$\mathcal{P}(E) = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$;
$\{a, b\} \in \mathcal{P}(E)$; $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$; $\{\varnothing, \{a\}\} \subset \mathcal{P}(E)$; $\{\{a, b\}\} \subset \subset \mathcal{P}(E)$.

Scanned with OKEN Scanner

174. *Fie* $E = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 3\}$.

a) *Să se determine* $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(B)$, $\mathcal{P}(C)$ *și să se precizeze câte două elemente și câte două submulțimi ale acestor mulțimi.*

b) *Să se determine* $\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C)$ *și mulțimea* $\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C)$.

c) *Ce relație există între* $\mathcal{P}(B)$, *respectiv* $\mathcal{P}(C)$, *și* $\mathcal{P}(E)$ *?*

Răspuns.

a) $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;
$\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;
$\mathcal{P}(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$;
$\{1\} \in \mathcal{P}(E)$; $\{1, 3\} \in \mathcal{P}(E)$; $\varnothing \in \mathcal{P}(B)$; $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(B)$;
$\{3\} \in \mathcal{P}(C)$; $\{1, 3\} \in \mathcal{P}(C)$; $\{\{1, 3\}, \{2, 3\}\} \subset \mathcal{P}(E)$;
$\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(E)$;
$\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(B)$; $\{\{1, 2\}\} \subset \mathcal{P}(B)$; $\{\{1\}\} \subset \mathcal{P}(C)$; $\{\{2\}\} \subset \mathcal{P}(C)$;

b) $\mathcal{P}(B) \cup \mathcal{P}(C) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$;
$\mathcal{P}(B) \cap \mathcal{P}(C) = \{\varnothing, \{1\}\}$;

c) $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(E)$; $\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{P}(E)$.

175. *Să se determine mulțimea* E, *știind că:*

a) $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(E)$;
b) $\{3, 4\} \in \mathcal{P}(E)$;
c) $E \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

Răspuns.

$\{1, 2\} \in \mathcal{P}(E)$ și $\{3, 4\} \in \mathcal{P}(E) \Rightarrow \{1, 2\} \subset E$ și $\{3, 4\} \subset E \Rightarrow \{1, 2, 3, 4\} \subset E$

Ultima relație împreună cu condiția c) dă

$$E = \{1, 2, 3, 4,\}.$$

176. *Fie mulțimea* $E = \{x, y, z, t\}$. *Să se determine* x, y, z, t, *știind că următoarele condiții sînt îndeplinite simultan:*

a) $\{x, y, 1\} \in \mathcal{P}(E)$;
b) $\{1, 2, z\} \in \mathcal{P}(E)$;
c) $\{x, y, 3\} \in \mathcal{P}(E)$;
d) $\{y, t, 4\} \in \mathcal{P}(E)$.

Scanned with OKEN Scanner

(Elementele scrise între acolade se presupun diferite).

Răspuns.

Din a) rezultă $\{x, y, 1\} \subset E$ și deci „$1 \in E$ și $x \neq 1$, $y \neq 1$, adică $z = 1$ sau $t = 1$.

Din b) rezultă $\{1, 2, z\} \subset E$, și deci $1 \in E$ și $2 \in E$ și $z \neq 1$ și $z \neq 2$. Deoarece $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$, rezultă $t = 1$. Cum $z \in E$ și $z \neq 2$ și $t = 1$, rezultă $x = 2$ sau $y = 2$.

Din c) rezultă $\{x, y, 3\} \subset E$ și prin urmare $3 \in E$. Deoarece $x \neq 3$, $y \neq 3$ și $t \neq 3$ $(t = 1)$, rezultă $z = 3$.

Din d) rezultă $\{y, t, 4\} \subset E$, deci $4 \in E$. Deoarece $z \neq 4$ $(z = 3)$, $y \neq 4$, $t \neq 4$, rezultă $x = 4$. Deoarece $2 \in E$ (condiția b) și $x \neq 2$ $(x = 4)$, $z \neq 2 (z = 3)$, $t \neq 2$ $(t = 1)$, avem $y = 2$. Așadar, $x = 4$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 1$.

177. *Să se arate că:*

$$\text{a) } A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B);$$
$$\text{b) } A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B).$$

Soluție.

a) Fie $A \subset B$ și $X \in \mathcal{P}(A)$, adică $X \subset A$; cum $A \subset B$, rezultă $X \subset B$, adică $X \in \mathcal{P}(B)$. Așadar $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Fie acum $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ și $x \in A$. În acest caz $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ și deoarece $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$, rezultă $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$, adică $\{x\} \subset B$, ceea ce înseamnă $x \in B$. Deci $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subset B$. Cele două implicații demonstrează echivalența de la punctul a).

b) $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ și $B \subset A \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ și $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A)$ (punctul a) $\Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

178. *Să se arate că:* $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.
Incluziunea în sens invers este adevărată?

Soluție.

$X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$ sau $X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \subset A$ sau $X \subset B \Rightarrow X \subset A \cup B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Deci $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Incluziunea $\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ nu este adevărată, după cum rezultă din exemplul: $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, în care $\{1, 2, 3\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, dar $\{1, 2, 3\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ căci $\{1, 2, 3\} \notin \mathcal{P}(A)$ și $\{1, 2, 3\} \notin \mathcal{P}(B)$.

Scanned with OKEN Scanner

Altă soluție.

$A \subset A \cup B$ și $B \subset A \cup B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ și $\mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B) \Rightarrow \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

179. *Să se arate că*

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

Soluție.

$A \cap B \subset A$ și $A \cap B \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A)$ și $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(B) \Rightarrow \mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

$X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$ și $X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \subset A$ și $X \subset B \Rightarrow X \subset A \cap B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cap B)$ și deci $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$.

Cele două incluziuni demonstrează egalitatea.

180. *Să se demonstreze că* $\mathcal{P}(A - B) \subset \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ *și să se verifice, folosind un exemplu, că incluziunea în sens invers nu este adevărată.*

Soluție.

$X \in \mathcal{P}(A - B) \Rightarrow X \subset A - B \Rightarrow X \subset A$ și $X \not\subset B \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A)$ și $X \notin \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ și deci $\mathcal{P}(A-B) \subset \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$.

Dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4\}$, atunci $\{1, 3\} \in \mathcal{P}(A)$ și $\{1, 3\} \notin \mathcal{P}(B)$ și deci $\{1, 3\} \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$. Deoarece $\{1, 3, \} \not\subset A - B$, adică $\{1, 3\} \notin \mathcal{P}(A - B)$, rezultă că, în general, incluziunea $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A - B)$ este falsă.

181. *În ce caz*

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \text{ ?}$$

Soluție.

Deoarece

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B),$$

egalitatea din enunț are loc dacă și numai dacă

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B),$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce este echivalent cu:

$$X \subset A \cup B \Rightarrow X \subset A \text{ sau } X \subset B.$$

Această implicație este însă echivalentă cu:

$$A \subset B \text{ sau } B \subset A \text{ (vezi ex. 136).}$$

În concluzie, egalitatea din enunț are loc dacă și numai dacă

$$A \subset B \text{ sau } B \subset A.$$

182. *Să se rezolve ecuațiile*:

a) $\{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2\} \cap X$;
b) $\{1, 2, 3,\} \cup X = \{1, 2, 3, 4\} \cap X$;
c) $\{a, b, c\} \cup X = \{a, b, d\} \cap X$.
d) *Câte soluții are ecuația* $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap X$? *Dar ecuația* $\{1, 2, 3 \ldots, m\} \cup X = \{1, 2, 3, \ldots, n\} \cap X$?

Soluție.

a) Fie $x \in X$. Deoarece $\{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2\} \cap X$, avem $x \in \{1, 2\} \cap X$, de unde rezultă $x \in \{1, 2\}$. Am arătat astfel că $X \subset \{1, 2\}$.

De asemenea avem și $\{1, 2\} \subset \{1, 2\} \cap X$, de unde rezultă $\{1, 2\} \subset X$.

Din $X \subset \{1, 2\}$ și $\{1, 2\} \subset X$ rezultă $X = \{1, 2\}$, mulțime pentru care incluziunea din enunț este verificată.

b) Din egalitatea $\{1, 2, 3\} \cup X = \{1, 2, 3, 4\} \cap X$ rezultă $\{1, 2, 3\} \cup X \subset \{1, 2, 3, 4\} \cap X$ și deci $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\} \cap X$ și $X \subset \{1, 2, 3, 4\} \cap X$. Din prima incluziune se deduce $\{1, 2, 3\} \subset X$ iar din a doua $X \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

Există numai posibilitățile: $X = \{1, 2, 3\}$; $X = \{1, 2, 3, 4\}$, mulțimi care verifică ecuația din enunț.

c) Din $\{a, b, c\} \cup X = \{a, b, d\} \cap X$ rezultă
$\{a, b, c\} \cup X \subset \{a, b, d\} \cap X$, iar de aici
$\{a, b, c\} \subset \{a, b, d\}$ ceea ce este fals căci
$c \notin \{a, b, d\}$.

Ecuația nu are soluții.

d) Egalitatea $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap X$ este echivalentă cu $\{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap X$ și $\{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap X$.

Scanned with OKEN Scanner

Incluziunea a doua este însă verificată de oricare mulțime X (într-adevăr, avem evident $A \cup X \supset X \supset B \cap X$) și deci ecuația din enunț este echivalentă cu incluziunea:

$$\{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap X.$$

Aceasta este echivalentă cu:

$\{1, 2\} \cup X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $\{1, 2\} \cup X \subset X$ sau cu $X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și $\{1, 2\} \subset X$.

Pentru a găsi soluțiile ecuației din enunț, trebuie să găsim, deci, toate părțile mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ care conțin elementele 1 și 2.

Pentru aceasta este suficient să adăugăm elementele 1 și 2 la toate părțile mulțimii $\{3, 4, 5\}$. Cum $\{3, 4, 5\}$ are $2^3 = 8$ submulțimi, acesta este și numărul soluțiilor ecuației propuse.

Se demonstrează asemănător că ecuația $\{1, 2, \ldots, m\} \cup X = \{1, 2, 3, \ldots, n\} \cap X$ este echivalentă cu $X \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ și $\{1, 2, 3, \cdots, m\} \subset X$.

Dacă $m > n$, evident nu există X satisfăcînd cele două incluziuni.

Dacă $m \leqslant n$, pentru a găsi toate părțile mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ care conțin $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ este suficient să adăugăm elementele $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$ la fiecare parte a mulțimii $\{m + 1, m + 2, \ldots n\}$.

Cum mulțimea $\{m + 1, m + 2, \ldots, n\}$ are 2^{n-m} submulțimi, acesta este și numărul soluțiilor ecuației propuse.

183. *Fie E o mulțime finită cu n elemente.*

a) *Să se demonstreze că există 3^n cupluri (X_1, X_2) de părți ale lui E, astfel încît $X_1 \cup X_2 = E$.*

b) *Dacă notăm cu a_m $(m \geqslant 1)$ numărul de m-upluri $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ de părți ale lui E, astfel încît $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m = E$, atunci șirul a_m poate fi definit prin recurență în felul următor:*

$$a_1 = 1,$$
$$a_{m+1} = 2a_m + 1.$$

Să se arate că $a_m = 2^m - 1$ și să se deducă, în particular, rezultatul de la punctul a).

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

a) Egalitatea $X_1 \cup X_2 = E$ este echivalentă cu relația $\bar{X}_2 \subset X_1$. Dacă X_1 este o mulțime cu k elemente ($k = 0, 1, \ldots n$) atunci mulțimea X_2 poate fi aleasă în 2^k moduri pentru a îndeplini condiția $\bar{X}_2 \subset X_1$ (mulțimea X_1 are 2^k părți).

Deoarece există C_n^k ($k = 0, 1, \ldots, n$) mulțimi cu k elemente, rezultă că numărul căutat este $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k = (2+1)^n = 3^n$.

b) Fie $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m \cup X_{m+1} = E$ și să presupunem că mulțimea $E_k = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_m$ are k elemente. Cum mulțimea E_k poate fi aleasă în C_n^k moduri și fiecărei alegeri îi corespund a_m^k reprezentări de forma $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = E_k$ și ținînd seama că $X_{m+1} \subset E_k$, adică poate fi aleasă în 2^k moduri, deducem că $a_{m+1}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_m^k \cdot 2^k = (2a_m + 1)^n$.

Deci $a_{m+1} = 2\ a_m + 1$. Avem evident $a_1 = 1$.

Fie $a_m = b_m - 1$. Ținînd seama că $a_{m+1} = 2a_m + 1$, obținem $b_{m+1} - 1 = 2b_m - 2 + 1$, adică $b_{m+1} = 2b_m$, cu $b_1 = a_1 + 1 = 2$. Șirul b_m este o progresie geometrică cu rația 2.

Avem $b_m = b_1 \cdot 2^{m-1} = 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$. Din egalitatea $a_m = b_m - 1$, obținem $a_m = 2^m - 1$.

În cazul $m = 2$, avem $a_2 = 2^2 - 1 = 3$ și deci rezultatul de la punctul a) este 3^n.

184. *Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 3, 4\}$. Să se determine mulțimile: $A \times A$, $B \times B$, $A \times B$, $B \times A$, $(A \times A) \cap (B \times B)$, $(A \times A) \cup (B \times B)$ și să se precizeze cîte două elemente din fiecare mulțime. Este adevărată egalitatea $A \times B = B \times A$?*

Răspuns.

Avem:

$A \times A = \{(1, 1)\ (1, 2),\ (1, 3),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (2, 3),\ (3, 1),\ (3, 2),\ (3, 3)\}$; $(1, 1) \in A \times A$, $(1, 2) \in A \times A$;

$B \times B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$; $(2, 2) \in B \times B$, $(2, 3) \in B \times B$;

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$; $(1, 2) \in A \times B$, $(1, 3) \in A \times B$;

$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$; $(2, 1) \in B \times A$, $(2, 2) \in B \times A$;

$(A \times A) \cap (B \times B) = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ $(2, 2) \in (A \times A) \cap (B \times B)$, $(2, 3) \in (A \times A) \cap (B \times B)$;

$(A \times A) \cup (B \times B) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$, $(1, 1) \in (A \times A) \cup (B \times B)$; $(1, 2) \in (A \times A) \cup (B \times B)$.

$A \times B \neq B \times A$, căci de exemplu, $(1, 2) \in A \times B$ și $(1, 2) \notin B \times A$.

185. *Fie mulțimile* $A = \{1, 2, x\}$ *și* $B = \{3, 4, y\}$. *Să se determine* x *și* y *știind că* $\{1, 3\} \times \{2\} \subset A \times B$.

Răspuns.

Elementul $(3, 2) \in \{1, 3\} \times \{2\}$ și deoarece $\{1, 3\} \times \{2\} \subset A \times B$, rezultă $(3, 2) \in A \times B$, deci $3 \in A$ și $2 \in B$, de unde deducem $x = 3$, $y = 2$.

186. *Fie mulțimile* $A = \{x | x \in N^*, \ x \leqslant 3\}$ *și* $B = \{x | x \in N^*, \ 2 \leqslant x \leqslant 5\}$.

Să se scrie elementele mulțimilor:

$$A \times B, \ B \times A, \ (A \times B) - (B \times A).$$

Răspuns.

Avem:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, iar

$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\}$;

$B \times A = \{(2, 1, (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$;

$(A \times B) - (B \times A) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$.

187. *Să se nege propozițiile:*

$$P_1: \ (x, y) = (x', y');$$
$$P_2: \ (x, y) \in A \times B;$$

Scanned with OKEN Scanner

$$P_3 : A \times B = C \times D.$$

Răspuns.

$P_1 \Leftrightarrow x = x'$ și $y = y'$; non $P_1 \Leftrightarrow x \neq x'$ sau $y \neq y'$;
$P_2 \Leftrightarrow x \in A$ și $y \in B$; non $P_2 \Leftrightarrow x \notin A$ sau $y \notin B$;
non $P_3 \Leftrightarrow$ [există (x, y) cu $x \in A$ și $y \in B$, astfel încît $x \notin C$ sau $y \notin D$] sau [există (z, t) cu $z \in C$ și $t \in D$, astfel încît $z \notin A$ sau $t \notin B$].

188. *Să se determine în $N \times N$, 3 cupluri ale submulțimilor:*

$$S = \{(x, y) | x + y = 50\};$$
$$T = \{(x, y) | 2x - 3y = 10\}.$$

Să se scrie un element din $S \times T$ și un element din $T \times S$. Să se arate că $S \times T \neq T \times S$.

Răspuns.

Avem:

$$(1, 49) \in S, \quad (2, 48) \in S, \quad (3, 47) \in S \text{ și}$$
$$(8, 2) \in T, \quad (11, 4) \in T, \quad (14, 6) \in T$$

$((1, 49), (8, 2)) \in S \times T$ și $((8, 2), (1, 49)) \in T \times S$;
$S \times T \neq T \times S$, deoarece $((1, 49), (8, 2)) \in S \times T$ și $((1, 49), (8, 2)) \notin T \times S$, căci $(1, 49) \notin T$, deoarece

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 49 \neq 10.$$

189. *Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ și $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se determine:*

a) partea M a produsului cartezian $A \times B$ formată din elementele (x, y) satisfăcînd proprietatea $x + 3y = 10$.

b) partea N a produsului cartezian $A \times B$ formată din elementele (x, y) care satisfac proprietatea „există $z \in C$, astfel încît $x + 4y + z = 12$“.

c) partea P a produsului cartezian $A \times B$ formată din elementele (x, y) care satisface proprietatea „există $z \in C$ astfel încît:

$$3x + 2y + z = 12 \text{ și } 2x + y + z = 8\text{“}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

a) $M = \{(4, 2), (1, 3)\}$;
b) $N = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (5, 1)\}$;
c) $P = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.

190. *Să se demonstreze că*

$A \times B \subset C \times D \Leftrightarrow A \subset C$ *și* $B \subset D$, A, B, C, D *fiind mulțimi nevide.*

Să se deducă apoi că $A \times B = C \times D \Leftrightarrow A = C$ și $B = D$.

Răspuns.

Din $A \times B \subset C \times D$ rezultă: $(x, y) \in A \times B \Rightarrow (x, y) \in C \times D$, adică $x \in A$ și $y \in B \Rightarrow x \in C$ și $y \in D$, adică $x \in A \Rightarrow x \in C$, iar $y \in B \Rightarrow y \in D$, deci $A \subset C$ și $B \subset D$. Reciproc, din $A \subset C$ și $B \subset D$ rezultă: $(x \in A \Rightarrow x \in C)$ și $(y \in B \Rightarrow y \in D)$, adică $x \in A$ și $y \in B \Rightarrow x \in C$ și $y \in D$, deci $(x, y) \in A \times B \Rightarrow (x, y) \in C \times D$, adică $A \times B \subset C \times D$. Am arătat astfel că $A \times B \subset C \times D \Leftrightarrow A \subset C$ și $B \subset D$.

Dacă $A \times B = C \times D$, adică $A \times B \subset C \times D$ și $C \times D \subset A \times B$ atunci $A \subset C$ și $B \subset D$ și $C \subset A$ și $D \subset B$, adică $A = C$ și $B = D$.

191. *Să se arate că:*

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;
b) $(A \cup B) \times (C \cup D) \supset (A \times C) \cup (B \times D)$. *Incluziunea în sens invers este adevărată?*

Soluție.

a) $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \Leftrightarrow x \in (A \cap B)$ și $y \in (C \cap D) \Leftrightarrow x \in A$ și $x \in B$ și $y \in C$ și $y \in D \Leftrightarrow (x \in A$ și $y \in C)$ și $(x \in B$ și $y \in D) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times C$ și $(x, y) \in B \times D \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$.

b) $(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times D) \Rightarrow (x, y) \in (A \times C)$ sau $(x, y) \in (B \times D) \Rightarrow (x \in A$ și $y \in C)$ sau $(x \in B$ și $y \in D) \Rightarrow (x \in A$ sau $x \in B)$ și $(y \in C$ sau $y \in D) \Rightarrow x \in (A \cup B)$ și $y \in (C \cup D) \Rightarrow (x, y) \in (A \cup B) \times (C \cup D)$.

Scanned with OKEN Scanner

Incluziunea în sens invers este falsă. Într-adevăr, dacă: $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, $C = \{1, 2\}$, $D = \{1, 3\}$ atunci : $A \cup B = \{1, 2\}$, $C \cup D = \{1, 2, 3\}$, $(A \cup B) \times (C \cup D) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3,) (2, 1) (2, 2), (2, 3)\}$;
$A \times C = \{1\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1(1, 2)\}$; $B \times D = \{2\} \times \{1, 3\} = \{(2, 1), (2, 3)\}$;
$(A \times C) \cup (B \times D) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$.

Se vede că $(A \cup B) \times (C \cup D)$ conține elementul $(2, 2)$ care nu aparține mulțimii $(A \times C) \cup (B \times D)$ și deci $(A \cup B) \times (C \cup D) \not\subset (A \times C) \cup (B \times D)$.

192. *Fie mulțimile* $A = \{1, 2, 3, x, y\}$ *și* $B = \{5, 6, x, z\}$. *Să se determine* x, y *și* z *știind că* $\{4, 5\} \times \{2, 4\} \subset A \times B$. (*Elementele scrise între acolade se presupun distincte*).

Soluție.

Deoarece $M \times N \subset P \times Q \Leftrightarrow M \subset P$ și $N \subset Q$, avem:

$$\{4, 5\} \times \{2, 4\} \subset A \times B \Leftrightarrow \{4, 5\} \subset A \text{ și } \{2, 4\} \subset B.$$

Din $A = \{1, 2, 3, x, y\}$ și $\{4, 5\} \subset A$ rezultă ($x=4$ și $y=5$) sau ($x = 5$ și $y = 4$);

din $B = \{5, 6, x, z\}$ și $\{2, 4\} \subset B$ rezultă ($x = 4$ și $z = 2$) sau ($x = 2$ și $z = 4$).

Deoarece între acolade fiecare element este scris o singură dată, avem $x \neq 2$, $x \neq 5$, încît rămîne numai posibilitatea $x = 4$, $y = 5$, $z = 2$.

193. *Fie mulțimea* $A = \{x, y, z\}$. *Să se determine* x, y *și* z *știind că*
$\{x, 1\} \times \{y, 2\} \times \{z, 2, 3\} \subset A^3$. (*Elementele scrise între acolade se presupun distincte.*)

Soluție.

$\{x, 1\}$, $\{y, 2\}$, $\{z, 2, 3\}$ sînt părți ale lui A și deci $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$, încît $\{x, y, z\} = \{1, 2, 3\}$.

Deoarece între acolade fiecare element este scris o singură dată, avem : $x \neq 1$, $y \neq 2$, $z \neq 2$, $z \neq 3$; deoarece z nu este nici 2, nici 3, rezultă $z = 1$; deoarece $y \neq 2$ și $y \neq 1$ ($y \neq z$ și $z = 1$), mai rămîne $y = 3$ și deci $x = 2$.

Am obținut $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

194. *Fie A și B mulțimi nevide. Să se arate că:*

$$(A \times B = B \times A) \Leftrightarrow (A = B).$$

Soluție.

Evident, $A = B \Rightarrow A \times B = B \times A$.

Să presupunem acum că $A \times B = B \times A$ și fie $x \in A$. Dacă $y \in B$, atunci $(x, y) \in A \times B$ și deci lui $B \times A$. Din $(x, y) \in B \times A$ rezultă $x \in B$ și deci $A \subset B$.

Fie $y \in B$ și $x \in A$; avem $(y, x) \in B \times A$ și cum $B \times A = A \times B$, rezultă $(y, x) \in A \times B$, de unde $y \in A$ și deci $B \subset A$. Incluziunile $A \subset B$ și $B \subset A$ demonstrează că $A = B$.

Așadar, $(A \times B = B \times A) \Leftrightarrow (A = B)$.

195. *Fie $E = \{1, 2\}$, $F = \{2, 3\}$.*

a) Să se determine $E \times F$;

b) Să se determine $\mathcal{P}(E \times F)$;

c) Dacă $M = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2\}$ și $N = \{(1, 2), (2, 3)\}$, să se determine mulțmea $M \circ N = \{(x, y) |$ există z astfel ca $(x, z) \in M$ și $(z, y) \in N\}$.

Soluție.

a) $E \times F = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$;

b) $\mathcal{P}(E \times F)$ are elementele: $\varnothing$, $\{(1, 2)\}, \{(1, 3)\}, \{(2, 2)\}, \{(2, 3)\}$, $\{(1, 2), (1, 3)\}$, $\{(1, 2), (2, 2)\}$, $\{(1, 2), (2, 3)\}$, $\{(1, 3), (2, 2)\}$, $\{(1, 3,) (2, 3)\}$, $\{(2, 2), (2, 3)\}$, $\{(1, 2), (1, 3), (2, 2)\}$, $\{(1, 2), (1, 3) (2, 3)\}$, $\{(1, 2,) (2,2), (2, 3)\}$, $\{(1, 3), (2, 2), (2, 3)\}$, $\{(1, 2), (1, 3) (2, 2), (2, 3)\}$.

c) Fiindcă $M \circ N \subset E \times F$, vom căuta elementele lui $M \circ N$ printre elementele lui $E \times F$.

$(1, 2) \notin M \circ N$, deoarece nu există z astfel încît $(1, z) \in M$ și $(z, 2) \in N$;

$(1, 3) \in M \circ N$, deoarece există z astfel ca $(1, z) \in M$ și $(z, 3) \in N$. Într-adevăr, pentru $z = 2$ avem $(1, 2) \in M$ și $(2, 3) \in N$; $(2, 2) \notin M \circ N$, dar $(2, 3) \in M \circ N$ pentru că $(2, 2) \in M$ și $(2, 3) \in N$.

Am obținut $M \circ N = \{(1, 2), (2, 3)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

196. *Fie* $A = \{(x, y) | 5x - 2y = 11, x \text{ și } y \text{ numere întregi}\}$;

$B = \{(2z + 1{,}5\ z - 3) | z \text{ număr întreg}\}$;

Să se arate că $A \subset B$. *Sînt egale aceste mulțimi ?*

Soluție.

Avem: $(x, y) \in A \Rightarrow (5x - 2y = 11) \Rightarrow \left(y = \frac{5x - 11}{2}\right)$

$\Rightarrow \left(y = 2x - 5 + \frac{x - 1}{2}\right)$ și ținînd seama că x și y sînt întregi, rezultă că $\frac{x - 1}{2}$ trebuie să fie întreg, pe care îl notăm cu z, deci $\frac{x - 1}{2} = z$, adică $x = 2z + 1$ și $y = 2(2z + 1) - 5 + z = 5z - 3$.

Am obținut astfel:

$(x, y) \in A \Rightarrow$ (Există z întreg astfel ca $x = 2z + 1, y = 5z - 3$) $\Rightarrow (x, y) \in B$ și deci $A \subset B$.

Pentru ca mulțimile A și B să fie egale, trebuie să mai avem și $B \subset A$. Avem: $(x, y) \in B \Rightarrow$ (există z întreg astfel ca $2z + 1 = x$ și $5z - 3 = y$) $\Rightarrow \left(z = \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{5}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{5}\right) \Rightarrow (5x - 2y = 11) \Rightarrow (x, y) \in A$ și deci $B \subset A$.

Din $A \subset B$ și $B \subset A$ rezultă $A = B$.

197. *Fie*:

$A = \{(x, y, 2y - 3x) | x \in N^*, y \in N^*, x \leqslant 5, 2 \leqslant y \leqslant 10\}$,

$B = \{(x + 3, y + 7, 7x - 3y) | x \in Z, y \in Z, -2 \leqslant x \leqslant 2, -5 \leqslant y \leqslant 3\}$,

$C = \{(x, 2x, x) | x \in N^*, x \leqslant 5\}$.

Să se demonstreze că $A \cap B = C$.

Soluție.

Vom arăta că $A \cap B \subset C$ și $C \subset A \cap B$.

Fie $(\alpha, \beta, \gamma) \in A \cap B$ și să arătăm că $(\alpha, \beta, \gamma) \in C$.

Scanned with OKEN Scanner

Din $(\alpha, \beta, \gamma) \in A \cap B$ rezultă $(\alpha, \beta, \gamma) \in A$ și $(\alpha, \beta, \gamma) \in B$. Dacă $(\alpha, \beta, \gamma) \in A$, atunci există numerele naturale x și y, $x \leqslant 5$, $2 \leqslant y \leqslant 10$, astfel ca $\alpha = x$, $\beta = y$, $\gamma = 2y - 3x$; deoarece (α, β, γ) aparține și lui B, există numerele întregi x', y', $-2 \leqslant x' \leqslant 2$, $-5 \leqslant y' \leqslant 3$, astfel ca $\alpha = x' + 3$, $\beta = y' + 7$, $\gamma = 7x' - 3y'$.

Din egalitățile $\alpha = x = x' + 3$, $\beta = y = y' + 7$, $\gamma = 2y - 3x = 7x' - 3y'$, rezultă $x' = x - 3$, $y' = y - 7$; înlocuind x' și y' în $2y - 3x = 7x' - 3y'$ obținem: $2y - 3x = 7(x - 3) - 3(y - 7)$, iar după reduceri $y = 2x$.

Avem $\alpha = x$, $\beta = y = 2x$, $\gamma = 2y - 3x = 4x - 3x = x$, $(\alpha, \beta, \gamma) = (x, 2x, x)$ unde $x \in N^*$ și $x \leqslant 5$, adică $(\alpha, \beta, \gamma) \in C$ și deci $A \cap B \subset C$.

Reciproc, să demonstrăm că $C \subset A \cap B$.

Fie $(t, 2t, t)$, $t \in N^*$, $t \leqslant 5$ un element din C. Să arătăm că $(t, 2t, t) \in A$ și $(t, 2t, t) \in B$. Notînd $t = x$, $2t = y$, avem și $2y - 3x = 4t - 3t = x$, deci $(t, 2t, t) = (x, y, x)$ cu $x \leqslant 5$, $2 \leqslant y \leqslant 10$, adică $(t, 2t, t) \in A$.

Pentru ca $(t, 2t, t)$ să aparțină lui B trebuie să existe numerele întregi x', y' astfel ca: $t = x' + 3$, $2t = y' + 7$, $t = 7x' - 3y'$ și $-2 \leqslant x' \leqslant 2$, $-5 \leqslant y' \leqslant 3$. Avem $x' = t - 3$, $y' = 2t - 7$, valori ce verifică și $7x' - 3y' = t$; deoarece $1 \leqslant t \leqslant 5$ avem $-2 \leqslant x' \leqslant 2$, $-5 \leqslant y' \leqslant 3$. Rezultă $(t, 2t, t) \in B$. Deoarece $(t, 2t, t) \in A$ și $(t, 2t, t) \in B$, avem $(t, 2t, t) \in A \cap B$, adică $C \subset A \cap B$. Din $A \cap B \subset C$ și $C \subset A \cap B$ rezultă $A \cap B = C$.

198. *Fie mulțimile:*

$A = \{(x, y, z) | 7x - y + 2z = 0,\ x, y, z$ *numere reale*$\}$;

$B = \{(x, y, z) | x - 2y + 17z = 0,\ x, y, z$ *numere reale*$\}$;

$C = \{(x, y, z) | 5x - 3y + 22z = 0,\ x, y, z$ *numere reale*$\}$;

Să se demonstreze că:

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{(x, 9x, x) | x \in R\}.$$

Soluție.

Avem: $(x,y,z) \in A \cap B \Leftrightarrow 7x - y + 2z = 0$ și $x - 2y + 17z = 0$.

Rezolvînd sistemul de două ecuații cu necunoscutele y, z

$$\begin{aligned} 7x - y + 2z &= 0, \\ x - 2y + 17z &= 0, \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

obținem $y = 9x$ și $x = z$ și deci:
$(x,y,z) \in A \cap B \Leftrightarrow (y = 9x$ și $z = x) \Leftrightarrow (x,y,z) \in \{(x,9x,x)|$
$|x \in R\}$.

Am obținut:

$$(x,y,z) \in A \cap B \Leftrightarrow (x,y,z) \in \{(x,9x,x)|x \in R\},$$

adică

$$A \cap B = \{(x,9x,x)|x \in R\}.$$

Analog avem:
$(x,y,z) \in A \cap C \Leftrightarrow 7x - y + 2z = 0$ și $5x - 3y + 22z =$
$= 0 \Leftrightarrow y = 9x,\ z = x \Leftrightarrow (x,y,z) \in \{(x,9x,x)|x \in R\}$ și deci
$A \cap C = \{(x,9x,x)|x \in R\}$.
$(x,y,z) \in B \cap C \Leftrightarrow x - 2y + 17\ z = 0$ și $5x - 3y + 22z =$
$= 0 \Leftrightarrow y = 9x,\ z = x \Leftrightarrow (x,y,z) \in \{(x,9x,x)|x \in R\}$
și deci

$$B \cap C = \{(x,9x,x)|x \in R\}.$$

Am obținut $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{(x,9x,x)|x \in R\}$.

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII PROPUSE

199. Se dă mulțimea $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{99}{100}\right\}$.

1) Să se definească mulțimea printr-o proprietate caracteristică a elementelor sale.

2) Să se arate că oricare ar fi $a \in A$, există cel puțin un număr $b \in A$, $b \neq a$, astfel ca $|b - a| < 0{,}2$.

200. Fie propozițiile P, Q, R, S în care x și y sînt numere reale.

$$P : (x = y) \vee (x = 3);$$
$$Q : (y = 2) \vee (x = 5);$$
$$R : (x > 4) \vee (y \geqslant 6)$$
$$S : 3x - 2y \leqslant 3.$$

a) Să se determine x și y astfel încît propozițiile P, Q, R, S să fie adevărate simultan.

b) Să se determine x și y astfel ca P, Q, S să fie adevărate simultan.

201. Fie propozițiile:

$$P : (x < -1) \vee (y > 3);$$
$$Q : (x > 1) \vee (y < 0);$$
$$R : (x > 2) \wedge (y < 2).$$

Există x și y astfel ca propoziția „$P \wedge Q \wedge R$“ să fie adevărată?

202. Fie propozițiile:

$$P : (x \leqslant 2y) \wedge (x + y \geqslant 0);$$
$$Q : (x \geqslant 0) \vee (y = 6);$$
$$R : (y = 3x) \vee (y < 0),$$

x și y fiind numere reale. Să se determine x și y astfel ca P, Q, R să fie adevărate simultan.

203. Fie propozițiile (x și y fiind numere reale):

$$P_1 : (x < 0) \vee (y < 0);$$
$$P_2 : (x > 1) \vee (y > 2);$$
$$P_3 : (x > 2) \wedge (y > 3).$$

Să se arate că propoziția „$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$“ este falsă.

204. Fie propozițiile (x și y fiind numere reale):

$$P_1 : (x < 0) \vee (x > 1);$$
$$P_2 : (x < -1) \vee (x \geqslant 2);$$
$$P_3 : (x > -1) \wedge (x \leqslant 2).$$

Să se determine x astfel ca propoziția „$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$“ să fie adevărată.

205. Să se demonstreze egalitatea:
$(A \cup B \cup C) \cap (B \cup D) = (A \cap D) \cup B \cup (C \cap D)$ și apoi să se verifice reprezentînd A, B, C, D prin mulțimi de puncte din plan.

206. Să se arate că oricare ar fi părțile A, B, C, D ale mulțimii E sînt adevărate egalitățile:

1) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup$
$\cup (B \cap D);$

2) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap$
$\cap (B \cup D).$

207. Să se compare mulțimile finite A și B știind că $A \cup B$, $A \cap B$ au același număr de elemente.

208. Fie mulțimile

$$A = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi \mid k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\};$$

$$B = \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi \mid k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\};$$

Scanned with OKEN Scanner

$$C = \left\{(-1)^{k_3} \cdot \frac{\pi}{6} + k_3\pi \,|\, k_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\};$$

$$D = \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k_4\pi \,|\, k_4 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\};$$

$$E = \left\{\pm\frac{\pi}{6} + 2k_5\pi \,|\, k_5 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}.$$

a) Să se scrie cîte un element din fiecare mulțime.
b) Să se arate că $A \cup B = C$. Ce legătură există între mulțimea $A \cup B$. și mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = \frac{1}{2}$?

c) Să se arate că $A \cup D = E$. Ce legătură există între mulțimea $A \cup D$ și mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

209. Fie:

$$A = \left\{x \in R \,|\, x = \frac{\pi}{12} - k_1\frac{\pi}{3}, k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\};$$

$$B = \left\{x \in R \,|\, x = \frac{\pi}{4} - k_2\pi,\ k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\};$$

$$C = \left\{x \in R \,|\, x = \frac{\pi}{4} + k_3\frac{\pi}{2}, k_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\};$$

$$D = \left\{x \in R \,|\, x = \frac{\pi}{12} + k_4\pi,\ \ k_4 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\};$$

$$E = \left\{x \in R \,|\, x = \frac{5\pi}{12} + k_5\pi,\ k_5 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}.$$

Să se demonstreze că $A \cup B = C \cup D \cup E$.

210. Fie mulțimile:

$$A = \{x \,|\, x = 5m - 2,\ m \in N^*\};$$
$$B = \{x \,|\, x = 503 - 3n,\ n \in N^*\};$$
$$C = \{x \,|\, x = 503 - 15p,\ p \in N^*,\ p \leqslant 33\}.$$

Să se demonstreze că $A \cap B = C$.

Scanned with OKEN Scanner

211. Fie $A = \{x \in N | x = 4n - 3,\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$;
$B = \{x \in Z | x = 107 - 7m,\ m = 1, 2, 3, \ldots\}$.

a) Să se precizeze apartenența sau neapartenența elementelor următoare față de mulțimea A și apoi față de mulțimea B:

$$1\ ;\ 5\ ;\ 86\ ;\ 13\ ;\ 2149\ ;\ -47$$

b) Să se determine $A \cap B$.

212. Fie $A = \{x | x = 3n + 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$;
$B = \{x | x = 99 - 4m,\ m = 1, 2, 3, \ldots\}$.

Să se determine $A \cap B$.

213. Să se demonstreze că dacă A, B, C sînt părți ale unei mulțimi E, atunci sînt adevărate egalitățile:

1) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup \cup (C \cap A)$;

2) $(A - B) \cup C = (A \cup C) - (B - C)$;

3) $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = (A - C) \cup (C - B) \cup \cup (B - A)$.

214. Să se demonstreze că oricare ar fi părțile A, B, C ale mulțimii E, sînt adevărate egalitățile:

a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

215. Fie A, B, C părți ale unei mulțimi E. Să se arate că dacă $A \cap B \cap C = \varnothing$, atunci $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) = = A \cup B \cup C$. Este adevărată reciproca ? Să se verifice apoi proprietatea reprezentînd A, B, C, E prin mulțimi de puncte din plan.

216. Dacă A și B sînt părți ale mulțimii E, să se compare mulțimile:

$$A \cup \mathbf{C}_E B \text{ și } \mathbf{C}_E[\mathbf{C}_B(A \cap B)].$$

Mai întîi se vor reprezenta mulțimile prin mulțimi de puncte din plan.

Scanned with OKEN Scanner

217. Să se demonstreze că dacă A, B, C sînt părți ale unei mulțimi E, atunci:

$$\complement_E[A \cup (C \cap \complement_E B)] = (B - A) \cup [(\complement_E A) - C].$$

218. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\{1, 2, 3\} \Delta X = \{2, 3, 4\}$;
b) $(\{1, 2\} \Delta X) \Delta \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

219. Să se găsească părțile A și B ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$ care satisfac simultan condițiile:

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$;
2. $\{2, 4\} \subset (A - B) \cup (B - A)$;
3. $\{1, 4, 3\} \not\subset A$;
4. $\{1, 2, 3\} \not\subset B$;
5. Oricare ar fi $x \in A$, există $y \in B$ astfel ca: $(A - \{x\}) \cap (B - \{y\}) \neq \emptyset$.

220. Fie X și Y părți ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Știind că:

1) $\{1, 4\} \subset X - \complement_A Y$;
2) $\{2, 5\} \subset \complement_A (X \cup Y)$;
3) $3 \notin (X - Y) \cup (\complement_A X - \complement_A Y)$,

să se arate că $X = Y$.

221. Fie propozițiile:

$P_1 : x \notin A \cup B$;
$P_2 : x \in A \cap B$;
$P_3 : x \notin (A - B) \cup (B - A)$,

unde A și B sînt mulțimi nevide, $A \neq B$ și $A \cap B \neq \emptyset$.

Să se verifice că $(P_1 \vee P_2) \Leftrightarrow P_3$, luînd drept A și B mulțimi de puncte ale planului. Apoi să se constate echivalența în general, pe un tabel de adevăr.

222. Să se demonstreze că dacă A, X, Y sînt părți ale mulțimii E, atunci:

$$\left.\begin{array}{l} A \cup X = A \cup Y \\ A \cap X = A \cap Y \end{array}\right\} \Rightarrow X = Y.$$

Scanned with OKEN Scanner

223. Să se rezolve ecuația:

$$A \cup (B - X) = B \cup X,$$

în următoarele cazuri:

1) $A = B = \{1, 2\}$;
2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$;
3) A și B sînt mulțimi oarecare, nevide.

224. Să se arate că $X \subset A - B \Rightarrow X \subset A$ și $X \not\subset B$.

Să se arate, folosind un exemplu, că implicația în sens invers este falsă.

225. Să se demonstreze că $(A - B = B - A) \Leftrightarrow (A = B)$.

226. Dacă X și Y sînt mulțimi nevide și propoziția P „Există $x \in X$ și $y \in Y$ astfel ca $\{x\} \cup \{y\} \subset (X - Y) \cup (Y - X)$“ este falsă, să se arate că atunci $X \subset Y$ sau $Y \subset X$.

227. Să se găsească mulțimea X, știind că $X \subset \{1, 2, 3\}$ și $\{1, 2, 3\} \cap X = \{1, 2\}$.

Să se arate apoi că dacă A, B, X sînt părți ale unei mulțimi T, $B \subset A$, $A \neq B$, $B \neq 0$, atunci ecuația $A \cap X = B$ este echivalentă cu $B \subset X$ și $A - B \not\subset X$.

228. Să se compare mulțimile A și B care îndeplinesc condițiile:

1) $A \cup B \subset \{1, 2, 3, 4\}$;
2) $\{1, 2, 3\} \subset \complement_{A \cup B} A \Delta B$;
3) $4 \notin A \Delta B$.

229. Să se determine mulțimea E și părțile sale A, B știind că sînt îndeplinite simultan condițiile:

1) $\complement_E A = \{a, c, e, g\}$;
2) $\complement_E B = \{b, d, g, h\}$;
3) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, h\}$.

230. A și B fiind părți ale mulțimii E, să se demonstreze egalitățile următoare și apoi să se verifice considerînd A, B, E mulțimi de puncte din plan.

Scanned with OKEN Scanner

(În aceste exerciții, complementara apare numai în raport cu mulțimea E. Vom nota complementara lui A în raport cu E prin $\bar{A}$).

a) $B - (\overline{A \cup B}) = A - B$;
b) $[(A \cup B) - B] \cup (A \cap B) = A$;
c) $(A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cup B) = (\overline{A - B})$;
d) $(\bar{A} - \bar{B}) \cup (\bar{B} - \bar{A}) \cup (A \cap B) = A \cup B$;
e) $(\overline{A - B}) \cap (\overline{B - A}) \cap A \cap B = \varnothing$.

231. Fie mulțimile A, B, C astfel ca $A \cap B \cap C \neq \varnothing$. Să se arate că mulțimile $(A - B) \cup (B - C) \cup (C - A)$ și $A \cap B \cap C$ sînt disjuncte.

Se va verifica rezultatul reprezentînd A, B, C prin mulțimi de puncte din plan.

232. Să se demonstreze că între părțile A, B, C ale unei mulțimi E, există relația:

$$[(A \cup B) - C] \cup [(B \cup C) - A] \cup [(C \cup A) - B] = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C).$$

Se va verifica apoi egalitatea considerînd A, B, C mulțimi de puncte din plan.

233. Fie A, B, C părți ale mulțimii E.

a) Să se demonstreze că dacă $A \cap B \cap C = \varnothing$ atunci

$$\complement[A \cup \complement(A \cup B)] \cup \complement[B \cup \complement(B \cup C)] \cup \complement[C \cup \complement(C \cup A)] = A \cup B \cup C,$$

unde $\complement$ este semnul complementarei în raport cu E.

b) Reciproca este adevărată ?

234. Să se găsească părțile A, B, C ale mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, știind că următoarele condiții sînt satisfăcute simultan:

1) $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$;
2) $A - B = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 99\}$;
3) $A - C = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$.

Scanned with OKEN Scanner

235. Să se arate că:

$(A - B) \cup (A - C) = A \cup B \cup C$ și $(A - B) \cap (A - C) = \varnothing \Leftrightarrow B \cup C = A$ și $B \cap C = \varnothing$.

236. Să se determine părțile lui X și Y ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$, știind că următoarele condiții sînt îndeplinite simultan.

1. $X \cup Y \subset \{1, 2, 3, 4\}$;
2. $1 \in X - Y$;
3. $X \cap Y \neq \varnothing$;
4. $X - Y \not\subset \{1, 2\}$;
5. $Y - X \not\subset \{2, 4\}$.

237. Să se demonstreze echivalența:

$$B \cup C \not\subset A \Leftrightarrow (B - A) \cup (C - A) \neq \varnothing.$$

238. Să se determine mulțimile X și Y știind că următoarele condiții sînt îndeplinite simultan.

1. $X - Y = \{1, 3, 4, 6, 7\}$;
2. $Y - X = \{2, 5, 8, 9\}$;
3. Propoziția „există $x \in X$ astfel că $x \notin \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$“ este falsă.

239. Fie A și B părți ale mulțimii E.
Să se demonstreze că pentru a avea

$$(A \cup B) \subset \complement_E(A \cap B),$$

este necesar și suficient ca A și B să fie disjuncte.

240. Să se demonstreze că:

$(A - B) \cup (B - A) \subset X \subset A \cup B$ și $A \cap B \cap X = \varnothing \Leftrightarrow X = (A - B) \cup (B - A)$.

241. Fiind date mulțimile finite A și B, există X astfel ca să fie verificate simultan condițiile 1), 2), 3)?

1) $X \subset A \cup B$;
2) $X \cap A \cap B = \varnothing$;
3) X are mai multe elemente decît $(A - B) \cup (B - A)$.

Scanned with OKEN Scanner

242. a) Există mulțimi A, B, C astfel ca să avem simultan: $(A - B) \cup (B - A) = \{2, 4, 5, 7, 9\}$, $C \subset \{2, 5, 9\}$, $A \cap B \cap C = \{2\}$?

b) Să se demonstreze că $X \subset (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow A \cap B \cap X = \varnothing$.

243. Fie $A = \{x \in N \mid x = 3m + 7n,\ m = 1, 2, 3, \ldots,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Să se determine $\mathbf{C}_N A$.

244. Să se compare părțile X și Y ale mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ care îndeplinesc simultan condițiile:

1) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset X \cap Y$;
2) $\{6, 7, 8, 9, 10\} \cap (X \Delta Y) = \varnothing$.

245. Dacă A, B, C sînt părți ale mulțimii E și următoarea propoziție este adevărată:

„Există $x \in E$ astfel ca $x \notin (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$ și $x \in A \cup B \cup C$“ poate fi vidă mulțimea $A \cap B \cap C$?

246. Să se determine două părți X și Y ale mulțimii $E = \{1, 2, 3, 4\}$ știind că următoarele propoziții sînt adevărate simultan:

a) $X \cap Y = \{1, 2\}$;
b) $X - Y = \{3\}$;
c) $(x \in E$ și $x \notin X) \Rightarrow x \in Y$.

247. Dacă M și M_i, $i = 1, \ldots, n$ sînt părți nevide ale mulțimii E, atunci

$$M - \bigcup_{i=1}^{n} M_i = \bigcap_{i=1}^{n} (M - M_i);$$

$$M - \bigcap_{i=1}^{n} M_i = \bigcup_{i=1}^{n} (M - M_i).$$

248. Există două părți X, Y ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ astfel ca să fie adevărate simultan propozițiile următoare ?

a) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
b) X are două elemente și Y are trei elemente;
c) $x \in X \not\Rightarrow x \notin Y$.

249. Să se demonstreze că este adevărată implicația:

$$A \cup (M - B) = B \cup (M - A) \Rightarrow A = B.$$

250. Să se nege propoziția P:

„Oricare ar fi numărul natural n există o mulțime A astfel încît $\mathcal{P}(A)$ să aibă n elemente".

Să se precizeze care dintre propozițiile P sau non P este adevărată.

251. Fie $E = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Să se arate că există $(2^k - 1)^n$ sisteme ordonate $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k)$ de submulțimi ale lui E astfel ca $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = E$.

252. Fie $E = \{x, y, z, t\}$. Să se determine x, y, z, t știind că următoarele condiții sînt îndeplinite simultan:

$$\{x, y, 2\} \in \mathcal{P}(E);$$
$$\{x, z, 1\} \in \mathcal{P}(E);$$
$$\{y, t, 3\} \in \mathcal{P}(E);$$
$$\{z, t, 4\} \in \mathcal{P}(E).$$

(Elementele scrise între acolade se presupun diferite.)

253. Fie mulțimea $E = \{x, y, z, t\}$ (x, y, z, t diferite între ele).

Pot fi adevărate simultan relațiile următoare?

a) $\{x, y, 4\} \in \mathcal{P}(E)$;
b) $\{x, t, 1\} \in \mathcal{P}(E)$;
c) $\{z, t, 2\} \in \mathcal{P}(E)$;
d) $\{y, z, 1\} \in \mathcal{P}(E)$;
e) $\{y, t, 3\} \in \mathcal{P}(E)$.

254. Să se nege propozițiile:

$$P_1 : (x, y, z) \in A \times B \times C;$$
$$P_2 : (a, b) \neq (x, y);$$
$$P_3 : (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D);$$
$$P_4 : A \times B \subset C \times D.$$

255. Dacă A este o mulțime cu m elemente și B o mulțime cu n elemente cîte elemente conține mulțimea $A \times B$?

Scanned with OKEN Scanner

256. Fie $E = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 12\}$ și două submulțimi $A = \{2, 4, 6, \ldots, 12\}$ și $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Să se precizeze cîte două elemente din mulțimile :

$$A \times B,\ \mathbf{C}_{E\times E}A \times B,\ A \times \mathbf{C}_E B,\ \mathbf{C}_E A \times \mathbf{C}_E B.$$

257. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$. Să se determine mulțimile $A \times B$ și $B \times A$ și apoi să se afle trei valori pentru x, y, z astfel încît $A \times B = B \times A$.

258. Fie mulțimile $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.
Să se determine mulțimile: $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$, $B \times B$. Să se scrie diagonala produsului cartezian $A \times A$ și a lui $B \times B$.

259. Fie $A = \{(x, y) | 2x + y = 9,\ x \in N,\ y \in N\}$ și o mulțime M astfel că diagonala lui $M \times M$ este $\Delta_M = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (7, 7)\}$.

a) Să se determine M.
b) Să se scrie trei elemente ale lui A.
c) Să se determine $A \cap \Delta_M$.
d) Să se compare A cu $M \times M$.

260. Să se demonstreze că :

$$(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B)^2.$$

261. Să se determine mulțimile X și Y știind că următoarele condiții sînt îndeplinite simultan :

1. $X \times Y \subset \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$;
2. $Y \times X \supset \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$;
3. $(1, 4) \notin X \times Y$.

262. Să se găsească mulțimile $A = \{1, 3, x, y\}$ și $B = \{2, x, z\}$ știind că $\{(1, 3), (2, 4)\} \subset A \times B$.

263. Să se determine mulțimile A și B care îndeplinesc simultan condițiile :

1) $A \times B \subset \{(1, 2), (2, 4), (2, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$;
2) $B \times A \supset \{(2, 1), (4, 1), (4, 2), (2, 2)\}$;
3) $(3, 1) \notin B \times A$.

Scanned with OKEN Scanner

264. Să se verifice egalitatea $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$ pentru $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 4\}$, $C = \{2, 4\}$ și apoi să se demonstreze relația presupunînd A, B, C mulțimi oarecare.

265. Să se determine mulțimile A și B care satisfac egalitatea : $(\{1, 2, 3\} - A) \times B = \{1, 2, 3\} \times B - \{(1, 4), (2, 4)\}$.

266. Să se verifice că $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ pentru $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{2, 4\}$. Să se demonstreze apoi relația presupunînd A, B, C mulțimi oarecare.

Scanned with OKEN Scanner

II. RELAȚII

§ 1. Relații. Grafice

Fie E și F două mulțimi (distincte sau nu), x un element arbitrar din E și y un element arbitrar din F. O proprietate $\mathcal{R}$ a cuplului (x, y) se numește relație binară între elementele mulțimii E și elementele mulțimii F. Dacă cuplul (a, b), $a \in E$, $b \in F$ are proprietatea $\mathcal{R}$, atunci se spune că a este în relația $\mathcal{R}$ cu b și se scrie $a\mathcal{R}b$. În acest caz se mai spune că lui $a \in E$ îi corespunde, prin $\mathcal{R}$, elementul $b \in F$, fapt care se reprezintă prin notația $a \overset{\mathcal{R}}{\rightarrow} b$. Uneori corespondența realizată de o relație binară se pune în evidență pe o diagramă ca cea din fig. 11. Cazul reprezentat în figura 11 corespunde unei relații binare $\mathcal{R}$ între elementele mulțimilor

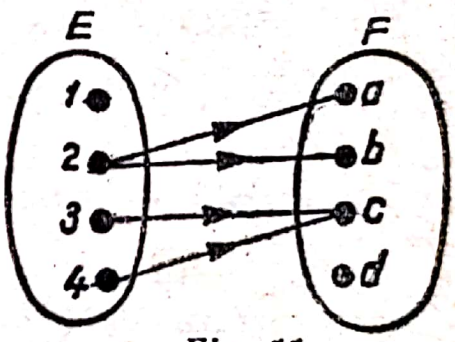


Fig. 11

$$E = \{1, 2, 3, 4\} \text{ și } F = \{a, b, c, d\},$$

pentru care avem:

$$2 \overset{\mathcal{R}}{\rightarrow} a, \text{ respectiv } 2\mathcal{R}a,$$
$$2 \overset{\mathcal{R}}{\rightarrow} b, \text{ respectiv } 2\mathcal{R}b,$$
$$3 \overset{\mathcal{R}}{\rightarrow} c, \text{ respectiv } 3\mathcal{R}c,$$
$$4 \overset{\mathcal{R}}{\rightarrow} c, \text{ respectiv } 4\mathcal{R}c.$$

Orice relație binară $\mathcal{R}$ între elementele unei mulțimi E și elementele unei mulțimi F, determină o parte a produsului cartezian $E \times F$, formată din cupluri (x, y) pentru care propoziția $x\mathcal{R}y$ este adevărată, numită graficul relației.

În cazul relației reprezentate în figura 11, graficul corespunzător este mulțimea :

$$\{(2, a), (2, b), (3, c), (4, c)\}.$$

O relație este complet determinată dacă se cunoaște graficul corespunzător. De aceea, în unele cazuri, vom defini relația prin graficul ei.

Dacă $E = F$, relația binară $\mathcal{R}$ se numește relație binară între elementele mulțimii E.

O relație binară $\mathcal{R}$ între elementele unei mulțimi E se numește relație reflexivă dacă propoziția $x\mathcal{R}x$ este adevărată pentru orice $x \in E$.

O relație binară $\mathcal{R}$ între elementele unei mulțimi E se numește relație simetrică dacă este adevărată implicația :

$$(x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x).$$

O relație binară $\mathcal{R}$ între elementele unei mulțimi E se numește relație tranzitivă, dacă este adevărată implicația :

$$((x\mathcal{R}y) \wedge ((y\mathcal{R}z)) \Rightarrow (x\mathcal{R}z).$$

§2. Relații de echivalență

O relație binară $\mathcal{R}$ între elementele unei mulțimi E se numește relație de echivalență dacă :

R. relația este reflexivă,
S. relația este simetrică,
T. relația este tranzitivă.

Dacă relația $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență, atunci propoziția $x\mathcal{R}y$ se mai notează astfel : $x \equiv y \pmod{\mathcal{R}}$. Se citește : „$x$ este congruent cu y modulo $\mathcal{R}$“. Cu această notație, condițiile R, S, T pot fi redactate astfel :

$R.$ $x \equiv x \pmod{\mathcal{R}}$ oricare ar fi $x \in E$;
S. $(x \equiv y \pmod{\mathcal{R}}) \Rightarrow (y \equiv x \pmod{\mathcal{R}})$;
T. $(x \equiv y \pmod{\mathcal{R}}) \wedge (y \equiv z \pmod{\mathcal{R}}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \equiv z \pmod{\mathcal{R}})$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $a \in E$; mulțimea elementelor x din E cu proprietatea $x \equiv a (\mathrm{mod}\ \mathcal{R})$ se numește clasa de echivalență a elementului a și se notează cu $\hat{a}$. Așadar,

$$\hat{a} = \{x \in E | x \equiv a (\mathrm{mod}\ \mathcal{R})\}.$$

Mulțimea claselor de echivalență ale elementelor din E se numește cîtul mulțimii E prin $\mathcal{R}$ și se notează cu $E/\mathcal{R}$. Așadar,

$$E/\mathcal{R} = \{\hat{x} | x \in E\}.$$

§ 3. Relații de ordine

O relație binară $\mathcal{R}$ între elementele unei mulțimi E se numește relație de ordine dacă:

R. este reflexivă;
A. este antisimetrică, adică: $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow (x = y)$
T. este tranzitivă.

Dacă notăm propoziția $x\mathcal{R}y$ cu semnul „$x \leqslant y$", atunci definiția relației de ordine poate fi reformulată astfel:

R. propoziția $x \leqslant x$ este adevărată, pentru orice $x \in E$.
A. $((x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x)) \Rightarrow (x = y)$;
T. $((x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z)) \Rightarrow (x \leqslant z)$.

Dacă pentru orice $a \in E$ și orice $b \in E$ propoziția „$(a \leqslant b) \vee (b \leqslant a)$" este adevărată, se spune că relația $\leqslant$ este o *relație de ordine totală*. În caz contrar, relația de ordine se numește *relație de ordine parțială*.

§ 4. Compuneri de relații. Relații inverse

Fie $\mathcal{R}$ o relație binară între elementele mulțimii E și elementele mulțimii F și $\mathcal{S}$ o relație binară între elementele mulțimii F și elementele mulțimii G.

Fie $x \in E$ și $y \in G$.

Proprietatea „există $\alpha \in F$, astfel încît propozițiile $x\mathcal{R}\alpha$ și $\alpha\mathcal{S}y$ sînt adevărate" determină o relație binară între elementele mulțimii E și elementele mulțimii G, notată $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ și numită compusa relației $\mathcal{S}$ cu relația $\mathcal{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Corespondențele realizate de relația $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ pot fi reprezentate în diagrame ca acelea din figura 12.

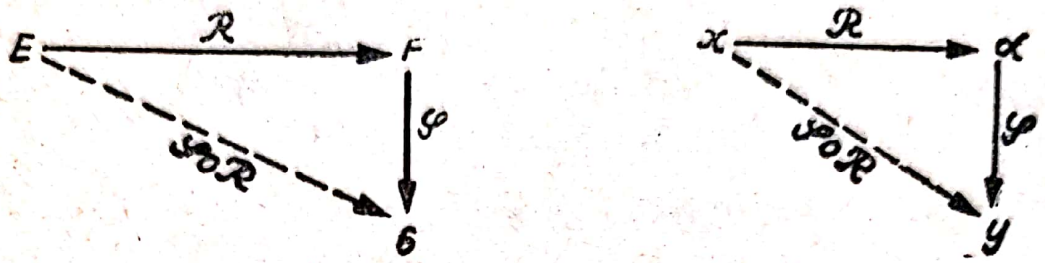


Fig. 12

Fie $\mathcal{R}$ o relație binară între elementele unei mulțimi E și elementele unei mulțimi F.

Fie $x \in E$ și $y \in F$. Propoziția $x\mathcal{R}y$ definește o proprietate a cuplurilor (y, x) numită relație inversă a lui $\mathcal{R}$ și notată cu $\mathcal{R}^{-1}$. Relația $\mathcal{R}^{-1}$ este o relație binară între elementele mulțimii F și elementele mulțimii E.

Avem :

$$x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (y\mathcal{R}^{-1}\, x).$$

Corespondențele realizate de relațiile $\mathcal{R}$ și $\mathcal{R}^{-1}$ pot fi reprezentate într-o diagramă astfel :

$$E \overset{\mathcal{R}}{\to} F \qquad x \overset{\mathcal{R}}{\to} y$$

$$E \overset{\mathcal{R}^{-1}}{\to} F \qquad y \overset{\mathcal{R}^{-1}}{\to} x.$$

RELAȚII

EXERCIȚII REZOLVATE

267. *Fie mulțimile* $A = \{2, 4, 6, 8\}$ *și* $B = \{1, 3, 5, 7\}$, *părți ale lui* Z. *Care este graficul relațiilor următoare, în care* $x \in A$ *și* $y \in B$ *?*

Să se alcătuiască cîte o schemă pentru fiecare relație.

a) $x < 3$ *și* $y > 3$;
b) $x > 2$ *și* $y < 5$;
c) $x \geqslant$ *sau* $y \leqslant 1$;
d) $x > 6$ *sau* $y > 7$;
e) $max\ (x, y) \leqslant 3$;
f) $max\ (x, y) > 6$;
g) $min\ (x, y) \leqslant 2$;
h) $min\ (x, y) > 6$;
i) $min\ (x, 5) > max\ (y, 3)$;
j) $max\ (x, 6) > max\ (y, 5)$.

Soluție.

a) $\{(2, 5), (2, 7),\}$; b) $\{(4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3), (8, 1). (8, 3)\}$;
c) $\{(6, 1), (6, 3), (6, 5), (6, 7), (8, 1), (8, 3), (8, 5), (8, 7), (2, 1), (4, 1)\}$;
d) $\{(8, 1), (8, 3), (8, 5), (8, 7)\}$; e) $\{(2, 1), (2, 3)\}$;
f) $\{(8, 1), (8, 3), (8, 5), (8, 7), (2, 7), (4, 7), (6, 7)\}$;
g) $\{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 1), (6, 1), (8, 1)\}$; h) $\{(8, 7)\}$;
i) $\{(4, 1), (4, 3), (6, 1), (6, 3), (8, 1), (8, 3)\}$;
j) $\{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5), (8, 1), (8, 3), (8, 5), (8, 7)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

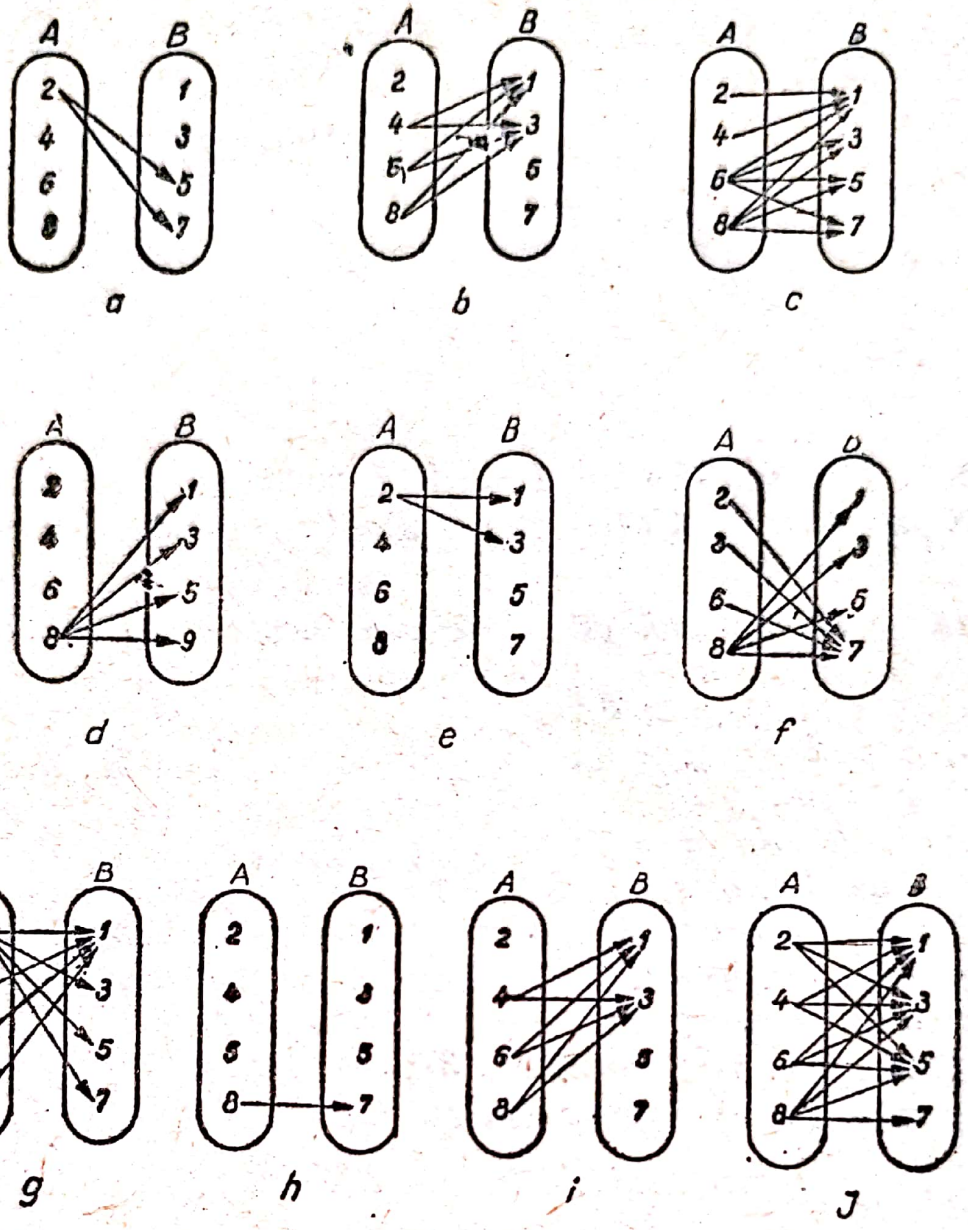


Fig. 13

268. *Fie mulțimile* $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$ *părți ale lui* Z. *Să se scrie graficul relațiilor următoare, în care* $x \in A$ *și* $y \in B$:

a) $x + y = 9$; b) $2x - y = 1$; *c)* $3x + 4y = 10$; d) $4x + y = 11$;

e) $x^2 - y^2 = 8$; *f)* $x \geqslant y$; *g)* $x + y | < 8$; *h)* $x - y \geqslant 3$; *i)* x *divide* y;

j) $x + y$ *este multiplu de 3.*

Soluție

a) $\{(1, 8), (2, 7), (4, 5)\}$; b) $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4,7)\}$ c) $3x + 4y = 10 \Leftrightarrow 3x = 2(5 - 2y) \Rightarrow x$ este par și $5 - 2y$ este multiplu de $3 \Rightarrow (x = 2$ sau $x = 4)$ și $(y = 1$ sau $y = 7)$; deoarece $3x + 4y = 10$ este adevărată numai $x = 2$ și $y = 1$, graficul relației este $\{(2, 1)\}$.

d) $4x + y = 11 \Leftrightarrow 4x = 11 - y \Rightarrow 11 - y$ este multiplu de $4 \Rightarrow y = 11$ — multiplu de $4 \Rightarrow y = 7$ sau $y = 3$. Dacă $y = 7$ atunci $x = 1$; dacă $y = 3$ atunci $x = 2$. Graficul relației $4x + y = 11$ este deci $\{(1, 7), (2, 3)\}$;

e) $\{(3, 1)\}$; f) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3)\}$;

g) $\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3)\}$;

h) $\{(4, 1)\}$; i) $\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 8), (2, 8), (3, 3), (4, 8)\}$; j) $\{(1, 5), (1, 8), (2, 1), (2, 7), (3, 3), (4, 5), (4, 8)\}$.

269. *Fie mulțimile* $E = \{1, 3, 4, 5\}$, $F = \{1, 2, 5, 6\}$ *și graficele*:

a) $\{(1, 5), (4, 2), (5, 1)\}$; b) $\{(1, 2), (4, 5), (5, 6)\}$; c) $\{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$; d) $\{(1, 1), (5, 5)\}$;

e) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (3, 6), (5, 5)\}$; f) $\{(1, 1), (4, 2)\}$;

g) $\{(1, 5), (1, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 5), (5, 6)\}$;

h) $\{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$; i) $\{(4, 2), (4, 6)\}$; j) $\{(1, 2), (1, 5), (1, 6)\}$;

k) $\{(4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$; l) $\{(4, 1), (4, 2), (4, 5), (4, 6), (1, 6), (3, 6), (5, 6)\}$.

Să se exprime relațiile binare corespunzătoare acestor grafice prin propoziții conținînd literele x, y $(x \in E, y \in F)$.

Soluție.

a) $x + y = 6$; b) $y = x + 1$; c) $x < y$; d) $x = y$;

e) x divide y; f) $x = y^2$;

g) $\max(x, y) > 4$; h) $\min(x, y) = 2$; i) c.m.m.d.c. $(x, y) = 2$;

j) $x < 3$ și $y \geqslant 2$; k) $x > 3$ și $y < 5$; l) x este par sau $y = 6$.

Scanned with OKEN Scanner

270. *Fie relația binară $\mathcal{R}$ definită în mulțimea E.*
Negînd proprietățile prin care se definesc : relația reflexivă, relația simetrică și relația tranzitivă, să se spună în ce caz :

a) $\mathcal{R}$ nu este reflexivă ;
b) $\mathcal{R}$ nu este simetrică ;
c) $\mathcal{R}$ nu este tranzitivă.

Soluție.

a) $\mathcal{R}$ este reflexivă : fiecare ar fi $x \in E$, avem $x \mathcal{R} x$; $\mathcal{R}$ nu este reflexivă : Există $x \in E$ astfel că nu avem $x \mathcal{R} x$.

b) $\mathcal{R}$ este simetrică : Oricare ar fi $x \in E$ și $y \in E$, astfel că $x \mathcal{R} y$ avem și $y \mathcal{R} x$;

c) $\mathcal{R}$ nu este simetrică : Există $x \in E$ și $y \in E$ pentru care avem $x \mathcal{R} y$, dar nu avem $y \mathcal{R} x$.

c) $\mathcal{R}$ este tranzitivă : Oricare ar fi $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$ pentru care $x \mathcal{R} y$ și $y \mathcal{R} z$, avem și $x \mathcal{R} z$;

$\mathcal{R}$ nu este tranzitivă : Există $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$, astfel că $x \mathcal{R} y$, $y \mathcal{R} z$ și nu are loc $x \mathcal{R} z$.

271. *Fie mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4\}$.*
Să se cerceteze dacă relațiile binare, definite în E, corespunzătoare graficelor de mai jos, sînt reflexive. Sînt acestea simetrice? Dar tranzitive ?

a) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$;
b) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 4), (4, 3)\}$;
c) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;
d) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$;
e) $\{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$;
f) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3,) (4, 4)\}$;

Soluție.

a) Să notăm relația cu $\mathcal{R}$. Ea nu este reflexivă căci ar trebui ca oricare ar fi $x \in E$ să avem $x \mathcal{R} x$, or $3 \in E$ și nu avem $3 \mathcal{R} 3$ ($(3, 3)$ nu aparține graficului relației $\mathcal{R}$). Relația nu este nici simetrică. Într-adevăr, ca să fie simetrică ar trebui să avem $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$, adică dacă (x, y) aparține graficului relației, atunci și (y, x) aparține graficului ; dar $(1, 2)$ aparține

graficului și (2, 1) nu aparține, deci relația nu este simetrică.

Relația $\mathcal{R}$ este tranzitivă.

b) Relația nu este reflexivă căci, de exemplu, (1, 1) nu aparține graficului; este simetrică; nu este tranzitivă, căci, de exemplu, (1, 2) și (2, 1) aparțin graficului, iar (1, 1) nu aparține.

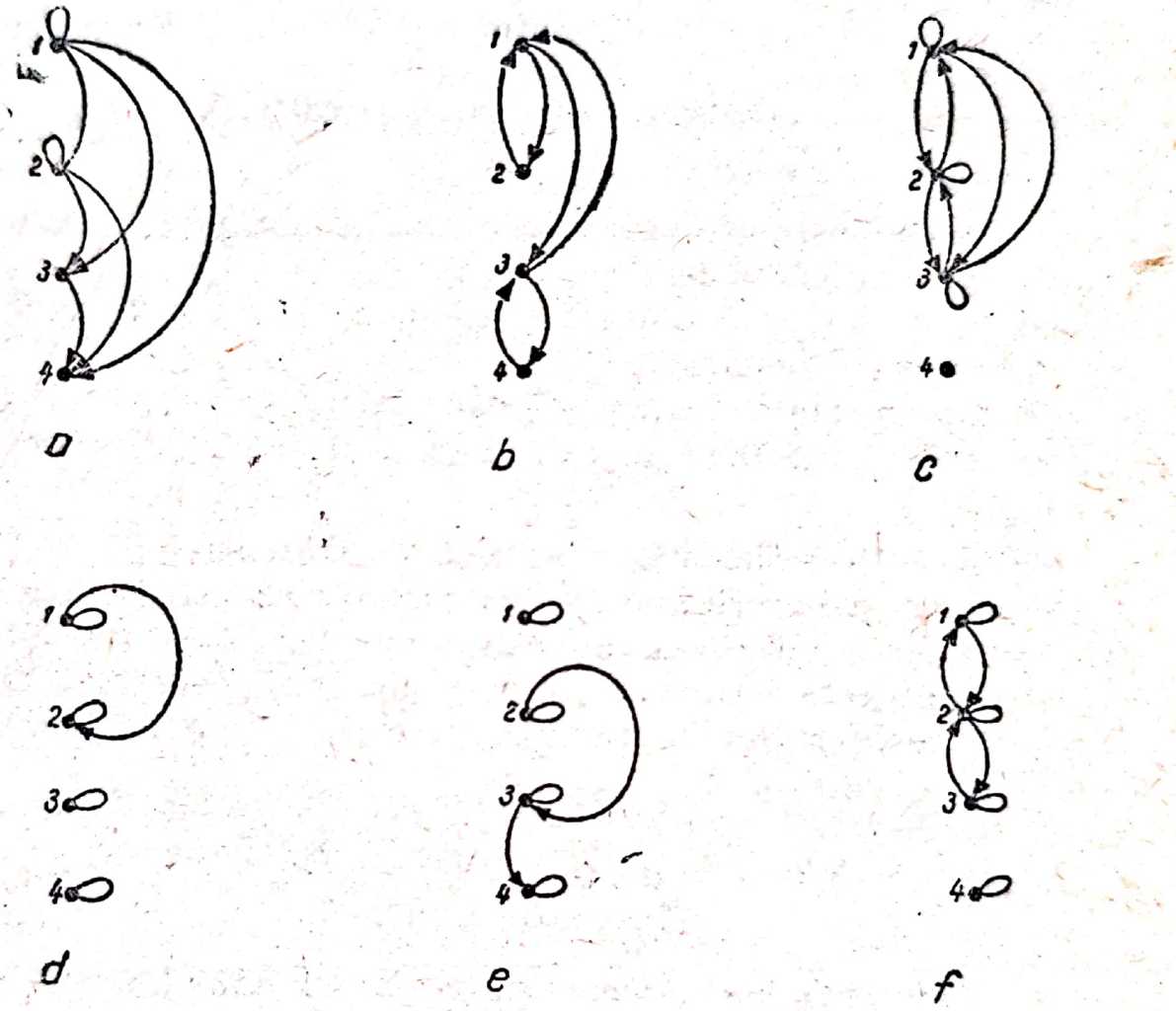


Fig. 14

c) Relația nu este reflexivă, căci (4, 4) nu aparține graficului; este simetrică și tranzitivă.

d) Relația este reflexivă; nu este simetrică, deoarece (1, 2) aparține graficului, iar (2, 1) nu; este o relație tranzitivă.

e) Relația este reflexivă, nu este simetrică — (2, 3) aparține graficului, iar (3, 2) nu aparține; nu este tranzitivă, căci (2, 3) și (3, 4) aparțin graficului, iar (2, 4) nu aparține.

Scanned with OKEN Scanner

f) Relația este reflexivă, este simetrică, dar nu este tranzitivă, căci (1, 2) și (2, 3) aparțin graficului, iar (1, 3) nu aparține.

272. *Să se cerceteze dacă următoarele relații binare, definite în R, sînt reflexive, simetrice, tranzitive:*

a) $x \mathcal{R}_1 y$; $x > 0$ și $y < 2$; b) $x \mathcal{R}_2 y$: $x > 1$ și $y > 1$; c) $x \mathcal{R}_3 y$: $x < 3$ și $y < 0$; d) $x \mathcal{R}_4 y$: $x \geqslant 0$ sau $y < 0$; e) $x \mathcal{R}_5 y$: $x \geqslant 1$ sau $y > 1$;

f) $x \mathcal{R}_6 y$: ($x > 0$ și $y > 0$) sau ($x < 0$ și $y < 0$).

Soluție.

a) $\mathcal{R}_1$ nu este reflexivă, căci nu avem pentru orice x real $x \mathcal{R}_1 x$, adică $x > 0$ și $x < 2$.

Din $x > 0$ și $y < 2$ nu rezultă $y > 0$ și $x < 2$, deci $\mathcal{R}_1$ nu este nici simetrică.

$\mathcal{R}_1$ este o relație tranzitivă, căci $x \mathcal{R}_1 y$ și $y \mathcal{R}_1 z \Rightarrow x \mathcal{R}_1 z$: într-adevăr, ($x > 0$ și $y < 2$) și ($y > 0$ și $z < 2$) $\Rightarrow$ ($x > 0$ și $z < 2$).

b) $\mathcal{R}_2$ este reflexivă, simetrică și tranzitivă;

c) $\mathcal{R}_3$ nu este reflexivă, nu este simetrică, este tranzitivă;

d) $\mathcal{R}_4$ este reflexivă, nu este simetrică, este tranzitivă.

e) $\mathcal{R}_5$ nu este reflexivă, nu este simetrică, este tranzitivă;

f) $\mathcal{R}_6$ este reflexivă, este simetrică, este tranzitivă.

273. *Fie relațiile binare $\mathcal{R}$ și $\mathcal{T}$ definite în mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ astfel:* $x \mathcal{R} y$: $max(x, y) \leqslant 5$:

$$x \mathcal{T} y : min(x, y) > 5.$$

a) *Să se scrie toate elementele graficelor celor două relații.*

b) *Să se cerceteze dacă cele două relații sînt: reflexive, simetrice, tranzitive.*

Soluție.

a) $G_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$;

$G_{\mathcal{T}} = \{(6, 6), (6, 7), (6, 8), (6, 9), (6, 10), (7, 6), (7, 7), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (8, 6), (8, 7), (8, 8), (8, 9), (8, 10), (9, 6),$

Scanned with OKEN Scanner

(9, 7), (9, 8), (9, 9), (9, 10), (10, 6), (10, 7), (10, 8), (10, 9), (10, 10)}.

b) Relația $\mathcal{R}$ nu este reflexivă. Într-adevăr, ca să fie reflexivă ar trebui ca oricare ar fi $x \in E$ să avem $x \mathcal{R} x$, adică $\max(x, x) \leqslant 5$, deci $x \leqslant 5$, ceea ce nu este adevărat căci, de exemplu, $6 > 5$.

Relație este simetrică: $\max(x, y) \leqslant 5 \Rightarrow \max(y, x) \leqslant 5$.

Relație $\mathcal{R}$ este tranzitivă, ceea ce se poate verifica pe tabelul de mai jos:

		$\max(x, y)$	$\max(y, z)$	$\max(x, z)$
1	$x \leqslant y \leqslant z$	y	z	z
2	$x \leqslant z \leqslant y$	y	y	z
3	$y \leqslant x \leqslant z$	x	z	z
4	$y \leqslant z \leqslant x$	x	z	x
5	$z \leqslant x \leqslant y$	y	y	x
6	$z \leqslant y \leqslant x$	x	y	x

În cazul 1) evident $\max(x, y) \leqslant 5$ și $\max(y, z) \leqslant 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow \max(x, z) \leqslant 5$ căci $(y \leqslant 5$ și $z \leqslant 5) \Rightarrow z \leqslant 5$. La fel se constată și în celelalte cazuri că $\mathcal{R}$ este o relație tranzitivă.

Relația $\mathcal{T}$ nu este reflexivă căci $\min(x, x) > 5$, adică $x > 5$ nu este adevărată oricare ar fi $x \in E$. Relația este simetrică, deoarece $\min(x, y) > 5 \Rightarrow \min(y, x) > 5$.

Pe tabelul de mai jos se poate verifica tranzitivitatea relației $\mathcal{T}$.

		$\min(x, y)$	$\min(y, z)$	$\min(x, z)$
1	$x \leqslant y \leqslant z$	x	y	x
2	$x \leqslant z \leqslant y$	x	z	x
3	$y \leqslant x \leqslant z$	y	y	x
4	$y \leqslant z \leqslant x$	y	y	z
5	$z \leqslant x \leqslant y$	x	z	z
6	$z \leqslant y \leqslant x$	y	z	z

Scanned with OKEN Scanner

274. *Fie relația* $\mathcal{R}$ *definită în mulțimea* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *prin* $x \mathcal{R} y$: $(x-1)(x-2)(x-a) + (y-1)(y-3)(y-b) = 0$, $a \in R$, $b \in R$. *Să se determine* a *și* b *astfel ca relație să fie simetrică și apoi să se cerceteze dacă este: reflexivă; tranzitivă.*

Soluție. Deoarece $1 \mathcal{R} 3$, ca relația să fie simetrică trebuie să avem și $3 \mathcal{R} 1$ adică, înlocuind în egalitatea din enunț x cu 3 și y cu 1, obținem $2(3-a) = 0$, $a = 3$.

Deoarece $2 \mathcal{R} 1$, pentru simetria lui $\mathcal{R}$ este necesar să avem și $1 \mathcal{R} 2$, adică înlocuind pe x cu 1 și pe y cu 2 în egalitatea din enunț, trebuie să avem $-(2-b) = 0$, deci $b = 2$.

Relația $\mathcal{R}$ este deci dată prin:

$$(x-1)(x-2)(x-3) + (y-1)(y-2)(y-3) = 0.$$

Să observăm că pentru $x \in E$ și $y \in E$ avem:

$$(x-1)(x-2)(x-3) \geqslant 0 \text{ și}$$
$$(y-1)(y-2)(y-3 \geqslant 0,$$

astfel că egalitatea din enunț este adevărată dacă și numai dacă avem:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \text{ și}$$
$$(y-1)(y-2)(y-3) = 0,$$

de unde rezultă $x \in \{1, 2, 3\}$, $y \in \{1, 2, 3\}$.

Graficul relației $\mathcal{R}$ este deci:

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

Pe graficul relației se constată că $\mathcal{R}$ este simetrică, deoarece odată cu (x, y) graficul conține și (y, x); $\mathcal{R}$ nu este reflexivă — graficul nu conține $(4, 4)$, $(5, 5)$ etc.

Tot pe graficul lui $\mathcal{R}$ se constată că relație este tranzitivă:

$$(1 \mathcal{R} 1 \text{ și } 1 \mathcal{R} 2) \Rightarrow 1 \mathcal{R} 2,$$
$$(1 \mathcal{R} 2 \text{ și } 2 \mathcal{R} 3) \Rightarrow 1 \mathcal{R} 3,$$
$$(1 \mathcal{R} 2 \text{ și } 2 \mathcal{R} 1) \Rightarrow 1 \mathcal{R} 1 \text{ etc.}$$

275. *Fie relația* $\mathcal{R}$ *definită în mulțimea* $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *prin* $x \mathcal{R} y$: $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0$.

a) Să se determine graficul relației.

b) Să se cerceteze dacă $\mathcal{R}$ *este o relație: reflexivă; simetrică; tranzitivă.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

a) Într-un sistem de referință rectangular, $x\,O\,y$, ecuația

$$x^2 + y^2 - 3x - 5y + 8 = 0, \quad x \in R, \quad y \in R,$$

reprezintă un cerc cu centrul în punctul $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ și raza $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Scriind ecuația $x^2+y^2-3x-5y+8=0$ sub forma $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ avem: $\frac{1}{2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(y-\frac{5}{2}\right)^2\geqslant 0$ și deci $\frac{1}{2}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geqslant 0$, de unde rezultă $\frac{3-\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; deoarece x este întreg, putem avea numai $x=1$ sau $x=2$.

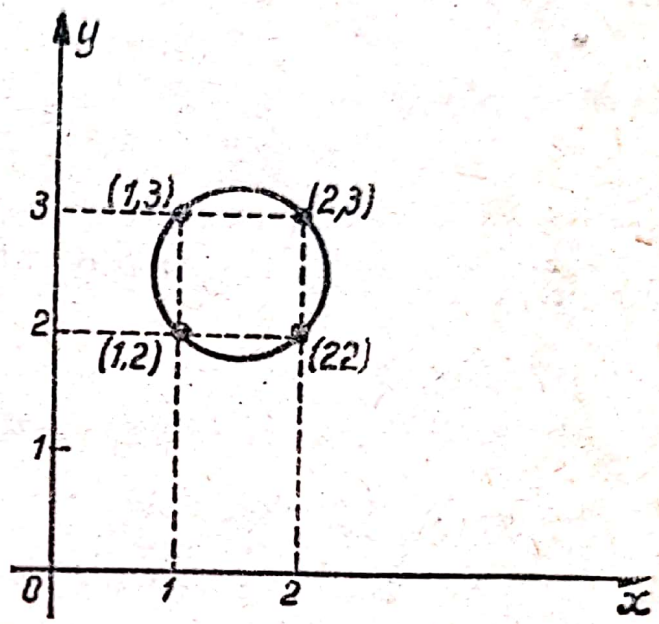


Fig. 15

Deoarece $\frac{1}{2}-\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geqslant 0$, avem $\frac{5-\sqrt{2}}{2}\leqslant y\leqslant\frac{5+\sqrt{2}}{2}$ și cum y este întreg, avem numai $y=2$ sau $y=3$. Se verifică ușor că graficul este format din: (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3).

b) $\mathcal{R}$ nu este reflexivă deoarece există un cuplu, anume (1, 1), care nu aparține graficului relației. $\mathcal{R}$ nu este simetrică, deoarece există un cuplu — anume (1, 2) — care aparține graficului, iar (2, 1) nu aparține.

Relația $\mathcal{R}$ este însă tranzitivă, ceea ce se poate verifica pe graficul relației:

$$(1\,\mathcal{R}\,2 \text{ și } 2\,\mathcal{R}\,2) \Rightarrow 1\,\mathcal{R}\,2,$$
$$(1\,\mathcal{R}\,2 \text{ și } 2\,\mathcal{R}\,3) \Rightarrow 1\,\mathcal{R}\,3,$$
$$(2\,\mathcal{R}\,2 \text{ și } 2\,\mathcal{R}\,2) \Rightarrow 2\,\mathcal{R}\,2,$$
$$(2\,\mathcal{R}\,2 \text{ și } 2\,\mathcal{R}\,3) \Rightarrow 2\,\mathcal{R}\,3.$$

276. *Sînt reflexive următoarele relații binare definite în R?*

a) $x^2 = y^2$; *b)* $x^2 + x = y^2 + y$; *c)* $x = y^2$; *d)* $x^2 - 3x + 2 = y^2 - 3y + 2$;

e) $x^2 + x = y^2 - y$; *f)* $x^2 + xy - y^2 + x - y = 0$; *g)* $x^2 + 3xy - 4y^2 + 2x - 2y = 0$

Răspuns:

Relațiile a), b), d), g) sînt reflexive, iar c), e), f) nu sînt reflexive.

277. *Fie $\mathcal{R}$ o relație binară definită în mulțimea E. Se definesc în E relațiile binare $\mathcal{S}$ și $\mathcal{T}$ astfel:*

$x\,\mathcal{S}\,y$: $x\,\mathcal{R}\,y$ *sau* $y\,\mathcal{R}\,x$;

$x\,\mathcal{T}\,y$: $x\,\mathcal{R}\,y$ *și* $y\,\mathcal{R}\,x$.

a) Este relația $\mathcal{S}$ refexivă?

b) $\mathcal{S}$ este simetrică oricare ar fi relația $\mathcal{R}$?

c) $\mathcal{S}$ este o relație tranzitivă? Dar dacă $\mathcal{R}$ este tranzitivă, $\mathcal{S}$ este tranzitivă?

Să se răspundă la aceleași întrebări înlocuind $\mathcal{S}$ cu $\mathcal{T}$.

Soluție.

a) $\mathcal{S}$ poate fi reflexivă. Într-adevăr, dacă $\mathcal{R}$ este reflexivă, atunci și $\mathcal{S}$ este reflexivă:

$x\,\mathcal{S}\,x \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,x$ sau $x\,\mathcal{R}\,x \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,x$, deci condiția necesară și suficientă ca $\mathcal{S}$ să fie reflexivă este ca $\mathcal{R}$ să fie reflexivă; de aici rezultă că nu întotdeauna $\mathcal{S}$ este reflexivă, căci dacă $\mathcal{R}$ nu este reflexivă, $\mathcal{S}$ nu este reflexivă.

b) $x\,\mathcal{S}\,y \Leftrightarrow x\,\mathcal{R}\,y$ sau $y\,\mathcal{R}\,x \Leftrightarrow y\,\mathcal{R}\,x$ sau $x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow y\,\mathcal{S}\,x$, deci $x\,\mathcal{S}\,y \Leftrightarrow y\,\mathcal{S}\,x$ adică $\mathcal{S}$ este simetrică, oricare ar fi $\mathcal{R}$.

c) Nu oricare ar fi $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ este o relație tranzitivă. Într-adevăr dacă în $E = \{1, 2, 3\}$ definim $\mathcal{R}$ astfel:

$$x\,\mathcal{R}\,y : x + 2y = 4, \text{ atunci}$$
$$x\,\mathcal{S}\,y : x + 2y = 4 \text{ sau } 2x + y = 4.$$

Scanned with OKEN Scanner

Relația $\mathcal{S}$ nu este tranzitivă, deoarece avem $2 \mathcal{S} 1$ și $1 \mathcal{S} 2$ dar nu avem $2 \mathcal{S} 2$.

Tranzitivitatea lui $\mathcal{R}$ nu este suficientă pentru tranzitivitatea relației $\mathcal{S}$. Într-adevăr, dacă $\mathcal{R}$ este relația „divide", care este tranzitivă, definită în (2, 3, 6), avem:

$$x \mathcal{S} y : x \text{ divide } y \text{ sau } y \text{ divide } x,$$

relație care nu este tranzitivă, căci avem $2 \mathcal{S} 6$ și $6 \mathcal{S} 3$, dar nu avem $2 \mathcal{S} 3$. În mod asemănător se arată că:

— $\mathcal{T}$ este reflexivă odată cu $\mathcal{R}$;
— $\mathcal{T}$ este simetrică oricare ar fi $\mathcal{R}$;
— $\mathcal{T}$ este tranzitivă dacă $\mathcal{R}$ este tranzitivă.

278. *Care dintre următoarele relații binare sînt relații de echivalență și care nu sînt ?*

a) $(x, y)\mathcal{R}(x', y') : xx' \geqslant 0, yy' \geqslant 0$, *relație definită în* $R \times R$.
b) $(x, y) \mathcal{S} (x', y') : xx' > 0, yy' > 0$, *relație definită în* $(R - \{0\}) \times (R - \{0\})$.
c) $(x, y)\mathcal{T}(x', y')$, $x+y=x'+y'$, relația definită în $R \times R$.
d) $(x, y)\mathcal{U}(x', y') : 2x + 3y = 2x' + 3y'$, relație definită în $R \times R$.

Soluție.

a) Relația este reflexivă, simetrică, dar nu este tranzitivă, căci există cuplurile (1, 4), (0, 2), (— 1, 3) astfel că $(1, 4)\mathcal{R}(0, 2)$ și $(0, 2)\mathcal{R}(-1, 3)$, dar nu avem $(1, 4)\mathcal{R}(-1, 3)$.
$\mathcal{R}$ nu este o relație de echivalență;
b), c), d), $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$ sînt relații de echivalență.

279. *Să se cerceteze dacă relațiile binare* $\mathcal{R}$ *și* $\mathcal{S}$, *definite mai jos, sînt relații de echivalență.*
În caz afirmativ, care sînt clasele de echivalență ?

a) $x \mathcal{R} y : xy > 0, \quad x \in R - \{0\}, \quad y \in R - \{0\}$;
b) $x \mathcal{S} y : xy \geqslant 0, \quad x \in R, \quad y \in R$.

Soluție.

a) Relația $\mathcal{R}$ este reflexivă: $x \mathcal{R} x \Leftrightarrow x^2 > 0$, oricare ar fi $x \in R, \quad x \neq 0$.
Relația este simetrică, deoarece $xy > 0 \Rightarrow yx > 0$.
$\mathcal{R}$ este și tranzitivă. Într-adevăr, $xy > 0$ și $yz > 0 \Rightarrow xy \cdot$

Scanned with OKEN Scanner

$\cdot yz > 0 \Rightarrow xy^2z > 0 \Rightarrow xz > 0$. Fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă, $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență. Clasele de echivalență sînt: mulțimea numerelor reale strict pozitive și mulțimea numerelor reale strict negative.

b) $\mathcal{S}$ este o relație binară reflexivă: $x \mathcal{S} x \Leftrightarrow x^2 \geqslant 0$ și evident oricare ar fi $x \in R$ avem $x^2 \geqslant 0$.

$\mathcal{S}$ este o relație simetrică: $xy \geqslant 0 \Rightarrow yx \geqslant 0$.

Ca relația $\mathcal{S}$ să fie tranzitivă, ar trebui ca $(x \mathcal{S} y$ și $y \mathcal{S} z) \Rightarrow x \mathcal{S} z$, adică $(xy \geqslant 0$ și $yz \geqslant 0) \Rightarrow xz \geqslant 0$, ceea ce nu se întîmplă întotdeauna. Într-adevăr, pentru $x > 0$, $y = 0$, $z < 0$ avem $xy \geqslant 0$, $yz \geqslant 0$ iar $xz < 0$.

280. *Fie* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset N$. *În* $E \times E$ *considerăm relația* $\mathcal{R}$ *definită astfel*: $(x, y)\, \mathcal{R} (x', y') : x + y' = x' + y$.

a) *Să se arate că* $\mathcal{R}$ *este o relație de echivalență.*

b) *Să se determine mulțimea cît* $\frac{E \times E}{\mathcal{R}}$. *Pe o schemă reprezentînd* $E \times E$ *să se indice clasele de echivalență.*

Soluție.

a) $\mathcal{R}$ este reflexivă: $(x, y)\, \mathcal{R}\, (x, y) \Leftrightarrow x + y = x + y$, ceea ce este adevărat pentru oricare cuplu $(x, y) \in E \times E$.

$\mathcal{R}$ este simetrică, deoarece $(x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y') \Rightarrow (x', y')\, \mathcal{R}\, \mathcal{R}(x, y)$.

Într-adevăr, implicația $x + y' = x' + y \Rightarrow x' + y = x + y'$ este evident adevărată. $\mathcal{R}$ este și tranzitivă. Fie $(x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y') \Leftrightarrow x + y' = x' + y$, $(x', y')\, \mathcal{R}\, (x'', y'') \Leftrightarrow x' + y'' = x'' + y'$. Adunînd membru cu membru egalitățile $x + y' = x' + y$ și $x' + y'' = x'' + y'$ obținem $x + y'' = x'' + y$ adică $(x, y)\, \mathcal{R}\, (x'', y'')$ și deci $(x, y)\, \mathcal{R}\, (x', y')$ și $(x' y')\, \mathcal{R}\, (x'', y'') \Rightarrow (x, y)\, \mathcal{R}\, (x'', y'')$.

b) Mulțimea cît $\frac{E \times E}{\mathcal{R}}$ este formată din:

$\{(1, 5)\}$, $\{(1, 4), (2, 5)\}$, $\{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$, $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$, $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$, $\{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$, $\{(3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$, $\{(4, 1), (5, 2)\}$, $\{(5, 1)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

În figura 16 fiecare punct îngroșat reprezintă un element al lui $E \times E$; punctele așezate pe același segment oblic reprezintă o clasă de echivalență; punctele (1, 5); (5, 1) sînt, de asemenea, clase de echivalență.

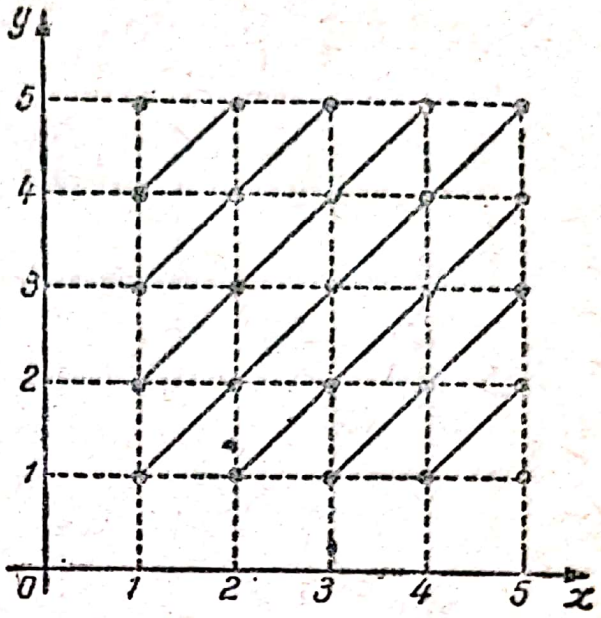


Fig. 16

281. *Fie* $E=\{1, 2, 3, 4\} \subset N$ *și relația binară* $\mathcal{R}$ *definită în* $E \times E$ *prin*

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') : x \cdot y' = x' \cdot y.$$

a) Să se arate că $\mathcal{R}$ *este o relație de echivalență.*
b) Să se determine clasele de echivalență. Pe o schemă se vor reprezenta $E \times E$ *și clasele de echivalență.*

Soluție.

a) Deoarece $(x, y)\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow x \cdot y = x \cdot y$ și egalitatea este adevărată oricare ar fi $(x, y) \in E \times E$, $\mathcal{R}$ este reflexivă.

$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Rightarrow (x', y')\,\mathcal{R}(x, y)$, adică $xy' = x'y \Rightarrow x'y = xy'$, ceea ce este evident și deci relația este simetrică.

Relația $\mathcal{R}$ este și tranzitivă. Într-adevăr, fie $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ și $(x', y')\,\mathcal{R}\,(x'', y'')$, adică $xy' = x'y$ și $x'y'' = x''y'$. Înmulțind membru cu membru cele două egalități obținem după simplificări: $xy'' = x''y$, adică $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x'', y'')$. Am demonstrat astfel că $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ și $(x', y')\,\mathcal{R}\,(x'', y'') \Rightarrow (x, y)\,\mathcal{R}\,(x'', y'')$, ceea ce exprimă tranzitivitatea relației $\mathcal{R}$. Fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență.

b) Clasele de echivalență sînt:

$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$, $\{(1, 2), (2, 4)\}$, $\{(1, 3)\}$, $\{(1, 4)\}$, $\{(2, 1), (4, 2)\}$, $\{(2, 3)\}$, $\{(3, 1)\}$, $\{(3, 2)\}$, $\{(3, 4)\}$, $\{(4, 1)\}$, $\{(4, 3)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

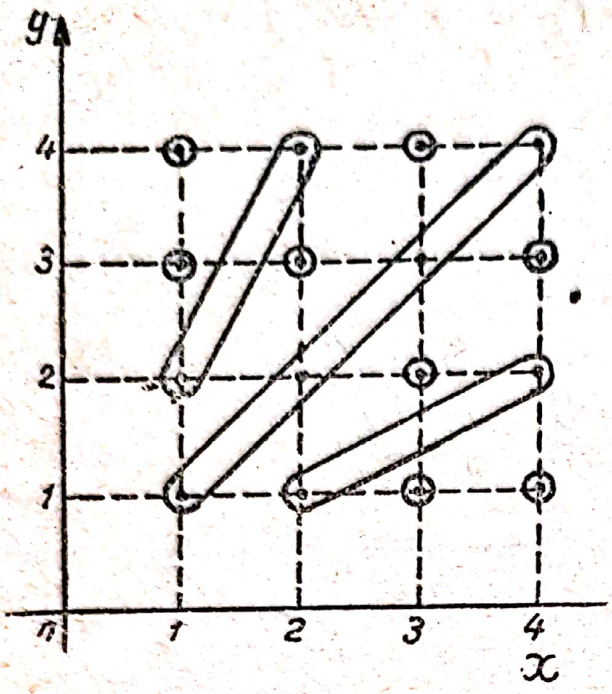


Fig. 17

În figura 17 punctele situate în interiorul fiecărei curbe închise reprezintă o clasă de echivalență.

282. *Fie* $E = \{a, b, c, d\}$ *și* $A = \{a, b\}$. *În* $\mathcal{P}(E)$ *se definește relația* $\mathcal{R}$ *astfel :* $X \mathcal{R} Y : X \cup A = Y \cup A$.

Este $\mathcal{R}$ *o relație de echivalență ? În caz afirmativ, care sînt clasele de echivalență ?*

Soluție.

Deoarece $X \cup A = X \cup A$—ceea ce este echivalent cu $X \mathcal{R} X$ — oricare ar fi $X \in \mathcal{P}(E)$, relația $\mathcal{R}$ este reflexivă.

Avem evident $(X \cup A = Y \cup A) \Rightarrow (Y \cup A = X \cup A)$ adică $X \mathcal{R} Y \Rightarrow Y \mathcal{R} X$, ceea ce exprimă simetria lui $\mathcal{R}$. Relația este și tranzitivă căci $(X \cup A = Y \cup A$ și $Y \cup A = Z \cup A) \Rightarrow X \cup A = Z \cup A$, adică $(X \mathcal{R} Y$ și $Y \mathcal{R} Z) \Rightarrow X \mathcal{R} Z$.

$\mathcal{R}$ este deci o relație de echivalență.

Pentru a determina clasele de echivalență vom scrie mai întîi toate părțile X ale lui E pentru care $X \cup A = \{a, b\}$ și vom obține o clasă de echivalență ; repetăm procedeul înlocuind succesiv $\{a, b\}$ prin $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, c, d\}$ și obținem celelalte clase de echivalență.

Mulțimea cît $\frac{\mathcal{P}(E)}{\mathcal{R}}$ are elementele :

$$\{\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}, \{\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}\}, \{\{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}\}.$$

283. *În mulțimea* $\{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\} \subset Z$ *se definesc relațiile binare* $\mathcal{R}$ *și* $\mathcal{S}$ *prin :*

a) $x \mathcal{R} y$ *: Există* $m \in Z$ *astfel ca* $x - y = 2m$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $x \mathcal{S} y : x - y$ *este multiplu de* 3.

Să se arate că $\mathcal{R}$ *și* $\mathcal{S}$ *sînt relații de echivalență. Care sînt clasele de echivalență?*

Soluție.

a) $\mathcal{R}$ este reflexivă deoarece pentru $m = 0$, avem — oricare ar fi $x : x - x = 2 \cdot 0$.

$\mathcal{R}$ este simetrică, deoarece $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$. Într-adevăr, din $x - y = 2m$ rezultă $y - x = 2(-m)$.

$\mathcal{R}$ este tranzitivă. Într-adevăr, fie $x \mathcal{R} y$ și $y \mathcal{R} z$, adică există $m \in Z$, $n \in Z$, astfel ca $x - y = 2m$ și $y - z = 2n$. Adunînd aceste egalități membru cu membru, obținem : $x - z = 2(m + n)$, unde $m + n \in Z$ și deci $x \mathcal{R} z$, adică relația $\mathcal{R}$ este tranzitivă. Fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă, $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență.

Clasele de echivalență sînt : $\{1, 3, 5, 7, 9\}$; $\{2, 4, 6, 8, 10\}$.

b) Se demonstrează ca la punctul a) că $\mathcal{S}$ este o relație de echivalență. Clasele de echivalență sînt : $\{3, 6, 9\}$, $\{1, 4, 7, 10\}$, $\{2, 5, 8\}$.

284. *Fie* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$. *În* $\mathcal{P}(E)$ *se definește relația* $X \mathcal{R} Y : X \cap A = Y \cap A$.

Este aceasta o relație de echivalență ? În caz afirmativ să se determine mulțimea cît $\frac{\mathcal{P}(E)}{\mathcal{R}}$.

Soluție.

Relația $\mathcal{R}$ este reflexivă: $X \mathcal{R} X \Leftrightarrow X \cap A = X \cap A$, egalitatea fiind adevărată pentru oricare parte X a lui E.

Deoarece $(X \cap A = Y \cap A) \Leftrightarrow (Y \cap A = X \cap A)$, adică $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow Y \mathcal{R} X$, relația este simetrică.

$\mathcal{R}$ este și tranzitivă deoarece $(X \cap A = Y \cap A$ și $Y \cap A = Z \cap A) \Rightarrow X \cap A = Z \cap A$ adică $X \mathcal{R} Y$ și $Y \mathcal{R} Z \Rightarrow X \mathcal{R} Z$.

Fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă, $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență.

Pentru a obține clasele de echivalență — elemente ale mulțimii cît — vom considera mai întîi părțile lui E disjuncte de A ; apoi părțile X astfel ca $X \cap A = \{1\}$; părțile X

Scanned with OKEN Scanner

pentru care $X \cap A = \{3\}$ și în sfîrșit părțile X pentru care $X \cap A = \{1, 3\}$.

Astfel, obținem următoarele clase de echivalență:

$\{\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$, $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 4\}\ \{1, 2, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$, $\{\{3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}\ \{1, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.

285. *Să se cerceteze dacă relația binară $\mathcal{R}$ definită în mulțimea numerelor reale prin: $x \mathcal{R} y : x^3 - 3x = y^3 - 3y$ este o relație de echivalență. În caz afirmativ să se precizeze clasele de echivalență.*

Soluție.

$\mathcal{R}$ este reflexivă, pentru că avem $x \mathcal{R} x$, adică $x^3 - 3x = x^3 - 3x$, oricare ar fi $x \in R$.

$\mathcal{R}$ este simetrică, deoarece $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$. Într-adevăr, avem evident $x^3 - 3x = y^3 - 3y \Rightarrow y^3 - 3y = x^3 - 3x$.

$\mathcal{R}$ este și tranzitivă. Va trebui să arătăm că $x \mathcal{R} y$ și $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$, adică $x^3 - 3x = y^3 - 3y$ și $y^3 - 3y = z^3 - 3z \Rightarrow x^3 - 3x = z^3 - 3z$.

Adunînd membru cu membru primele două egalități, o obținem pe ultima și deci implicația este demonstrată.

Fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență. Pentru a determina clasa $\hat{a}$ a unui număr real a, va trebui să găsim toate numerele x pentru care $x \mathcal{R} a$, adică va trebui să rezolvăm ecuația în x: $x^3 - 3x = a^3 - 3a$.

Ecuația se poate scrie $x^3 - a^3 - 3(x - a) = 0$, sau $(x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0$, de unde rezultă rădăcina $x = a$ (ceea ce era de așteptat, căci $\hat{a}$ conține evident pe a) și rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$.

Pentru ca x_1 și x_2 să fie reale, va trebui ca discriminantul ecuației $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ să fie pozitiv sau nul, $\Delta \geqslant 0$.

Deoarece $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 3) = 3(-a^2 + 4)$, obținem $-2 \leqslant a \leqslant 2$.

Dacă $a = -2$, atunci $x_1 = x_2 = 1$;

dacă $-2 < a < 2$, atunci $x_1 = \dfrac{-a - \sqrt{3(-a^2 + 4)}}{2}$

$$x_2 = \frac{-a + \sqrt{3(-a^2+4)}}{2};$$

dacă $a = 2$, atunci $x_1 = x_2 = -1$.

În concluzie:

pentru $a \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ avem $\hat{a} = \{a\}$;

pentru $a = -2$, $-\hat{2} = \{-2, 1\}$;

pentru $-2 < a < 2$ și $a \neq -1$, $a \neq 1$, $\hat{a} = \left\{a, \frac{-a-\sqrt{3(-a^2+4)}}{2}, \frac{-a+\sqrt{3(-a^2+4)}}{2}\right\}$; dacă $a^2 = 1$, atunci a este soluție a ecuației $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$ și deci $\hat{1} = \{1, -2\}$; $-\hat{1} = \{-1, 2\}$; în sfîrșit pentru $a = 2$, $\hat{2} = \{-1, 2\}$.

286. *Să se arate că relația binară $\mathcal{R}$ definită în mulțimea numerelor reale strict pozitive prin*

$$x \mathcal{R} y : \ln^2 x - \ln x = \ln^2 y - \ln y,$$

este o relație de echivalență.

Să se determine clasele de echivalență.

Soluție.

$\mathcal{R}$ este reflexivă, deoarece $\ln^2 x - \ln x = \ln^2 x - \ln x$ oricare ar fi x real strict pozitiv.

$\mathcal{R}$ este și simetrică, deoarece $(\ln^2 x - \ln x = \ln^2 y - \ln y) \Rightarrow (\ln^2 y - \ln y = \ln^2 x - \ln x)$.

Relația $\mathcal{R}$ este și tranzitivă, deoarece din $\ln^2 x - \ln x = \ln^2 y - \ln y$ și $\ln^2 y - \ln y = \ln^2 z - \ln z$ rezultă $\ln^2 x - \ln x = \ln^2 z - \ln z$.

Fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă, $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență. Pentru a preciza clasele de echivalență este suficient să determinăm clasa $\hat{a}$ a fiecărui număr real $a > 0$.

$\hat{a}$ conține toate soluțiile ecuației în x: $\ln^2 x - \ln x = \ln^2 a - \ln a$.

Această ecuație este echivalentă cu $(\ln x - \ln a)(\ln x + \ln a - 1) = 0$ de unde rezultă $\ln x - \ln a = 0$ cu soluția

$x=a$; $\ln x + \ln a - 1 = 0$ cu soluția $x = \frac{e}{a}$ și deci $\hat{a} = \left\{a, \frac{e}{a}\right\}$, dacă $a \neq \frac{e}{a}$ (adică $a \neq \sqrt{e}$) și $\widehat{\sqrt{e}} = \{\sqrt{e}\}$.

287. *Să se cerceteze dacă relația binară $\mathcal{R}$ definită în mulțimea numerelor reale prin $x \mathcal{R} y$: $\sin^2 x - 2 \sin x = \sin^2 y - 2 \sin y$ este o relație de echivalență.*

În caz afirmativ, să se determine clasele de echivalență.

Soluție.

Pentru ca $\mathcal{R}$ să fie reflexivă trebuie să avem, $x \mathcal{R} x$, oricare ar fi x real, adică $\sin^2 x - 2 \sin x = \sin^2 x - 2 \sin x$.

Această egalitate este evident adevărată oricare ar fi $x \in R$, deci $\mathcal{R}$ este reflexivă.

$\mathcal{R}$ este și simetrică, deoarece $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$. Într-adevăr avem :

$$(\sin^2 x - 2 \sin x = \sin^2 y - 2 \sin y) \Rightarrow (\sin^2 y - 2 \sin y = \sin^2 x - 2 \sin x).$$

Să arătăm că $\mathcal{R}$ este tranzitivă.

$x \mathcal{R} y$ și $y \mathcal{R} z$ înseamnă $\sin^2 x - 2 \sin x = \sin^2 y - 2 \sin y$ și $\sin^2 y - 2 \sin y = \sin^2 z - 2 \sin z$; rezultă $\sin^2 x - 2 \sin x = \sin^2 z - 2 \sin z$, adică $x \mathcal{R} z$, deci $\mathcal{R}$ este tranzitivă.

Fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență. Să determinăm clasa de echivalență a unui număr real a. Pentru aceasta va trebui să găsim toate numerele reale x pentru care $x \mathcal{R} a$, adică va trebui să rezolvăm ecuația în x : $\sin^2 x - 2 \sin x = \sin^2 a - 2 \sin a$.

Ecuația se mai poate scrie $(\sin x - \sin a)(\sin x + \sin a - 2) = 0$ de unde rezultă $\sin x = \sin a$ sau $\sin x + \sin a = 2$.

Mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = \sin a$ este, oricare ar fi a real :

$$M = \{x \in R \mid x = a + 2k\pi, \text{ sau } x = \pi - a + 2m\pi,\ k \in Z,\ m \in Z\}.$$

Deoarece $\sin x + \sin a - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sin a = 1$, soluțiile ecuației $\sin x + \sin a - 2 = 0$ sînt cuprinse în M.

Scanned with OKEN Scanner

Am obținut astfel: $\hat{a} = \{x \in R | x = a + 2k\pi$, sau $x = \pi - a + 2m\pi$, $k \in Z$, $m \in Z\}$.

288. *Fie $\mathcal{R}$ o relație binară definită în mulțimea $E = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \subset Z$ prin $x \mathcal{R} y$: $x^2 - y^2 = 2(x - y)$.*

Să se cerceteze dacă $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență și, dacă este cazul, să se precizeze clasele de echivalență.

Soluție.

Relația este reflexivă: $x \mathcal{R} x \Leftrightarrow x^2 - x^2 = 2(x - x)$, egalitate adevărată oricare ar fi $x \in E$.

Relația $\mathcal{R}$ este și simetrică, deoarece $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$. Într-adevăr, este evident că $x^2 - y^2 = 2(x - y) \Rightarrow y^2 - x^2 = 2(y - x)$.

Pentru ca $\mathcal{R}$ să fie tranzitivă, ar trebui să avem: $x \mathcal{R} y$ și $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$, adică $x^2 - y^2 = 2(x - y)$ și $y^2 - z^2 = 2(y - z) \Rightarrow x^2 - z^2 = 2(x - z)$; adunînd primele egalități membru cu membru, obținem ultima egalitate și deci $\mathcal{R}$ este tranzitivă.

Fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă, $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență.

Fie $a \in E$ și să determinăm clasa de echivalență a lui a, $\hat{a}$.

Pentru aceasta va trebui să găsim toate numerele $x \in E$ pentru care $x \mathcal{R} a$, adică $x^2 - a^2 = 2(x - a)$.

Ecuația $x^2 - a^2 = 2(x - a)$ are soluțiile $x_1 = a$ și $x_2 = 2 - a$.

Se observă că pentru $a \in E$, $a \neq 8$, avem și $2 - a \in E$; dacă $a = 8$ atunci $2 - a = -6 \notin E$; dacă $a = 1$, atunci avem și $2 - a = 1$.

Rezultă că: dacă $a \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, atunci $\hat{a} = \{a, 2 - a\}$; pentru $a = 1$, avem $\hat{1} = \{1\}$ iar pentru $a = 8$, $\hat{8} = \{8\}$.

Clasele de echivalență sînt deci următoarele:

$\{1\}$, $\{8\}$, $\{-5, 7\}$, $\{-4, 6\}$, $\{-3, 5\}$, $\{-2, 4\}$, $\{-1, 3\}$, $\{0, 2\}$.

Scanned with OKEN Scanner

289. *Să se arate că dacă relația binară $\mathcal{R}$ definită într-o mulțime E, este simetrică, tranzitivă și satisface condiția: „oricare ar fi $x \in E$, există $y \in E$ astfel ca $x \mathcal{R} y$", atunci $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență.*

Soluție.

Oricare ar fi $x \in E$ există $y \in E$ astfel că $x \mathcal{R} y$ și (datorită simetriei lui $\mathcal{R}$) $y \mathcal{R} x$; folosind tranzitivitatea relației $\mathcal{R}$ avem: $x \mathcal{R} y$ și $y \mathcal{R} x \Rightarrow x \mathcal{R} x$, oricare ar fi $x \in E$, adică $\mathcal{R}$ este reflexivă.

290. *Fie mulțimea $E = \{0, 1, 2, 3, 6\} \subset Z$ și relația binară $\mathcal{R}$ definită în mulțimea $E \times E$ astfel:*

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') : (4x + 5y - 20)(4x' + 5y' - 20) > 0.$$

a) Să se arate că $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență.

b) Să se precizeze clasele de echivalență. Să se reprezinte grafic $E \times E$ și clasele de echivalență.

Soluție.

a) Avem: $(x, y) \mathcal{R} (x, y) \Leftrightarrow (4x + 5y - 20)^2 > 0$ și deci $\mathcal{R}$ este reflexivă.

Ea este evident simetrică, dcoarece

$$(4x + 5y - 20)(4x' + 5y' - 20) > 0 \Rightarrow (4x' + 5y' - 20)(4x + 5y - 20) > 0, \text{ adică}$$
$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \Rightarrow (x', y') \mathcal{R} (x, y).$$

Pentru tranzitivitate avem:

$$\begin{cases} (4x + 5y - 20)(4x' + 5y' - 20) > 0, \\ (4x' + 5y' - 20)(4x'' + 5x'' - 20) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (4x + 5y - 20)(4x'' + 5y'' - 20)(4x' + 5y' - 20)^2 > 0 \Rightarrow (4x + 5y - 20)(4x'' + 5y'' - 20) > 0$, adică $(x, y) \mathcal{R} (x', y')$ și $(x', y') \mathcal{R} (x'', y'') \Rightarrow (x, y) \mathcal{R} (x'', y'')$, relația fiind astfel și tranzitivă. Ea este o relație de echivalență.

b) În figura 18 $E \times E$ este reprezentat prin puncte în plan; toate punctele așezate de aceeași parte a dreptei de ecuație $4x + 5y - 20 = 0$, formează o clasă de echivalență. Clasele de echivalență sînt deci următoarele:

Scanned with OKEN Scanner

$\hat{1} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$,

$\hat{2} = \{(0, 6), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 3), (3, 6), (6, 0) (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 6)\}$.

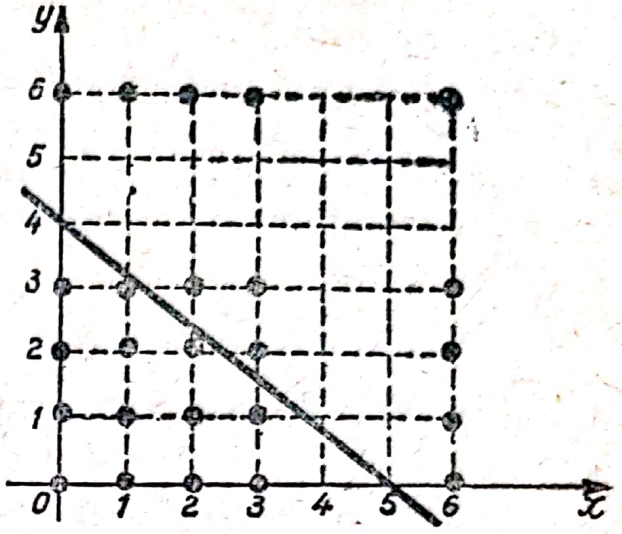


Fig. 18

291. *Să se cerceteze dacă relațiile următoare sînt: reflexive; simetrice; tranzitive; relații de echivalență (se vor preciza clasele de echivalență):*

a) Relația $\mathcal{R}$ definită în mulțimea dreptelor unui plan prin: $d \mathcal{R} d' \Leftrightarrow$ dreptele d, d' nu au puncte comune.

b) În mulțimea dreptelor unui plan π, d este în relație cu d' dacă d coincide cu d' sau d nu are nici un punct comun cu d'.

c) Relația de perpendicularitate, $d \perp d'$ definită în mulțimea dreptelor unui plan.

d) În planul π punctat (considerat ca mulțime de puncte) se dă punctul fix O; punctul A este în relație cu punctul B dacă A, O, B sînt coliniare — relație definită în mulțimea E a punctelor planului π din care am îndepărtat punctul O.

e) În mulțimea de la punctul precedent, A este în relație cu B dacă $OA = OB$.

f) În mulțimea dreptelor din spațiu care trec printr-un punct dat O, d este în relație cu d' dacă există un plan care trece prin O și conține dreptele d, d'.

g) În mulțimea punctelor din spațiu nesituate pe o dreaptă dată Δ, punctul A este în relație cu punctul B dacă există un plan care trece prin Δ și conține punctele A, B.

h) În mulțimea punctelor din spațiu nesituate pe o dreaptă dată, Δ, punctul A este în relație cu punctul B dacă A și B sînt egal depărtate de Δ.

Soluție.

a) Relația nu este reflexivă căci o dreaptă are puncte comune cu ea însăși; $\mathcal{R}$ este simetrică, deoarece dacă $d \mathcal{R} d'$,

atunci avem și $d' \mathcal{R} d$; relația nu este tranzitivă, căci există dreptele d', d astfel ca $d \mathcal{R} d'$ și $d' \mathcal{R} d$ dar nu avem $d \mathcal{R} d$.

b) Relația este reflexivă, simetrică și tranzitivă, deci este o relație de echivalență. Dacă d este o dreaptă a planului, clasa acestei drepte este formată din toate dreptele planului paralele cu d.

c) Relația nu este reflexivă, căci o dreaptă nu este perpendiculară pe ea însăși; este simetrică deoarece $d \perp d'$, atunci și $d' \perp d$; nu este tranzitivă, căci există dreptele d, d' astfel ca $d \perp d'$ și $d' \perp d$ dar nu avem $d \perp d$.

d) Relația este reflexivă căci A, O, A, sînt coliniare oricare ar fi $A \in E$; este simetrică, deoarece dacă A, O, B sînt coliniare, atunci și B, O, A, sînt coliniare; relația este și tranzitivă, căci dacă A, O, B sînt coliniare, B, O, C sînt coliniare, atunci și A, O, C sînt coliniare. Relația fiind reflexivă, simetrică și tranzitivă este o relație de echivalență. Clasele de echivalență sînt dreptele care trec prin O, fără acest punct.

e) Relația este reflexivă, $OA = OA$ oricare ar fi $A \in E$; este și simetrică deoarece dacă $OA = OB$ atunci $OB = OA$; relația este și tranzitivă: din $OA = OB$ și $OB = OC$, rezultă $OA = OC$. Este o relație de echivalență, clasele de echivalență fiind cercurile cu centrul în O.

f) Relația este reflexivă, căci oricare ar fi dreapta d (care nu trece prin O), ea determină cu punctul O un plan; evident este simetrică; relația este și tranzitivă; dacă O, d, d' sînt în același plan π, iar O, d', d'' sînt într-un plan π', atunci O, d, d'' sînt în același plan (deoarece planele π, π' coincid). Este o relație de echivalență, clasele de echivalență fiind planele care trec prin 0.

g) Relația este reflexivă și simetrică; ea este și tranzitivă: dacă Δ, A, B sînt în planul π, iar Δ, B, C sînt în planul π' atunci Δ, A, C sînt în același plan (deoarece π', π coincid). Este o relație de echivalență, clasele de echivalență fiind planele care trec prin Δ, fără punctele acestei drepte.

h) Relația este reflexivă, simetrică și tranzitivă, deci o relație de echivalență. Clasele de echivalență sînt suprafețele cilindrice circulare cu axa Δ.

Scanned with OKEN Scanner

292. *Să se determine condițiile pe care trebuie să le îndeplinească numerele reale, a, b, c $(a \neq 0, b \neq 0)$ astfel ca relația binară $\mathcal{R}$ definită în mulțimea numerelor reale prin: $x \mathcal{R} y$: $ax + by + c = 0$, să fie: a) reflexivă; b) simetrică; c) tranzitivă; d) o relație de echivalență.*

Soluție.

a) Relația $\mathcal{R}$ este reflexivă dacă avem $x \mathcal{R} x$, adică $ax + bx + c = 0$, oricare ar fi x real.

Dacă x_1, x_2 sînt numere reale și $x_1 \neq x_2$ avem:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_1 + c = 0, \\ ax_2 + bx_2 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow (a + b)(x_1 - x_2) = 0.$$

și cum $x_1 - x_2 \neq 0$, rezultă $a + b = 0$, $c = 0$ deci dacă $\mathcal{R}$ este reflexivă, atunci este dată de $x - y = 0$; reciproc, este evident că $x - y = 0$ este o relație reflexivă.

b) Presupunînd că $\mathcal{R}$ este simetrică avem: $ax + by + c = 0 \Rightarrow ay + bx + c = 0$.

Pentru $x = 0$, din $ax + by + c = 0$ rezultă $y = -\frac{c}{b}$ și deci 0 este în relația $\mathcal{R}$ cu $-\frac{c}{b}$; $\mathcal{R}$ fiind simetrică, trebuie ca și $-\frac{c}{b}$ să fie în relația $\mathcal{R}$ cu 0, adică $a\left(-\frac{c}{b}\right) + b \cdot 0 + c = 0$, de unde rezultă $c(a - b) = 0$. În mod analog avem: $1 \mathcal{R}\left(-\frac{a+c}{b}\right)$ și datorită simetriei lui $\mathcal{R}$ trebuie ca și $-\frac{a+c}{b}$ să fie în relație cu 1, adică $a\left(-\frac{a+c}{b}\right) + b \cdot 1 + c = 0$, de unde rezultă $(a - b)(a + b + c) = 0$.

Avem deci:

$$\mathcal{R} \text{ simetrică} \Rightarrow \begin{cases} c(a - b) = 0 \\ (a - b)(a + b + c) = 0. \end{cases}$$

Dacă $a - b \neq 0$ atunci $c = 0$, $a = -b$ și relația este $x = y$; dacă $a - b = 0$, se obține $a(x + y) + c = 0$, evident relație simetrică.

c) Să găsim condițiile necesare și suficiente ca $\mathcal{R}$ să fie tranzitivă.

Dacă $\mathcal{R}$ este tranzitivă, atunci $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ay + bz + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow ax + bz + c = 0.$$

Pentru $x = 0$ din $ax + by + c = 0$ rezultă $y = -\frac{c}{b}$ iar pentru $y = -\frac{c}{b}$ din $ay + bz + c = 0$ rezultă $z = \frac{c(a-b)}{b^2}$; pentru aceste valori ale lui x, y, z avem $x \mathcal{R} y$ și $y \mathcal{R} z$. $\mathcal{R}$ fiind tranzitivă, trebuie să avem și $x \mathcal{R} z$, adică $x = 0$ și $z = \frac{c(a-b)}{b^2}$ trebuie să verifice ecuația $ax + bz + c = 0$ încît se obține $ac = 0$ și deoarece $a \neq 0$ rezultă $c = 0$. În mod analog, considerînd

$$x = 1, \quad y = -\frac{a+c}{b}, \quad z = \frac{a^2 + ac - bc}{b^2} \text{ avem:}$$

$x \mathcal{R} y$ și $y \mathcal{R} z$; $\mathcal{R}$ fiind tranzitivă trebuie să avem și $x \mathcal{R} z$, adică $ax + bz + c = 0$.

Înlocuind valorile lui x și z și făcînd calculele obținem $a(a + b + c) = 0$ și fiindcă $a \neq 0$, rezultă $a + b + c = 0$. Deci dacă $\mathcal{R}$ este tranzitivă, atunci $a + b = 0, c = 0$, relația fiind $x = y$.

d) Pentru ca $\mathcal{R}$ să fie o relație de echivalență, ea trebuie să fie reflexivă, simetrică și tranzitivă. Există două posibilități:

1) $a + b = 0$, $c = 0$ și deci $x = y$;

2) $a + b = 0$, $c = 0$, $a = b$, condiții incompatibile căci conduc la $a = 0$, $b = 0$ (prin ipoteză $a \neq 0$, $b \neq 0$).

Singura relație de echivalență dată de $ax + by + c = 0$ este deci egalitatea, $x = y$.

293. *Fie relația binară $\mathcal{R}$ definită în mulțimea numerelor reale prin:*

$x \mathcal{R} y$: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, *coeficienții* a, b, c, d, e, f, *nefiind simultan nuli. Vom presupune că există*

numerele reale x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', y_1, y_2, y_3 *îndeplinind condițiile* $x_1 \neq x_1'$, $x_2 \neq x_2'$, $x_3 \neq x_3'$, $y_1 \neq y_2$, $y_2 \neq y_3$, $y_1 \neq y_3$, *astfel ca graficul relației să conțină elementele :* (x_1, y_1) (x_1', y_1), (x_2, y_2), (x_2', y_2), (x_3, y_3), (x_3', y_3).

a) Ce condiții trebuie să îndeplinească a, b, c, d, e, f, *ca* $\mathcal{R}$ *să fie reflexivă ?*

b) Să se determine a, b, c, d, e, f, *astfel ca* $\mathcal{R}$ *să fie simetrică.*

c) În ce caz $\mathcal{R}$ *este o relație de echivalență ?*

Soluție.

a) Dacă $\mathcal{R}$ este reflexivă, atunci $ax^2 + bx^2 + ax^2 + dx + ex + f = 0$ sau $(a + b + c)\, x^2 + (d + e)\, x + f = 0$, oricare ar fi $x \in R$.

Fie α, β, γ trei numere reale astfel ca $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\alpha \neq \gamma$. Avem :

$$\begin{aligned}(a + b + c)\,\alpha^2 + (d + e)\,\alpha + f &= 0,\\ (a + b + c)\,\beta^2 + (d + e)\,\beta + f &= 0,\\ (a + b + c)\,\gamma^2 + (d + e)\,\gamma + f &= 0.\end{aligned}$$

Scăzînd membru cu membru primele două egalități, apoi ultimele două și ținînd seama că $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$ obținem :

$$\left\{\begin{aligned}(a + b + c)(\alpha^2 - \beta^2) + (d + e)(\alpha - \beta) &= 0\\ (a + b + c)(\beta^2 - \gamma^2) + (d + e)(\beta - \gamma) &= 0\end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned}(\alpha - \beta)[(a + b + c)(\alpha + \beta) + d + e] &= 0\\ (\beta - \gamma)[(a + b + c)(\beta + \gamma) + d + e] &= 0\end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned}(a + b + c)(\alpha + \beta) + d + e &= 0\\ (a + b + c)(\beta + \gamma) + d + e &= 0.\end{aligned}\right.$$

Scăzînd ultimele egalități obținem $(a + b + c)(\alpha - \gamma) = 0$ și cum $\alpha - \gamma \neq 0$ rezultă $a + b + c = 0$; ținînd seama de acest rezultat în egalitățile anterioare obținem $d + e = 0$, $f = 0$.

Deci, dacă $\mathcal{R}$ este reflexivă, atunci $a + b + c = 0$, $d + e = 0$, $f = 0$. Este evident adevărată și implicația reciprocă, adică relația :

$x \mathcal{R} y : ax^2 + bxy - (a + b)\, y^2 + dx - dy = 0$, este reflexivă.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să demonstrăm mai întîi că $a \neq 0$. Să presupunem prin absurd că $a = 0$. Din enunț rezultă că ecuația de gradul I cu necunoscuta x, $(by + d)\,x + cy^2 + ey + f = 0$ are : pentru $y = y_1$ două soluții x_1 și x'_1, ceea ce se poate numai dacă $by_1 + d = 0$ și $cy_1^2 + ey_1 + f = 0$; pentru $y = y_2$, aceeași ecuație are soluțiile distincte x_2, x'_2 de unde rezultă $by_2 + d = 0$ și $cy_2^2 + ey_2 + f = 0$; pentru $y = y_3$, ecuația are soluțiile x_3 și x'_3 și cum $x_3 \neq x'_3$, rezultă $by_3 + d = 0$ și $cy_3^2 + ey_3 + f = 0$.

Din $by_1 + d = 0$, $by_2 + d = 0$ rezultă $b(y_1 - y_2) = 0$ și cum $y_1 \neq y_2$, obținem $b = 0$; de asemenea $d = 0$.

Din $\begin{cases} cy_1^2 + ey_1 + f = 0, \\ cy_2^2 + ey_2 + f = 0, \\ cy_3^2 + ey_3 + f = 0, \end{cases}$

scăzînd primele două egalități și apoi ultimele două, rezultă :

$$\begin{cases} c(y_1^2 - y_2^2) + e(y_1 - y_2) = 0, \\ c(y_2^2 - y_3^2) + e(y_2 - y_3) = 0, \end{cases}$$

și cum $y_1 \neq y_2$, $y_2 \neq y_3$ avem : $c(y_1 + y_2) + e = 0$,
$c(y_2 + y_3) + e = 0$,

scăzînd aceste egalități membru cu membru și ținînd seama că $y_1 \neq y_3$, se obține $c(y_1 - y_3) = 0$, $c = 0$; din $c(y_1 + y_2) + e = 0$ rezultă $e = 0$, iar din $cy_1^2 + ey_1 + f = 0$ se deduce $f = 0$.

Deci presupunînd $a = 0$, am obținut $b = c = d = e = f = 0$, ceea ce contrazice o condiție din enunț (a, b, c, d, e, f nu sînt simultan nuli) astfel că $a \neq 0$.

Presupunînd $\mathcal{R}$ simetrică avem :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \Rightarrow ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Folosind egalitatea din membrul drept al implicației, se arată că $c \neq 0$, așa cum s-a arătat că $a \neq 0$.

Implicația precedentă se mai poate scrie :

$$ax^2 + (by + d)\,x + cy^2 + ey + f = 0 \Rightarrow cx^2 + (by + e)\,x + ay^2 + dy + f = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind y cu y_1, ecuația de gradul II în x din partea stîngă a semnului „$\Rightarrow$“ are soluțiile x_1, x'_1 și $x_1 \neq x'_1$; implicația exprimă faptul că x_1 și x'_1 sînt soluții și pentru ecuația din partea dreaptă a semnului „$\Rightarrow$“. Rezultă că ecuațiile au aceleași soluții. Folosind relațiile între coeficienții și rădăcinile ecuației de gradul II, vom egala suma rădăcinilor primei ecuații cu suma rădăcinilor celei de-a doua ecuații și apoi vom egala produsele rădăcinilor. Obținem:

$$-\frac{by_1+d}{a}=-\frac{by_1+e}{c} \text{ și } \frac{cy_1^2+ey_1+f}{a}=\frac{ay_1^2+dy_1+f}{c}$$

sau făcînd calculele:

$b(a-c)\,y_1+ae-cd=0$ și $(a^2-c^2)\,y^2{}_1+(ad-ec)\,y_1+$ $+f(a-c)=0$.

În mod analog, luînd pentru y valoarea y_2 și apoi y_3 se obțin egalitățile:

$b(a-c)\,y_2+ae-cd=0$ și $(a^2-c^2)\,y_2^2+(ad-ec)\,y_2+$ $+f(a-c)=0$,

$b(a-c)\,y_3+ae-cd=0$ și $(a^2-c^2)\,y_3^2+(ad-ec)\,y_3+$ $+f(a-c)=0$.

Din $b(a-c)\,y_1+ae-cd=0$, $b(a-c)\,y_2+ae-cd=$ $=0$ rezultă $b(a-c)\,(y_1-y_2)=0$ și cum $y_1\neq y_2$, avem $b(a-c)=0$; în acest caz rezultă și $ae-cd=0$. Din egalitățile:

$$\begin{aligned}(a^2-c^2)\,y_1^2+(ad-ec)\,y_1+f(a-c)&=0,\\(a^2-c^2)\,y_2^2+(ad-ec)\,y_2+f(a-c)&=0,\\(a^2-c^2)\,y_3^2+(ad-ec)\,y_3+f(a-c)&=0,\end{aligned}$$

scăzînd primele două și apoi ultimele două, rezultă după simplificările cu y_1-y_2 și y_2-y_3:

$$\begin{aligned}(a^2-c^2)\,(y_1+y_2)+ad-ec&=0,\\(a^2-c^2)\,(y_2+y_3)+ad-ec&=0.\end{aligned}$$

Scăzînd membru cu membru și aceste egalități, obținem:

$(a^2-c^2)\,(y_1-y_3)=0$ și deoarece $y_1-y_3\neq 0$, avem $a^2-c^2=$

Scanned with OKEN Scanner

$=0$. Ținînd seama de acest rezultat, din egalitățile anterioare obținem $ad - ec = 0$, $f(a - c) = 0$.

Presupunînd $\mathcal{R}$ simetrică am obținut condițiile:

1) $b(a - c) = 0$; 2) $ae - cd = 0$; 3) $a^2 - c^2 = 0$;
4) $ad - ec = 0$; 5) $f(a - c) = 0$

Dacă $a = c$, atunci ținînd seama de condiția 2) obținem $e = d$ (celelalte condiții fiind satisfăcute oricare ar fi b, f). În acest caz, relația $\mathcal{R}$ este dată de: $a(x^2 + y^2) + bxy + d(x + y) + f = 0$ care este evident o relație simetrică.

Dacă $a \neq c$, atunci din 1) rezultă $b = 0$, din 3) $a + c = 0$, din 2) sau 4) rezultă $d + e = 0$, iar din 5) se obține $f = 0$.

În cazul acesta relația $\mathcal{R}$ este dată prin $a(x^2 - y^2) + d(x - y) = 0$ evident relație simetrică.

c) Pentru ca $\mathcal{R}$ să fie o relație de echivalență, este necesar ca ea să fie reflexivă și simetrică. Deoarece am găsit două situații în cazul relației simetrice, avem următoarele posibilități:

1) $\mathcal{R}$ este reflexivă și simetrică dacă: $a + b + c = 0$, $d + e = 0$, $f = 0$, $a = c$, $e = d$, adică $2a + b = 0$, $d = e = f = 0$. În acest caz relația devine: $ax^2 - 2axy + ay^2 = 0$ sau $(x - y)^2 = 0$, adică $x = y$, relație care fiind și tranzitivă este o relație de echivalență.

2) $\mathcal{R}$ este reflexivă și simetrică dacă:

$a + b + c = 0$, $d + e = 0$, $f = 0$, $b = 0$, $a + c = 0$ și deci $a(x^2 - y^2) + d(x - y) = 0$

Această relație fiind și tranzitivă este o relație de echivalență.

294. *Fie $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ relații de echivalență în mulțimea E.*

Relațiile $\mathcal{R}_1$ și $\mathcal{R}_2$ definite în E astfel: $x\mathcal{R}_1 y$: $x\mathcal{R}y$ sau $x\mathcal{S}y$; $x\mathcal{R}_2 y$: $x\mathcal{R}y$ și $x\mathcal{S}y$, sînt relații de echivalență?

Soluție.

Pentru ca $\mathcal{R}_1$ să fie o relație de echivalență, trebuie să fie reflexivă, simetrică și tranzitivă.

$\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ fiind reflexive, avem pentru oricare $x \in E$: $x\mathcal{R}x$, $x\mathcal{S}x$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece este adevărată și propoziția „$x\mathcal{R}x$ sau $x\mathcal{S}x$“, adică $x\mathcal{R}_1x$, rezultă că $\mathcal{R}_1$ este reflexivă. Deoarece $x\mathcal{R}_1y \Rightarrow x\mathcal{R}y$ sau $x\mathcal{S}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ sau $y\mathcal{S}x \Rightarrow y\mathcal{R}_1x$, rezultă simetria lui $\mathcal{R}_1$. $\mathcal{R}_1$ nu este tranzitivă. În mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ relațiile $x\mathcal{R}y : x - y =$ multiplu de 2, $x\mathcal{S}y : x - y =$ multiplu de 3, sînt relații de echivalență ; relația $x\mathcal{R}_1y : x\mathcal{R}y$ sau $x\mathcal{S}y$ nu este însă tranzitivă. Într-adevăr, avem : $3\mathcal{R}_1$ și $1\mathcal{R}_1$ 4 dar nu avem $3\mathcal{R}_14$. $\mathcal{R}_1$ nu este relație de echivalență.

Ca și pentru $\mathcal{R}_1$ se demonstrează că $\mathcal{R}_2$ este reflexivă și simetrică ; să arătăm că este și tranzitivă. Avem : $x\mathcal{R}_2\, y$ și $y\mathcal{R}_2z \Rightarrow x\mathcal{R}y$ și $x\mathcal{S}y$ și $y\mathcal{R}z$ și $y\mathcal{S}z \Rightarrow (x\mathcal{R}y$ și $y\mathcal{R}z)$ și $(x\mathcal{S}y$ și $y\mathcal{S}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ și $x\mathcal{S}z \Rightarrow x\mathcal{R}_2z$, deci $\mathcal{R}_2$ este tranzitivă. Fiind reflexivă, simetrică, tranzitivă, $\mathcal{R}_2$ este o relație de echivalență.

295. *Care dintre relațiile următoare sînt relații de ordine? Care dintre acestea ordonează parțial și care total mulțimile în care sînt definite?*

a) *Relația „$\leqslant$“ definită în mulțimea numerelor naturale*

b) *Relația „divide“ definită în N^* ;*

c) *Relația „este multiplu de“, definită în N ;*

d) $z_1\mathcal{R}z_2 : |z_1| \leqslant |z_2|$ *relație definită în mulțimea numerelor complexe ;*

e) *Incluziunea, definită în mulțimea $\mathcal{P}(E)$ a părților unei mulțimi E nevide.*

f) *Relația $\mathcal{R}$ definită în $\mathcal{P}(E)$ astfel $A\mathcal{R}B : A \cap B \neq 0$, $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(E)$.*

Soluție.

a) Relația „$\leqslant$“ definită în N, are următoarele proprietăți : $x \leqslant x$, $x \in N$ (este reflexivă) ; $x \leqslant y$ și $y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (este antisimetrică) ; $x \leqslant y$ și $y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (este tranzitivă), deci este o relație de ordine ; ea ordonează total mulțimea N, căci oricare ar fi numerele naturale x, y avem $x \leqslant y$ sau $y \leqslant x$.

b) Relația „divide“ este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă, deci o relație de ordine. Ea ordonează parțial mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots\}$ căci există numere naturale care nu sînt comparabile prin relația „divide“ (de exemplu 2 și 3).

Scanned with OKEN Scanner

c) Relația „este multiplu de“ definită în N, este o relație de ordine parțială.

d) Această relație este reflexivă, tranzitivă dar nu este antisimetrică, deci nu este o relație de ordine.

e) Incluziunea este o relație de ordine în mulțimea $\mathcal{P}(E)$; deoarece există părți A, B ale lui E pentru care nu avem nici $A \subset B$ nici $B \subset A$, incluziunea este o relație de ordine parțială.

f) $\mathcal{R}$ este reflexivă, dar nu este antisimetrică și nici tranzitivă, deci nu este o relație de ordine.

296. *Fie E mulțimea numerelor raționale din intervalul $(0, 1)$ și relația definită în E astfel:*

$$\frac{x}{y} < \frac{x'}{y'} \Leftrightarrow x + y = x' + y' \text{ și } x \leqslant x'.$$

Să se arate că „$<$“ este o relație de ordine în E.
Această relație ordonează total mulțimea E?

Soluție.

Relația este reflexivă, deoarece $x + y = x + y$ și $x \leqslant x$, adică

$$\frac{x}{y} < \frac{x}{y}.$$

Relația este antisimetrică, deoarece:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} < \dfrac{x'}{y'} \\ \dfrac{x'}{y'} < \dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$$

Într-adevăr, din $x + y = x' + y'$, $x \leqslant x'$, $x' \leqslant x$ rezultă $x = x'$, $y = y'$, adică

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}.$$

Relația este și tranzitivă : $\frac{x}{y} < \frac{x'}{y'}$ și $\frac{x'}{y'} < \frac{x''}{y''} \Leftrightarrow x+y = x'+y'$, $x'+y' = x''+y''$, $x \leqslant x'$, $x' \leqslant x'' \Rightarrow x+y = x''+y''$, $x \leqslant x'' \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x''}{y''}$, deci $\frac{x}{y} < \frac{x'}{y'}$ și $\frac{x'}{y'} < \frac{x''}{y''} \Rightarrow \frac{x}{y} < \frac{x''}{y''}$, adică relația este tranzitivă. Fiind reflexivă, antisimetrică și tranzitivă „$<$“ este o relație de ordine. Ea ordonează parțial mulțimea E căci există fracții ordinare din $(0,1)$ care nu sînt comparabile, de exemplu $\frac{1}{2}$ și $\frac{3}{4}$.

297. *Fie mulțimile* $E = (0,1)$, $N^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. *În mulțimea* $E \times N$ *se definește relația* $<$ *astfel*: $(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow x + y \leqslant x' + y'$.

Să se arate că $<$ *este o relație de ordine. Ordonează total mulțimea* $E \times N$ *?*

Soluție.

Relația este reflexivă, deoarece $x + y \leqslant x + y$, adică $(x, y) < (x, y)$

Relația este antisimetrică. Într-adevăr, avem :

$$\left.\begin{matrix} x + y \leqslant x' + y' \\ x' + y' \leqslant x + y \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + y = x' + y' \Rightarrow x = x' \text{ și } y = y'.$$

Demonstrăm ultima implicație prin reducere la absurd.

Presupunînd $x > x'$ avem și $y' > y$, deci $x - x' > 0$, $y' - y > 0$ și $x - x' = y' - y$; dar din $x \in (0, 1)$, $x' \in (0,1)$ rezultă $x - x' \in (0, 1)$ și deci $y' - y < 1$.

Din $y' > y$, $y \in N^*$, $y \in N^*$ rezultă $y' - y \geqslant 1$, ceea ce contrazice $y' - y < 1$.

Presupunerea $x > x'$ este deci falsă. De asemenea nu putem avea nici $x < x'$ și deci $x = x'$, $y = y'$. Am arătat astfel că din $(x, y) < (x', y')$ și $(x', y') < (x, y)$ rezultă $(x, y) = (x', y')$, adică relația este antisimetrică.

Relația este tranzitivă, căci $x + y \leqslant x' + y'$ și $x' + y' \leqslant x'' + y'' \Rightarrow x + y \leqslant x'' + y''$, adică $(x, y) < (x', y')$ și $(x'. y') < (x'', y'') \Rightarrow (x, y) < (x'', y'')$.

Relația fiind reflexivă, antisimetrică și tranzitivă este o relație de ordine. Ea ordonează total mulțimea $E \times N$.

298. *Fie mulțimile* $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{2, 3, 4\}$, $\times$ $G = \{1, 3, 4\}$ *și relațiile;* $x \mathcal{R} y : x \leqslant y$, $x \in E$, $y \in F$; $x \mathcal{S} y$: $x + y < 6$, $x \in F$, $y \in G$;

Compunînd $\mathcal{R}$ *cu* $\mathcal{S}$ *se obține relația* $\mathcal{T} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Să se scrie graficul relațiilor $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$. *Se va face și o schemă a relațiilor.*

Soluție.

Graficul relației $\mathcal{R}$ este: $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$. Graficul relației $\mathcal{S}$ este $\{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$. Relația $\mathcal{T}$ este definită astfel: $x \mathcal{T} y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in E$ $y \in G$, există $z \in F$ astfel ca $x \mathcal{R} z$ și $z \mathcal{S} y$. Avem: $1 \mathcal{T} 1$ deoarece $1 \in E$, $1 \in G$, $2 \in F$ și $1 \mathcal{R} 2$, $2 \mathcal{S} 1$; $1 \mathcal{T} 3$, $2 \mathcal{T} 1$, $2 \mathcal{T} 3$, $3 \mathcal{T} 1$. Graficul lui $\mathcal{T}$ este deci: $\{(1, 1) (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1)\}$. În figura 19 pentru $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ s-au folosit linii punctate, iar pentru $\mathcal{T}$ linii continue.

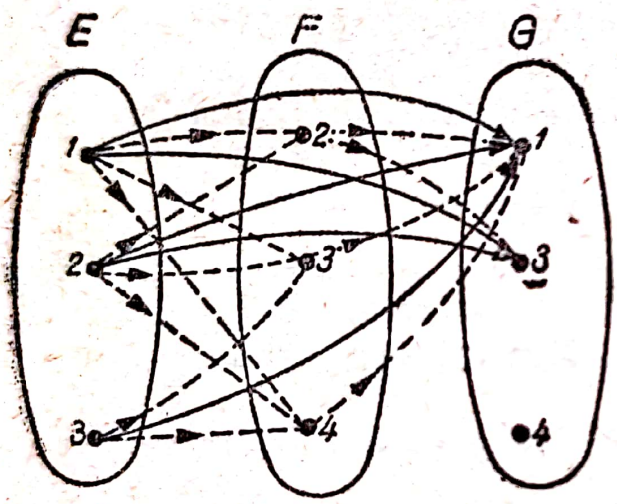


Fig. 19

299. *În mulțimea* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ *se consideră relațiile reflexive:* $x \mathcal{R} y : x \geqslant y$; $x \mathcal{S} y$: *x divide y.*

Este reflexivă relația $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ *?*

Compunînd relații reflexive, întotdeauna rezultatul este o relație reflexivă?

Soluție.

Graficul relației $\mathcal{R}$ este: $\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

Graficul relației $\mathcal{S}$ este: $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Graficul lui $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ este format cu cuplurile (x, y), $x \in E$, $y \in E$ pentru care există $z \in E$ astfel ca $x\mathcal{R}z$ și $z\mathcal{S}y$.

Graficul lui $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ este : $\{(1, 1)\ (1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 1),\ (2, 2)\ (2, 3),\ (2, 4),\ (3, 1),\ (3, 2),\ (3, 3),\ (3, 4),\ (4, 1),\ (4, 2).\ (4, 3),\ (4, 4)\}$.

$\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ este o relație reflexivă căci graficul său conținînd cuplurile (1, 1) (2, 2), (3, 3), (4, 4) avem $x(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})x$, oricare ar fi $x \in E$.

b) $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ fiind relații binare reflexive definite în E, $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ este de asemenea o relație reflexivă. Într-adevăr, deoarece $\mathcal{R}$ este reflexivă avem $x\mathcal{R}x$, $\forall x \in E$. $\mathcal{S}$ este reflexivă deci $x\mathcal{S}\,x$, $\forall x \in E$, dar $x\mathcal{R}x$ și $x\mathcal{S}x \Rightarrow x\,(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})\,x$, $\forall x \in E$, deci $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ este reflexivă.

300. *Există relații binare nereflexive definite într-o mulțime E astfel ca prin compunerea lor să obținem o relație reflexivă ?*

Soluție.

Răspunsul este afirmativ. În mulțimea $\{1, 2\}$ definim relațiile $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ prin graficele lor : $\mathcal{R} : \{(1, 2), (2, 2)\}$, $\mathcal{S} : \{(2, 1), (2, 2)\}$. $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ are graficul $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

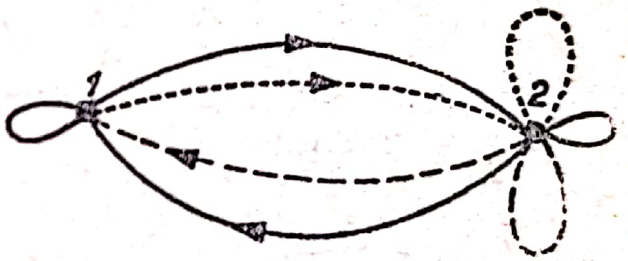


Fig. 20

$\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ nu sînt reflexive căci graficele lor nu conțin (1, 1).

$\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ este reflexivă, deoarece graficul ei conține toate cuplurile (x, x), $x \in E$.

În figura 20, pentru $\mathcal{R}$ s-au folosit linii punctate, pentru $\mathcal{S}$ linii întrerupte, iar pentru $\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$ linii continue.

301. *În mulțimea D a dreptelor dintr-un plan se consideră relațiile :*

$\perp$ — *perpendicularitatea dreptelor*

$\parallel$ — *paralelismul dreptelor.*

Care dintre proprietățile următoare sînt adevărate $\perp \circ \perp \Leftrightarrow \parallel$; $\perp \circ \parallel \Leftrightarrow \perp$; $\parallel \circ \perp \Leftrightarrow \perp$.

Soluție.

Avem : $d(\perp\circ\perp)\ d'$ dacă există o dreaptă z din D astfel ca $d \perp z$ și $z \perp d'$, de unde rezultă $d \parallel d'$ sau d suprapusă cu d'

Scanned with OKEN Scanner

și deci propoziția $\perp \circ \perp \Leftrightarrow \parallel$ este adevărată (prin drepte paralele înțelegîndu-se drepte care fiind situate în același plan nu au puncte comune sau coincid).

Avem $d(\perp \circ \parallel)\, d'$ dacă există o dreaptă z din D astfel ca $d \parallel z$ și $z \perp d'$, de unde rezultă $d \perp d'$ și deci proprietatea $\perp \circ \parallel \Leftrightarrow \Leftrightarrow \perp$ este adevărată. De asemenea proprietatea $\parallel \circ \perp \Leftrightarrow \perp$ este adevărată.

302. *Există relații binare simetrice a căror compusă este simetrică ?*

Compunînd două relații binare simetrice, se obține o relație binară simetrică ?

Soluție.

Există relații simetrice a căror compusă este simetrică. Într-adevăr, în mulțimea dreptelor unui plan relația de perpendicularitate și relația de paralelism a dreptelor sînt relații simetrice și avem :

$$\perp \circ \parallel \Leftrightarrow \perp$$

Nu întotdeauna însă compusa a două relații simetrice este o relație simetrică.

În mulțimea $\{1, 2, 3\}$ definim relațiile $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ prin graficele lor, astfel:

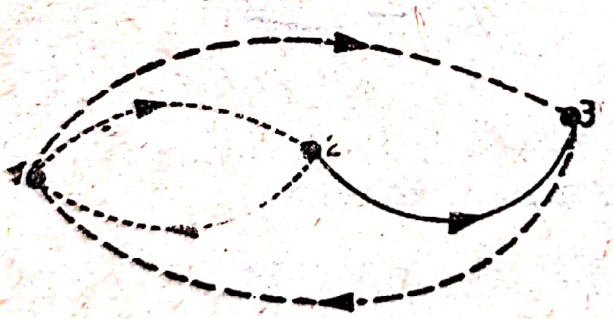


Fig. 21

$$\mathcal{R} : \{(1, 2), (2, 1)\};$$
$$\mathcal{S} : \{(1, 3), (3, 1)\}.$$

Compusa lor, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, are graficul $\{(2, 3)\}$.

$\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ sînt simetrice, dar $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ nu este simetrică.

În schema din figura 21 pentru $\mathcal{R}$ s-au folosit linii punctate, pentru $\mathcal{S}$ linii întrerupte, iar pentru $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ linii continue. Simetria unei relații se observă astfel : dacă o săgeată pornește de la x la y, atunci există și o săgeată de la y către x, ceea ce se constată în cazul lui $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$, dar nu și pentru $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

Scanned with OKEN Scanner

303. *În mulțimea* $E = \{1, 2, 3\}$ *se dau relațiile binare* $\mathcal{R}$ *și* $\mathcal{S}$ *prin graficele lor:* $\mathcal{R}$: $\{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$; $\mathcal{S}$: $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$.

a) *Să se scrie graficul lui* $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

b) *Să se verifice că* $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ *și* $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ *sînt tranzitive.*

Soluție

a) Graficul lui $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ este format din cuplurile (x, y), $x \in E$, $y \in E$ pentru care există $z \in E$ astfel ca (x, z) să aparțină graficului lui $\mathcal{R}$, iar (x, y) să aparțină graficului lui $\mathcal{S}$. $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ are graficul: $\{(1,2)\ (1, 3)\ (3, 2)\ (3, 3)\}$.

b) $\mathcal{R}$ este tranzitivă, deoarece: (1,1) și (1,3) aparțin graficului $\mathcal{R} \Rightarrow$ (1, 3) aparține graficului lui $\mathcal{R}$; (1,3) și (3,1) aparțin graficului lui $\mathcal{R} \Rightarrow$ (1, 1) aparține graficului lui $\mathcal{R}$;

(1, 3) și (3, 3) aparțin graficului lui $\mathcal{R} \Rightarrow$ (1, 3) aparține graficului lui $\mathcal{R}$;

(3, 1) și (1, 1) aparțin graficului lui $\mathcal{R} \Rightarrow$ (3, 1) aparține graficului lui $\mathcal{R}$;

(3, 1) și (1, 3) aparțin graficului lui $\mathcal{R} \Rightarrow$ (3 ,3) aparține graficului lui $\mathcal{R}$;

(3, 3) și (3, 1) aparțin graficului lui $\mathcal{R} \Rightarrow$ (3, 1) aparține graficului lui $\mathcal{R}$;

$\mathcal{S}$ este tranzitivă, deoarece odată cu (1, 2) și (2, 3) care aparțin graficului lui $\mathcal{S}$ și (1, 3) aparține graficului lui $\mathcal{S}$. De asemenea $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ este tranzitivă, căci: (1, 3) și (3, 2) aparțin graficului lui $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ și (1, 2) aparține graficului lui $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$;

(1, 3) și (3, 3) aparțin graficului lui $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ și (1, 3) aparține graficului lui $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$;

(3, 3) și (3, 2) aparține graficului lui $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ și (3, 2) aparține graficului lui $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Există deci relații tranzitive a căror compusă este tot tranzitivă. În figura 22, pentru $\mathcal{R}$ s-au folosit linii punctate, pentru $\mathcal{S}$ linii întrerupte, iar pentru $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ linii continue; tranzitivitatea se observă astfel: dacă există o săgeată de la x la y și o

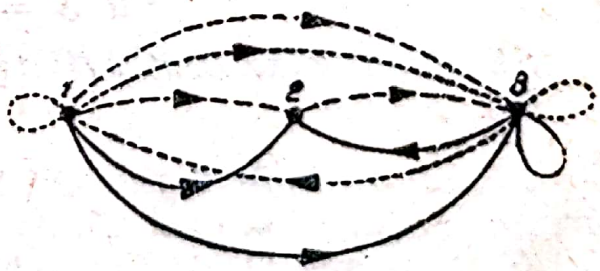


Fig. 22

săgeată de la y la z, atunci există și o săgeată de la x la z.

304. *Compunînd două relații tranzitive, obținem tot o relație tranzitivă ?*

Soluție.

Există relații tranzitive a căror compusă nu este tranzitivă.

Într-adevăr, fie relațiile $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ definite în mulțimea $\{1, 2, 3\}$ prin graficele lor : $\mathcal{R} : \{(1, 2), (3, 1), (3, 2)\}$, $\mathcal{S} : \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Compusa acestor relații, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, are graficul $\{(1, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.

Relația $\mathcal{R}$ este tranzitivă, căci graficul ei conține odată cu $(3, 1)$ $(1, 2)$ și cuplul $(3, 2)$.

De asemenea $\mathcal{S}$ este tranzitivă, graficul ei conținînd odată cu $(1, 2)$, $(2, 3)$ și cuplul $(1, 3)$. Relația $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ nu este însă tranzitivă, deoarece graficul ei conține $(1, 3)$, $(3, 2)$ și nu conține $(1, 2)$.

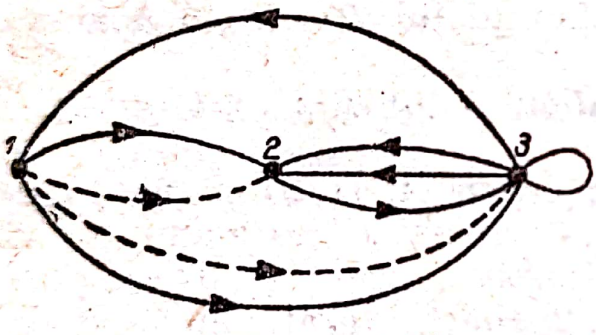


Fig. 23

În figura 23 pentru $\mathcal{R}$ s-au folosit linii punctate, pentru $\mathcal{S}$ linii întrerupte, iar pentru $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ linii continue ; netranzitivitatea lui $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ apare astfel: o săgeată (cu linie continuă) pornește de la 1 la 3, alta de la 3 la 2, dar nu există una (cu linie continuă) de la 1 la 2.

305. *În mulțimea $E = \{1, 2, 3\}$ se consideră relațiile $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ date prin graficele lor : graf $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3,) (3, 1)\}$, graf $\mathcal{S} = \{(1, 2), (2, 3)\}$.*

Să se determine relația $\mathcal{X}$ definită în E știind că $\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{S}$.

Soluție.

Deoarece $(1, 2) \in$ graf $\mathcal{S}$, există $u \in E$ astfel ca $(1, u) \in$ graf $\mathcal{R}$ și $(u, 2) \in$ graf $\mathcal{X}$; singurele elemente ale graficului lui $\mathcal{R}$ de forma $(1, u)$ fiind $(1, 1)$ și $(1, 2)$ rezultă $u = 1$ sau

$u = 2$; $u = 1$ nu este însă acceptabil, deoarece din $3\mathcal{R}1$ și $1\mathcal{X}2$ rezultă $3\mathcal{S}2$, ceea ce este fals, încît $u = 2$ și $(2, 2) \in$ graf $\mathcal{X}$. În mod analog ținînd seama că $(2, 3) \in$ graf $\mathcal{S}$, obținem $(3, 3) \in$ graf $\mathcal{X}$ și deci graf $\mathcal{X} \supset \{(2, 2), (3, 3)\}$.

Graficul lui $\mathcal{X}$ mai poate conține și alte cupluri (x, y), elemente ale produsului cartezian $E \times E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$.

S-a văzut mai înainte că $(1, 2) \notin$ graf $\mathcal{X}$; $(1, 1)$ de asemenea nu aparține graficului lui $\mathcal{X}$ deoarece, dacă ar aparține, din $3\,\mathcal{R}\,1$ și $1\mathcal{X}1$ ar rezulta $3\mathcal{S}1$, ceea ce este fals. În mod analog se arată că în afara lui $(2, 2)$ și $(3, 3)$, găsite mai înainte, nu mai există cupluri care ar putea aparține graficului lui $\mathcal{X}$.

Există deci numai o soluție și anume:

graf $\mathcal{X} = \{(2, 2), (3, 3)\}$.

306. *În mulțimea* $E = \{2, 3, 4, 5\}$ *se definesc relațiile* $\mathcal{R}$ *și* $\mathcal{E}$ *astfel*:

$x\mathcal{R}y$: *există* $z \in E$ *astfel ca* $(z - x)(z - y) < 0$;

$x\mathcal{E}y$: $x = y$ *(relația identică relativ la* E*)*;

a) *Să se compare relațiile* $\mathcal{R} \circ \mathcal{E}$, $\mathcal{E} \circ \mathcal{R}$.

b) $\mathcal{R}$ *fiind o relație binară oarecare definită într-o mulțime* E *și* $\mathcal{E}$ *fiind relația identică definită în* E, *să se arate că sînt adevărate proprietățile*: $\mathcal{R} \circ \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}$.

Soluție.

a) Relațiile din enunț au graficele următoare:

$\mathcal{R}$: $\{(2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 2), (5, 2), (5, 3)\}$;

$\mathcal{E}$: $\{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$;

$\mathcal{R} \circ \mathcal{E}$: $\{(2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 2), (5, 2), (5, 3)\}$;

$\mathcal{E} \circ \mathcal{R}$: $\{(2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 2), (5, 2), (5, 3)\}$.

Deoarece $\mathcal{R}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{E}$, $\mathcal{E} \circ \mathcal{R}$ au graficele egale, rezultă

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}.$$

b) Ținînd seama de definiția compunerii relațiilor și de definiția relației identice $\mathcal{E}$, relativ la mulțimea E, avem (x și y fiind elemente din E):

$x(\mathcal{R}\circ\mathcal{E})\,y \Leftrightarrow x\mathcal{E}u,\ u\mathcal{R}y,\ u \in E \Leftrightarrow x = u,\ u\mathcal{R}y,\ u \in E \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\mathcal{R}y$, deci $\mathcal{R}\circ\mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{R}$; la fel se demonstrează că $\mathcal{E}\circ\mathcal{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathcal{R}$ și deci $\mathcal{R}\circ\mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{E}\circ\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}$.

307. *Fie mulțimile* $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{3, 4, 5\}$, $G = \{2, 3, 4\}$, $H = \{1, 3, 5\}$, *părți ale lui* N *și relațiile binare* $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ *definite astfel*:

$x\mathcal{R}y$: x *divide* y, $x \in E$, $y \in F$;
$x\mathcal{S}y$: x *este prim cu* y, $x \in F$, $y \in G$;
$x\mathcal{T}y$: $x + y$ *este număr impar*, $x \in G$, $y \in H$.
a) *Să se verifice că*: $(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})$.
b) *Să se demonstreze că proprietatea este adevărată oricare ar fi relațiile binare* $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ *(compunerea relațiilor este asociativă)*.

Soluție.
a) Relațiile din enunț au graficele următoare:

$\mathcal{R}$: $\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4)\}$;
$\mathcal{S}$: $\{(3, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$;
$\mathcal{T}$: $\{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), 4, 5)\}$;
$\mathcal{S}\circ\mathcal{R}$: $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)\}$;
$\mathcal{T}\circ\mathcal{S}$: $\{(3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$;
$(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R}$: $\{(1, 1), (1, 3), (1, 5)\}$;
$\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})$: $\{(1, 1), (1, 3), (1, 5)\}$.

Deoarece relațiile $(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R}$ și $\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})$ au același grafic, ele sînt echivalente.
b) Avem

$x(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R}\ y \Leftrightarrow x\mathcal{R}u,\ u\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\ y,\ x \in E,\ u \in F,\ y \in H \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\mathcal{R}u,\ u\mathcal{S}v,\ v\mathcal{T}y,\ x \in E,\ u \in F,\ v \in G,\ y \in H \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\,\mathcal{S}\circ\mathcal{R}\ v,\ v\mathcal{T}y,\ x \in E,\ v \in G,\ y \in H \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x\mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})\ y,$
adică $(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{T}\circ(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})$.

308. *Fie* $\mathcal{R}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ *relații binare definite în mulțimea* E. *Este adevărată proprietatea*:

$$(\mathcal{X}\circ\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{Y}\circ\mathcal{R}) \Rightarrow (\mathcal{X} \Leftrightarrow \mathcal{Y})\ ?$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

Proprietatea nu este adevărată. Într-adevăr, există relațiile $\mathcal{R}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ astfel ca să avem $\mathcal{X}\circ\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{Y}\circ\mathcal{R}$ și $\mathcal{X}$ să nu fie echivalentă cu $\mathcal{Y}$. Astfel dacă $\mathcal{R}$ are graficul $\{(1,2), (1, 3), (1, 1)\}$, $\mathcal{X}$ are graficul $\{(2, 1), (3, 2)\}$, iar $\mathcal{Y}$ are graficul $\{(2, 1), (3, 2), (1, 2)\}$, avem:

graf $(\mathcal{X}\circ\mathcal{R}) = \{(1, 1), (1, 2)\}$, graf $(\mathcal{Y}\circ\mathcal{R}) = \{(1, 1), (1, 2)\}$ și deci

$$\mathcal{X}\circ\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{Y}\circ\mathcal{R} \text{ dar } \mathcal{X} \not\Leftrightarrow \mathcal{Y}.$$

309. *Pentru fiecare din relațiile binare următoare definite în* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, *să se scrie:* — *graficul relației;*
— *relația inversă;*
— *graficul relației inverse.*

Se va face reprezentarea grafică a relațiilor:

a) $x\mathcal{R}y$: *x divide y*.
b) $x\mathcal{S}y: x + 2y = 5$;
c) $x\mathcal{T}y: x > 2y$.

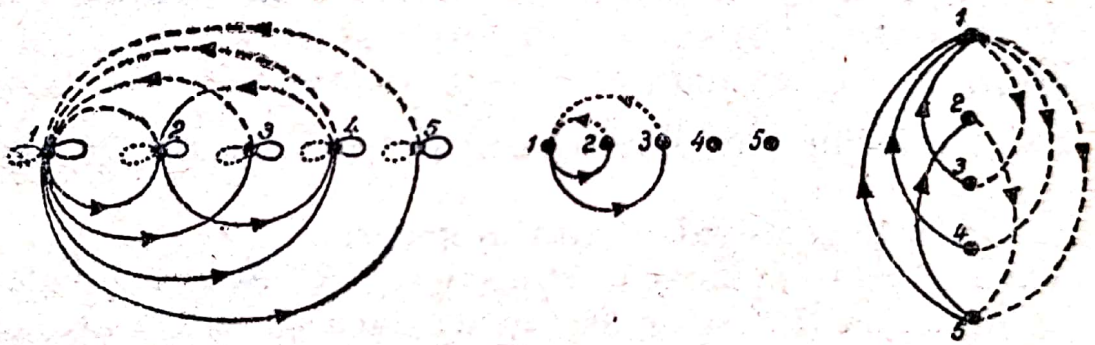


Fig. 24

Soluție.

a) Graficul lui $\mathcal{R}$ este: $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

Inversa lui $\mathcal{R}$, notată $\mathcal{R}^{-1}$, este dată de:

x este multiplu de y.

Graficul lui $\mathcal{R}^{-1}$ este: $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (2, 2) (4, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$.

b) Graficul lui $\mathcal{S}$ este: $\{(1, 2), (3, 1)\}$.

Inversa relației $\mathcal{S}$ este $\mathcal{S}^{-1}$ definită astfel:

Scanned with OKEN Scanner

$x\mathcal{S}^{-1}y : 2x + y = 5$ și are graficul $\{(2, 1), (1, 3)\}$.

c) Graficul lui $\mathcal{T}$ este : $\{(3, 1), (4, 1), (5, 1), (5, 2)\}$.

Inversa lui $\mathcal{T}$ notată cu $\mathcal{T}^{-1}$ este definită astfel :

$$x\mathcal{T}^{-}\ y : y > 2x.$$

$\mathcal{T}^{-1}$ are graficul : $\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 5)\}$.

În figura 24 pentru relațiile inverse s-au folosit linii punctate.

310. *Să se compare următoarele relații simetrice cu inversele lor. Să se arate că dacă $\mathcal{R}^{-1}$ este inversa relației binare $\mathcal{R}$ atunci :* *($\mathcal{R}$ este simetrică) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}$).*

a) $d \parallel d'$ *(paralelismul dreptelor, relație definită în mulțimea dreptelor dintr-un plan)* ;

b) $d \perp d'$ *(perpendicularitatea dreptelor, relație definită în mulțimea dreptelor unui plan)* ;

c) $x = y$ *(egalitatea, definită într-o mulțime de numere)* ;

d) $x \neq y$ *(„diferit de", relație definită în mulțimea numerelor reale).*

Soluție.

Toate relațiile sînt simetrice și sînt echivalente cu inversele lor.

Proprietatea este adevărată în general.

Oricare relație binară, simetrică, $\mathcal{R}$, este echivalentă cu reciproca sa $\mathcal{R}^{-1}$ și de asemenea dacă $\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}$ atunci $\mathcal{R}$ este simetrică, deci ($\mathcal{R}$ simetrică) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}$).

Ținînd seama că :

$\mathcal{R}$ simetrică : $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$,

$\mathcal{R}^{-1}$ este inversa lui $\mathcal{R}$: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}^{-1}x$;

avem : $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \Rightarrow x\mathcal{R}^{-1}y$ și reciproc :

$$x\mathcal{R}^{-1}y \Rightarrow y\mathcal{R}x \Rightarrow x\mathcal{R}y,$$

deci $\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}$, adică am demonstrat că : ($\mathcal{R}$ simetrică) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ($\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}$).

Reciproc, dacă $\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}$, să arătăm că $\mathcal{R}$ este simetrică.

Într-adevăr, avem : $x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{R}^{-1}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$, deci $x\mathcal{R}y \Rightarrow$ $\Rightarrow y\mathcal{R}x$, $\mathcal{R}$ este simetrică.

Scanned with OKEN Scanner

311. *$\mathcal{R}$ fiind o relație binară definită într-o mulțime E, iar $\mathcal{R}^{-1}$ inversa acestei relații, să se arate că următoarele proprietăți sînt adevărate:*

a) *$\mathcal{R}$ este reflexivă $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}^{-1}$ este reflexivă;*
b) *$\mathcal{R}$ este simetrică $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}^{-1}$ este simetrică;*
c) *$\mathcal{R}$ este tranzitivă $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}^{-1}$ este tranzitivă;*
d) *$\mathcal{R}$ este o relație de echivalență $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}^{-1}$ este o relație de echivalență.*

Soluție.

a) Deoarece $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}^{-1}x$, avem evident $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x\mathcal{R}^{-1}x$.

b) $\mathcal{R}$ fiind simetrică, avem: $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$, sau ținînd seama de definiția lui $\mathcal{R}^{-1}$, $y\mathcal{R}^{-1}x \Rightarrow x\mathcal{R}^{-1}y$, ceea ce exprimă simetria relației $\mathcal{R}^{-1}$; de asemenea, din simetria lui $\mathcal{R}^{-1}$ rezultă simetria lui $\mathcal{R}$.

c) $\mathcal{R}$ fiind tranzitivă avem: $(x\mathcal{R}y,\ y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ și cum $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}^{-1}x$, $y\mathcal{R}^{-1}x$ și $z\mathcal{R}^{-1}y \Rightarrow z\mathcal{R}^{-1}x$ sau $z\mathcal{R}^{-1}y$ și $y\mathcal{R}^{-1}x \Rightarrow$ $\Rightarrow z\mathcal{R}^{-1}x$, ceea ce exprimă tranzitivitatea lui $\mathcal{R}^{-1}$. În mod analog se arată că dacă $\mathcal{R}^{-1}$ este tranzitivă, atunci și $\mathcal{R}$ este tranzitivă și deci proprietatea de la punctul c) este adevărată.

d) Proprietatea de la punctul d) rezultă din cele de la punctele a), b), c).

312. *Fie mulțimile: $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 3, 4\}$ și o relație binară $\mathcal{R}$, de la E la F, dată prin graficul ei: $\{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 3)\}$.*

a) *Să se scrie graficul relației inverse, $\mathcal{R}^{-1}$.*

b) *Compunînd $\mathcal{R}$ cu $\mathcal{R}^{-1}$ să se scrie graficul relației compuse $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$, apoi graficul relației $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ și să se compare cele două grafice. Este adevărată proprietatea $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$?*

Soluție.

a) Graficul relației $\mathcal{R}^{-1}$ este: $\{(1, 1), (4, 1), (1, 2), (3, 2)$ $(3, 3)\}$.

b) $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ are graficul: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2),$ $(2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$.

$\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ are graficul: $\{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4), (1, 3),$ $3, 3)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Cele două grafice nu sînt egale și deci $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \not\Leftrightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ (compunerea relațiilor binare nu este comutativă).

313. *În mulțimea* $\{1, 2, 3\}$ *se definesc relațiile binare* $\mathcal{R}$ *și* $\mathcal{S}$ *astfel:*

$$\mathcal{R}: max\ (x, y) \leqslant 2, \quad \mathcal{S}: min\ (x, y) \geqslant 2.$$

a) *Sînt aceste relații reflexive? Dar simetrice? Dar tranzitive?*

b) *Să se scrie graficele relațiilor* $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$ *și să se verifice că* $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

Soluție.

a) Relațiile $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ nu sînt reflexive, căci $\max (3, 3) \leqslant 2$ și $\min (1, 1) \geqslant 2$ sînt false. Ambele relații sînt simetrice și tranzitive ceea ce se poate verifica și pe graficele acestor relații.

b) Graficele relațiilor $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$ sînt:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}: && \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}\\
&\mathcal{S}: && \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\};\\
&\mathcal{S} \circ \mathcal{R}: && \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\};\\
&\mathcal{R} \circ \mathcal{S}: && \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\};\\
&(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}: && \{(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}.
\end{aligned}$$

Deoarece $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$ și $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ au același grafic, rezultă

$$(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{S}.$$

314. *În mulțimea finită* E *se definește o relație binară* $\mathcal{R}$ *satisfăcînd următoarele condiții:*

1) *Oricare ar fi* $x \in E$, *există* $y \in E$ *astfel ca* $x \mathcal{R} y$;

2) *Dacă* $x \mathcal{R} z$ *și* $y \mathcal{R} z$ *atunci* $x = y$.

a) *Să se dea un exemplu de relație satisfăcînd condițiile 1) și 2). În acest caz, notînd cu* $\mathcal{R}^{-1}$ *inversa lui* $\mathcal{R}$ *și cu* $\mathcal{E}$ *relația identică atașată mulțimii* E, *să se verifice că:*

$$\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{E}.$$

b) *Să se arate că în condițiile 1) și 2) există o relație* $\mathcal{X}$ *definită în* E *astfel ca* $\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{X} \Leftrightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ *fiind relația identică atașată lui* E $(x \mathcal{E} y \Leftrightarrow x = y,\ x \in E,\ y \in E)$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

a) Fie $E = \{1, 2, 3\}$ și $\mathcal{R}$ relația binară definită în E al cărei grafic este: $\{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. $\mathcal{R}$ satisface condițiile 1) și 2) din enunț.

Inversa $\mathcal{R}^{-1}$ a lui $\mathcal{R}$ are graficul: $\{(2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$.

Graficul lui $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$, ca și al relației $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$, este $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$, adică graficul lui $\mathcal{E}$ deci $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathcal{E}$.

b) Să arătăm că avem $\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{E}$ pentru $\mathcal{X} \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}$.

Conform condiției 1), oricare ar fi $x \in E$, există $y \in E$ astfel ca $x\mathcal{R}y$; din $x\mathcal{R}y$ și $y\mathcal{R}^{-1}x$ rezultă $x(\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R})x$, adică graf $\mathcal{E} \subset$ graf $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$.

Reciproc, să arătăm că dacă $x(\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R})\, y$, atunci $x = y$.

Din $x(\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R})y$ rezultă $x\mathcal{R}z$ și $z\mathcal{R}^{-1}y$ sau $x\mathcal{R}z$ și $y\mathcal{R}z$ și conform condiției 2), $x=y$, deci graf $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \subset$ graf $\mathcal{E}$. Am arătat că $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{E}$. La fel se arată că $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{E}$. Se poate arăta că $\mathcal{R}^{-1}$ este singura relație care verifică ecuațiile $\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{X} \Leftrightarrow \mathcal{E}$.

315. *Fie relațiile $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ definite în mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4\} \subset N$ astfel: $x\mathcal{R}y$: $x < 2$ sau $y < 2$: $x\mathcal{S}y$: $x < y$ și $y \geqslant 3$.*

a) *Să se compare relațiile $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}$, $\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$.*

b) *Să se demonstreze că oricare ar fi relațiile binare $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ definite într-o mulțime E, este adevărată proprietatea: $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$.*

Soluție.

a) Graficele relațiilor din enunț sînt următoarele:

$\mathcal{R}$: $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$;
$\mathcal{S}$: $\{(1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$;
$\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$: $\{(1, 1), (2, 1), (3,1)\}$;
$\mathcal{R}^{-1}$: $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$;
$\mathcal{S}^{-1}$: $\{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$;
$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}$: $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$;
$\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$: $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$.

Deoarece ultimele două relații au același grafic, avem:

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) Folosind definiția inversei unei relații binare și definiția compusei a două relații binare, avem (x și y fiind elemente din E): $x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1} y \Leftrightarrow y(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})\ x \Leftrightarrow$ (există $u \in E$ astfel ca $y\mathcal{S}u$ și $u\mathcal{R}x$) $\Leftrightarrow$ (există $u \in E$ astfel ca $x\mathcal{R}^{-1}u$ și $u\mathcal{S}^{-1}y$) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\,(\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1})\,y$ și deci $x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1} y \Leftrightarrow x(\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1})\,y$ adică $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}$.

316. *Dacă $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{R}$ sînt relații binare definite în mulțimea finită E și $\mathcal{R}$ îndeplinește condițiile:*

1) *Oricare ar fi $x \in E$, există $y \in E$ astfel ca $x\mathcal{R}y$;*

2) *$x\mathcal{R}z$ și $y\mathcal{R}z \Rightarrow x = y$, să se demonstreze că:*

$$(\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{Y} \circ \mathcal{R}) \Rightarrow (\mathcal{X} \Leftrightarrow \mathcal{Y}).$$

Soluție.

În condițiile din enunț $\mathcal{R}^{-1}$ este singura relație definită în E astfel ca $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ fiind relația identică definită în E, adică $x\mathcal{E}y \Leftrightarrow x = y$, $x \in E$, $y \in E$. Compunînd la dreapta cu $\mathcal{R}^{-1}$ în $\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{Y} \circ \mathcal{R}$, folosind asociativitatea compunerii relațiilor binare și ținînd seama că $\mathcal{X} \circ \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{Y} \circ \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{Y}$, obținem:

$$(\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{Y} \circ \mathcal{R}) \Rightarrow [(\mathcal{X} \circ \mathcal{R}) \circ \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (\mathcal{Y} \circ \mathcal{R}) \circ \mathcal{R}^{-1}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\mathcal{X} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}) \Leftrightarrow \mathcal{Y} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1})] \Rightarrow (\mathcal{X} \circ \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{Y} \circ \mathcal{E}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\mathcal{X} \Leftrightarrow \mathcal{Y}),$$

deci în echivalența $\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{Y} \circ \mathcal{R}$, se poate „simplifica" cu $\mathcal{R}$ în condițiile din enunț.

317. *În mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se dau relațiile $\mathcal{R}$ și $\mathcal{S}$ prin graficele lor, anume:*

$$\mathcal{R}: \{(1, 2),\ (2, 3),\ (3, 4),\ (4, 5),\ (5, 1)\}.$$
$$\mathcal{S}: \{(1, 3),\ (2, 4),\ (3, 1),\ (5, 2)\}.$$

Să se găsească relația $\mathcal{X}$ definită în E astfel ca $\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{S}$.

Soluție.

$\mathcal{R}^{-1}$ are graficul: $\{(2, 1),\ (3, 2),\ (4, 3),\ (5, 4),\ (1, 5)\}$;
$\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ are graficul: $\{(1, 1),\ (2, 2),\ (3, 3),\ (4, 4),\ (5, 5)\}$,

adică tocmai graficul relației identice $\mathcal{E}$ atașată lui E, deci

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{E}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În echivalența $\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{S}$ compunînd la dreapta cu $\mathcal{R}^{-1}$ și folosind asociativitatea compunerii relațiilor obținem: $(\mathcal{X} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{S}) \Leftrightarrow [(\mathcal{X} \circ \mathcal{R}) \circ \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{R}^{-1}] \Leftrightarrow [\mathcal{X} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{R}^{-1}] \Leftrightarrow (\mathcal{X} \circ \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{R}^{-1})$ și deci $\mathcal{X} \Leftrightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{R}^{-1}$;
graf $\mathcal{X} = \{(2, 3), (3, 4), (4, 1), (1, 2)\}$.

Scanned with OKEN Scanner

RELAȚII

EXERCIȚII PROPUSE

318. *Fie mulțimile* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *și* $B = \{2, 4, 5, 6\}$ *părți ale lui* N. *Să se scrie graficele relațiilor următoare în care* $x \in A$ *și* $y \in B$

a) $x > 3$ *și* $y > 4$;
b) $x \geqslant 2$ *sau* $y \leqslant 4$;
c) $max\ (x, y) \leqslant 3$;
d) $min\ (x, y) \leqslant 2$;
e) $x + y = 6$;
f) x *divide pe* y.

319. *Să se precizeze dacă relațiile următoare, în care* $x \in N$, $y \in N$, *sînt reflexive, simetrice sau tranzitive:*

a) „x *este divizor al lui* y“;
b) „$x < y + 2$“;
c) „$x - y$ *este multiplu de* 2“.

320. *Să se precizeze dacă relațiile următoare, în care* $x \in R$, $y \in R$ *sînt reflexive, simetrice sau tranzitive:*

a) $x^2 + xy + y^2 = 0$;
b) $x^4 = y^4$;
c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

321. *Să se determine pe mulțimea* $E = \{1, 2, 3\}$ *o relație simetrică și tranzitivă, dar nereflexivă.*

322. *În mulțimea numerelor naturale relația „*x *este prim cu* y“ *este reflexivă? Dar simetrică? Dar tranzitivă?*

323. *Următoarele relații binare între elementele mulțimii* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *sînt relații de echivalență? În caz afirmativ să se precizeze clasele de echivalență.*

Scanned with OKEN Scanner

a) $x - y$ este un multiplu (în $\mathbf{Z}$) al lui 2:
b) $x^2 - y^2 = 3(x - y)$.

324. Să se demonstreze că relația $(x^2 + y^2 + xy)(x - y) = 0$ între $x \in R$ și $y \in R$ este o relație de echivalență. Să se reprezinte în plan punctele de coordonate x și y care sînt în relația dată.

Să se determine clasa de echivalență a elementului 1.

325. Fie $\mathcal{T}$ mulțimea triunghiurilor din plan.

a) Relația „t_1 este asemenea cu t_2“ între $t_1 \in \mathcal{T}$ și $t_2 \in \mathcal{T}$ este o relație de echivalență. Să se precizeze clasa de echivalență a unui triunghi echilateral dat.

b) Relația „t_1 are aceeași arie cu t_2“ este o relație de echivalență. Să se precizeze clasele de echivalență.

326. În mulțimea $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ definim relația $\mathcal{R}$ în modul următor: $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$: „$x + y' = x' + y$“.

Este această relație o relație de echivalență ?

În caz afirmativ să se precizeze clasele de echivalență.

327. In mulțimea $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-2, -1, 1, 2\}$ definim relația $\mathcal{R}$ în modul următor:

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')\text{: „}x \cdot y' = x' \cdot y\text{“.}$$

Este această relație o relație de echivalență?

Să se precizeze clasa de echivalență a elementului $(0, 1)$, a elementului $(1, -2)$ și $(-1, 2)$.

328. Fie mulțimea $E = R^3 - \{0, 0, 0\}$. Între elementele mulțimii E definim o relație binară $\mathcal{R}$ în modul următor:

$(x, y, z)\,\mathcal{R}\,(x', y', z')$: „există $\rho \in R$ astfel încît $x = \rho x'$, $y = \rho y'$, $z = \rho z'$“.

Să se arate că relația $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență.

329. În mulțimea C a numerelor complexe relația $z = \varepsilon z'$ unde $\varepsilon \in \{-1, -i, i, 1\}$ este o relație de echivalență. Să se precizeze clasa de echivalență a elementului $z = 3 + 4i$ și să se reprezinte geometric elementele acestei clase.

330. Fie $E = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in Z \text{ și } y \in Z\}$ și

$$A = \{x + y\sqrt{2} \mid x \in Z, y \in Z, x^2 - 2y^2 = 1\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie relația binară $\mathcal{R}$ între $z \in E$ și $z' \in E$ definită astfel $z\mathcal{R}z'$: „există $\varepsilon \in A$ astfel încît $z = \varepsilon z'$“.

Să se arate că relația $\mathcal{R}$ este o relație de echivalență.

331. *Fie $\mathcal{R}$ o relație de echivalență între elementele unei mulțimi E. Notăm cu $\hat{x}$ clasa de echivalență a lui x.*

Să se demonstreze că:

$$a)\ \hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x \equiv y\ (mod\ \mathcal{R});$$

$$b)\ \hat{x} \cap \hat{y} = \varnothing \text{ sau } \hat{x} = \hat{y};$$

$$c)\ \bigcup_{x \in E} \hat{x} = E.$$

332. *Cîte relații de ordine totală se pot defini pe o mulțime finită cu n elemente?*

333. *În mulțimea numerelor reale definim o relație $\leqslant$ în modul următor:*

$$x \leqslant y: \text{„există } a \geqslant 2 \text{ astfel încît } y = x + a\text{“}.$$

Este relația $\leqslant$ o relație de ordine totală în R?

334. *a) Pe mulțimea numerelor complexe se definește următoarea relație:*

$x + yi \leqslant x' + y'i$: „$x \leqslant x'$ sau $y \leqslant y'$“. Este relația „$\leqslant$“ o relație de ordine?

b) Să se demonstreze că pe mulțimea numerelor complexe nu se poate defini o relație de ordine $\leqslant$ astfel încît:

$$1)\ z \leqslant z' \Leftrightarrow z + z'' \leqslant z' + z'';$$
$$2)\ 0 \leqslant a \text{ și } z \leqslant z' \Rightarrow az \leqslant az';$$
$$3)\ 0 \geqslant a \text{ și } z \leqslant z' \Rightarrow az' \leqslant az.$$

335. *Să se demonstreze că pe mulțimea N^* relația „x divide pe y“ este o relație de ordine. Este aceasta o relație de ordine totală?*

Aceeași relație este o relație de ordine pe Z?

336. *Fie mulțimile $E = \{2, 3, 4, 5\}$, $F = \{4, 5, 6\}$ și $G = \{4, 5, 6, 7\}$ și relațiile: $x\mathcal{R}y$: „$x < y$“ ($x \in E$ și $y \in F$),*

$$x\mathcal{S}y: \text{„}x + y < 7\text{“ } (x \in F \text{ și } y \in G).$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine graficele relațiilor $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ și să se reprezinte cele trei relații pe o schemă.

337. *Să se determine două relații nereflexive pe mulțimea $E = \{1, 2, 3\}$ și astfel încît compusa lor să fie o relație reflexivă. Relațiile pot fi indicate prin graficele lor.*

338. *Să se determine două relații simetrice pe mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4\}$ astfel încît compusa lor să nu fie o relație simetrică. Relațiile pot fi indicate prin graficele lor.*

339. *Notăm cu $\mathcal{E}_A$ relația $x = y$ între elementele unei mulțimi A și cu $\mathcal{R}$ o relație binară între elementele mulțimii A. Să se demonstreze că*

$$\mathcal{E}_A \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R},$$
$$\mathcal{E}_A \circ \mathcal{E}_A \Leftrightarrow \mathcal{R}.$$

340. *Să se precizeze două relații tranzitive pe mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4\}$ astfel încît compusa lor să fie netranzitivă.*

341. *Să se precizeze trei relații $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ pe mulțimea $E = \{1, 2, 3, 4\}$ astfel încît $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ și $\mathcal{S} \Leftrightarrow \mathcal{T}$.*

342. *Fie $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și relația „x divide pe y“ ($x \in E$ și $y \in E$) și relația „$x + y = 9$“ ($x \in E$, $y \in F$).*
Să se scrie graficele acestor relații, precum și graficele relațiilor inverse.

343. *Fie $\mathcal{R}$ o relație binară între elementele unei mulțimi E. Să se verifice că următoarele propoziții sînt echivalente:*

a) $\mathcal{R}$ este simetrică;
b) $\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1}$.

344. *Fie E o mulțime, Δ relația $x = y$ și $\mathcal{R}$ o relație binară între elementele E.*
Să se verifice că următoarele propoziții sînt echivalente:

a) $\mathcal{R}$ este reflexivă;
b) graf $\Delta \subset$ graf $\mathcal{R}$.

345. *Fie E o mulțime și $\mathcal{R}$ o relație binară între elementele lui E. Să se spună dacă următoarele propoziții sînt echivalente.*

Scanned with OKEN Scanner

a) graf $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subset$ *graf* $\mathcal{R}$; *b)* $\mathcal{R}$ *este tranzitivă.*

346. *Se consideră următoarele relații binare:*

a) $x + 3y = 4$ $\quad (x \in R, y \in R)$;
b) $x^2 + 2x = y$ $\quad (x \in R, y \in [-1, +\infty)$;
c) $3^x = y$ $\quad x \in R, y \in R_+$;
d) $\lg x = y$ $\quad x \in R_+, y \in R$.

Să se determine relațiile inverse.

347. *Fie mulțimea* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *și relațiile* $\mathcal{R}$ *și* $\mathcal{S}$ *definite prin graficele lor:*

$$\text{graf } \mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 5), (5, 6)\}$$
$$\text{graf } \mathcal{S} = \{(2, 3), (4, 5), (5, 2)\}.$$

Să se determine graficele relațiilor:

$\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1}$ *și să se verifice că* $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} \Leftrightarrow \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$.

348. *Să se dea un exemplu de relație definită între elementele unei mulțimi finite, astfel ca relația să fie simetrică, tranzitivă și nereflexivă.*

Scanned with OKEN Scanner

III. FUNCȚII

§ 1. Relații funcționale

Dacă se dau mulțimi E și F și un procedeu prin care se asociază la orice element x din E, un element y din F și numai unul, se spune că am definit o funcție pe E cu valori în F. Funcțiile se notează cu literele f, g, h, ... precum și cu alte semne. În loc de funcție pe E cu valori în F se mai spune aplicație a mulțimii E în mulțimea F.

Mulțimea E se numește *domeniul de definiție* al funcției.

Mulțimea F se numește *mulțimea în care funcția ia valori.*

Dacă domeniul de definiție al funcției f este mulțimea E, iar mulțimea F este mulțimea în care funcția f ia valori, se mai spune că funcția f este definită pe E și ia valori în F, ceea ce se reprezintă prin notația $f : E \to F$.

Dacă prin funcția f elementului $a \in E$ îi corespunde elementul b, atunci se spune că elementul b este imaginea prin f a lui a sau valoarea funcției corespunzătoare elementului a și se scrie $b = f(a)$.

Relația binară $y = f(x)$, între elementele mulțimii E și elementele mulțimii F, se mai numește *lege de corespondență.* Această relație se caracterizează prin aceea că pentru orice $x \in E$ există un $y \in F$ și numai unul în relația dată cu x. O astfel de relație se numește relație funcțională.

Se observă că nu orice relație binară între elementele unei mulțimi E și elementele unei mulțimi F definește o funcție pe E cu valori în F.

Reținem că o funcție este dată prin trei elemente:

a) domeniul de definiție;

b) mulțimea în care ia valori;

c) legea de corespondență.

Legea de corespondență a unei funcții $f: E \to F$ poate fi dată în mai multe moduri:

— prin indicarea într-un tablou sau o diagramă a imaginilor nominale ale fiecărui element din domeniul de definiție;

— prin indicarea unei formule prin care se precizează $f(x)$, pentru orice $x \in E$.

Fie o funcție $f: E \to F$. Dacă mulțimea F este o mulțime de numere reale, funcția f se numește *funcție reală*. Dacă E este o mulțime de numere reale, atunci funcția f se numește *funcție de variabilă reală*.

Fie o funcție $f: E \to F$ și $A \subset E$. *Mulțimea imaginilor prin f ale elementelor din A se notează cu $f(A)$*. Punem $f(\varnothing) = \varnothing$.

Avem: $f(A) = \{y \in F \mid \text{există } x \in A, \text{ astfel încît } y = f(x)\}$.

Fie A o mulțime. Aplicația definită pe A cu valori în A, prin care oricărui $x \in A$ îi corespunde tot x, se numește aplicația identică a mulțimii A și se notează cu e_A. Avem $e_A: A \to A$ și $e_A(x) = x$.

§ 2. Funcții egale

Funcțiile $f_1: E_1 \to F_1$ și $f_2: E_2 \to F_2$ sînt egale dacă:

a) $E_1 = E_2$;

b) $F_1 = F_2$;

c) $f_1(x) = f_2(x)$, *oricare ar fi* $x \in E_1$.

Dacă funcțiile f_1 și f_2 sînt egale, se scrie $f_1 = f_2$.

§ 3. Restricții. Prelungiri
Funcții injective, surjective, bijective. Operații cu funcții

Fie o funcție $f: E \to F$, $A \subset E$ și $B \subset f(A)$. Funcția $g: A \to B$ pentru care $g(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in A$ se numește restricție a funcției f.

Dacă funcția g este o restricție a funcției f, atunci se spune că f este o prelungire a funcției g.

Scanned with OKEN Scanner

O aplicație $f: E \to F$ *este injectivă dacă oricare ar fi* $x_1 \in E$ *și* $x_2 \in E$, *astfel încît* $x_1 \neq x_2$, *avem* $f(x_1) \neq f(x_2)$, *adică:*

$$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Următoarele propoziții sînt echivalente:

1) Funcția f este injectivă;

2) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

3) Dacă $y \in F$, *atunci cel mult un* $x \in E$, *astfel încît* $y = f(x)$.

Dacă funcția $f: E \to F$ este o funcție reală de variabilă reală, atunci ea este injectivă cînd orice paralelă la axa Ox, dusă prin punctele mulțimii F, reprezentate pe axa Oy, taie graficul funcției în cel mult un punct.

O aplicație $f: E \to F$ *este surjectivă dacă oricare ar fi* $y \in F$ *există (cel puțin) un* $x \in E$, *astfel încît* $y = f(x)$.

Următoarele propoziții sînt echivalente:

1) Funcția f este surjectivă;

2) $f(E) = F$;

3) Dacă $y \in F$, *atunci există cel puțin un* $x \in E$, *astfel încît* $y = f(x)$.

Dacă funcția $f: E \to F$ este o funcție reală de variabilă reală, atunci paralela la axa Ox, dusă prin punctele mulțimii F, reprezentate pe axa Oy, taie graficul în cel puțin un punct.

O aplicație $f: E \to F$ *se numește bijectivă dacă este injectivă și surjectivă.*

Următoarele propoziții sînt echivalente:

1) Funcția f este bijectivă;

2) Pentru oricare $y \in F$, *există un singur* $x \in E$, *astfel încît* $y = f(x)$.

Dacă funcția $f: E \to F$ este o funcție reală de variabilă reală, atunci oricare paralelă la axa Ox, dusă prin punctele mulțimii F, reprezentate pe axa Oy, taie graficul într-un singur punct.

Fie două funcții $f_1: E_1 \to R$ *și* $E_2 \to R$. *Presupunem* $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.

Funcția $s: E_1 \cap E_2 \to R$, *pentru care* $s(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *pentru orice* $x \in E_1 \cap E_2$ *se numește suma funcțiilor* f_1, f_2 *și se mai notează cu* $f_1 + f_2 (s = f_1 + f_2)$.

Scanned with OKEN Scanner

Funcția $d: E_1 \cap E_2 \to R$ *pentru care* $d(x) = f_1(x) - f_2(x)$ *se numește diferența dintre funcția* f_1 *și* f_2 *se mai notează cu* $f_1 - f_2 (d = f_1 - f_2)$.

Funcția $p: E_1 \cap E_2 \to R$, *pentru care* $p(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ *oricare ar fi* $x \in E_1 \cap E_2$ *se numește produsul funcțiilor* f_1 *și* f_2 *și se notează cu* $f_1 \cdot f_2 (p = f_1 \cdot f_2)$.

Dacă $A = \{x \in E_1 \cap E_2 | f_2(x) = 0\}$ *și* $E = (E_1 \cap E_2) - A$, *atunci funcția* $f: E \to R$, *pentru care* $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ *oricare ar fi* $x \in E$ *se numește cîtul dintre funcția* f_1 *și* f_2 *și se notează cu* $\dfrac{f_1}{f_2}$.

§ 4. Funcții monotone

Fie E *și* F *două mulțimi total ordonate și* $A \subset E$. *O funcție* $f: E \to F$ *este crescătoare, respectiv strict crescătoare, pe* A, *dacă oricare ar fi* $x_1 \in A$ *și* $x_2 \in A$, *astfel încît* $x_1 < x_2$, *avem* $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, *respectiv* $f(x_1) < f(x_2)$;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2), \text{ respectiv } \left.\begin{array}{l} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

O funcție $f: E \to F$ *este descrescătoare, respectiv strict descrescătoare pe* A, *dacă ar fi* $x_1 \in A$ *și* $x_2 \in A$, *astfel încît* $x_1 < x_2$, *avem* $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, *respectiv* $f(x_1) > f(x_2)$;

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2) \text{ respectiv } \left.\begin{array}{l} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

O funcție crescătoare, respectiv descrescătoare pe A, *se numește monotonă pe* A.

O funcție strict crescătoare, respectiv strict descrescătoare pe A, *se numește strict monotonă pe* A.

Fie $f: E \to F$ *o funcție reală de variabilă reală. Următoarele propoziții sînt echivalente*:

1) Funcția f este crescătoare pe A, respectiv strict crescătoare pe A;

Scanned with OKEN Scanner

2) $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} \geqslant 0$, respectiv $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} > 0$, oricare ar fi

$$\alpha \in A,\ \beta \in A \text{ și } \alpha \neq \beta.$$

Următoarele propoziții sînt echivalente:

1) Funcția f este descrescătoare, respectiv strict descrescătoare pe A;

2) $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} \leqslant 0$, respectiv $\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} < 0$, oricare ar fi

$$\alpha \in A,\ \beta \in A \text{ și } \alpha \neq \beta.$$

O funcție $f: E \to F$ strict crescătoare, respectiv strict descrescătoare pe E este injectivă.

§ 5. Funcții compuse. Funcții inverse

Fie o funcție $f: E \to F$ *și o funcție* $g: F \to G$.

Funcția $h: E \to G$ *pentru care* $h(x) = g(f(x))$, *oricare ar fi* $x \in E$ *se numește funcția compusă a funcțiilor* g *și* f *și se notează* $g \circ f$.

Avem: $g \circ f: E \to G$ și $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(x \in E)$.

Corespondența realizată de funcția $g \circ f$ se reprezintă ca în figura 25.

Fie f, g, h trei funcții.

Dacă una dintre funcțiile $(f \circ g) \circ h$, $f \circ (g \circ h)$ este definită, atunci este definită și cealaltă și avem:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

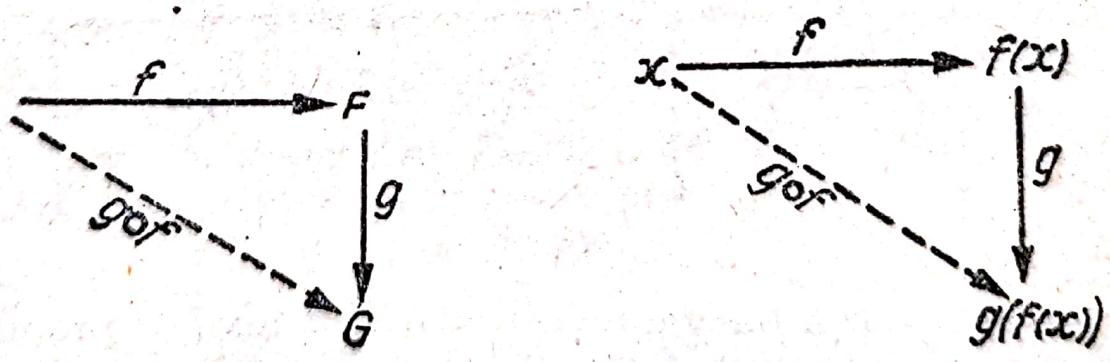


Fig. 25

Fie funcția $f: E \to F$. Avem:

$$e_F \circ f = f,$$
$$f \circ e_F = f.$$

Fie o funcție $f: E \to F$. Relația binară $y = f(x)$ între elementele mulțimii E și elementele mulțimii F este o relație funcțională. Dacă relația inversă între elementele mulțimii F și elementele mulțimii E este funcțională (adică dacă pentru orice $y \in F$, există un $x \in E$ și numai unul astfel încît $y = f(x)$), atunci aceasta determină o funcție definită pe F cu valori în E, numită funcția inversă (sau reciprocă) a lui f. În acest caz, se spune că funcția f este inversabilă.

Funcția inversă asociată funcției f se notează cu f^{-1}.

Condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă este să fie bijectivă.

Corespondențele realizate de funcțiile f, f^{-1} se reprezintă ca în figura 26.

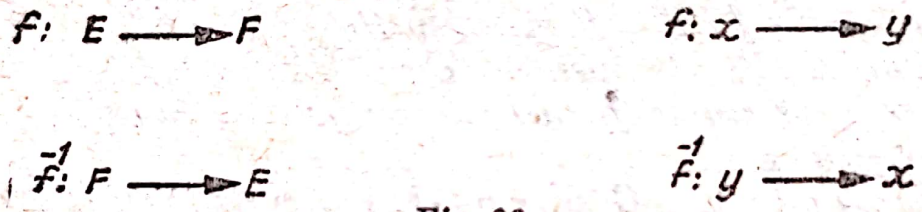


Fig. 26

Dacă funcția f este inversabilă, atunci $(y = f(x)) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y))$.

Pentru a găsi funcția inversă a unei funcții f (cînd există) se rezolvă ecuația $y = f(x)$ în raport cu necunoscuta x.

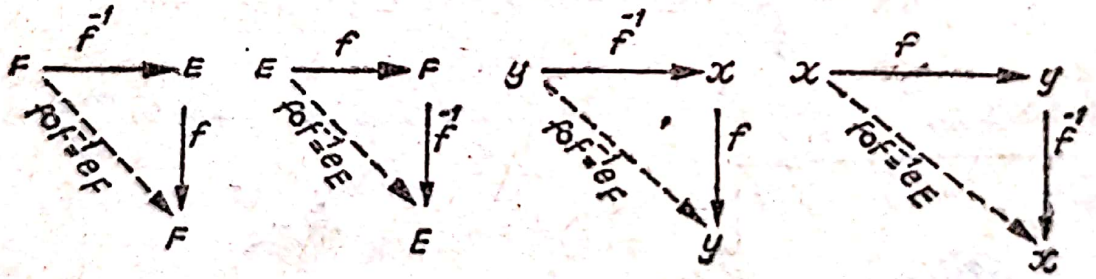


Fig. 27

Fie $f: E \to F$ o funcție inversabilă. Următoarele proprietăți sînt adevărate (vezi figura 27):

$f \circ f^{-1} = e_F$; $\quad f(f^{-1}(y)) = y$, oricare ar fi $y \in F$.
$f^{-1} \circ f = e_E$; $\quad f^{-1}(f(x)) = x$, oricare ar fi $x \in E$.

Prezentăm în continuare funcțiile cele mai uzuale, inversabile, precum și inversele lor :

1) $f : R \to R_+$, $\quad f^{-1} : R_+ \to R$,
$f(x) = a^x$, $\quad f^{-1}(x) = \log_a x$,
$a > 0,\ a \neq 1$; $\quad a > 0,\ a \neq 1$;

2) $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\quad f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$,
$f(x) = x^2$, $\quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$;

3) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $\quad f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
$f(x) = \sin x$, $\quad f^{-1}(x) = \arcsin x$,

4) $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\quad f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$,
$f(x) = \cos x$; $\quad f^{-1}(x) = \arccos x$;

5) $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$; $\quad f^{-1} : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
$f(x) = \operatorname{tg} x$; $\quad f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$.

§ 6. Funcții pare, impare. Funcții periodice

Fie $f : E \to F$ o funcție reală de variabilă reală, E fiind un interval de forma $(-a, a)$ sau $[-a, a]$, $(a \in R_+)$.

Funcția f este pară dacă $f(x) = f(-x)$ oricare ar fi $x \in E$.

Funcția f este impară dacă $f(x) = -f(-x)$, $x \in E$.

O funcție $f : E \to F$, reală, de variabilă reală, este periodică dacă există un număr $T \neq 0$ astfel că dacă $x \in E$, atunci $x + T \in E$ și $f(x + T) = f(x)$, oricare ar fi $x \in E$. Numărul T se numește perioadă a funcției.

§ 7. Funcție caracteristică

Fie M o mulțime și A o parte a sa.

Funcția $f_A : M \to \{0, 1\}$ pentru care

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \in A, \\ 0, \text{ dacă } x \notin A. \end{cases}$$

se numește funcție caracteristică a mulțimii A.

Menționăm următoarele proprietăți ale funcției caracteristice :

1. $f_{\varnothing}(x) = 0$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Într-adevăr, dacă $x \in M$, atunci cazul $x \in \varnothing$ nu poate avea loc și deci $f_{\varnothing}(x) = 0$, oricare ar fi $x \in M$.

2. $f_M(x) = 1$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Într-adevăr, dacă $x \in M$, atunci cazul $x \notin M$ nu poate avea loc și deci $f_M(x) = 1$, oricare ar fi $x \in M$.

3. $f_A^2(x) = f_A(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Într-adevăr, dacă $x \in A$, atunci $f_A(x) = f_A^2(x) = 1$, iar dacă $x \notin A$, atunci $f_A(x) = f_A^2(x) = 0$.

4. $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Pentru demonstrație vom întocmi următorul tabel:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in A \cap B$	$f_{A \cap B}(x) = 1$	$f_A(x) = 1$	$f_B(x) = 1$	$f_A(x) \cdot f_B(x) = 1$
$x \in A$	$x \notin B$	$x \notin A \cap B$	$f_{A \cap B}(x) = 0$	$f_A(x) = 1$	$f_B(x) = 0$	$f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$
$x \notin A$	$x \in B$	$x \notin A \cap B$	$f_{A \cap B}(x) = 0$	$f_A(x) = 0$	$f_B(x) = 1$	$f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$
$x \notin A$	$x \notin B$	$x \notin A \cap B$	$f_{A \cap B}(x) = 0$	$f_A(x) = 0$	$f_B(x) = 0$	$f_A(x) \cdot f_B(x) = 0$

Se observă că în toate cazurile $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$.

5. $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Pentru demonstrație vom întocmi următorul tabel:

$x \in A$	$x \notin \bar{A}$	$f_{\bar{A}}(x) = 0$	$f_A(x) = 1$	$1 - f_A(x) = 0$
$x \notin A$	$x \in \bar{A}$	$f_{\bar{A}}(x) = 1$	$f_A(x) = 0$	$1 - f_A(x) = 1$

Scanned with OKEN Scanner

Se observă că în toate cazurile $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$.

6. $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$, oricare ar fi $x \in M$.

Ținînd seama că $A \cup B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$, deducem $f_{A \cup B}(x) = f_{\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}}(x)$. Aplicînd proprietățile 5 și 4, rezultă:

$$f_{\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}}(x) = 1 - f_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x) = 1 - f_{\bar{A}}(x) \cdot f_{\bar{B}}(x) = 1 -$$
$$- (1 - f_A(x))(1 - f_B(x)) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x).$$

Deci $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x)$.

7. $(A \subset B) \Leftrightarrow (f_A(x) \leqslant f_B(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Ținînd seama că $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$, deducem:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A) \Leftrightarrow (f_{A \cap B}(x) = f_A(x)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x)) \Leftrightarrow (f_A(x)(f_B(x) - 1) = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((f_A(x) = 0) \text{ sau } (f_B(x) = 1)) \Leftrightarrow (f_A(x) \leqslant f_B(x)).$$

Această proprietate permite să înlocuim demonstrația unei incluziuni, prin demonstrația unei inegalități numerice (inegalitatea între valorile funcțiilor caracteristice ale mulțimilor care intră în incluziune).

8. $A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Într-adevăr,

$$(A = B) \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Leftrightarrow ((f_A(x) \leqslant f_B(x)) \wedge$$
$$\wedge (f_B(x) \leqslant f_A(x)) \Leftrightarrow (f_A(x) = f_B(x)).$$

Această proprietate permite să înlocuim demonstrația unei egalități de mulțimi, printr-o egalitate numerică (egalitatea între valorile funcțiilor caracteristice ale mulțimilor respective).

9. $f_{A \Delta B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2 f_A(x) f_B(x)$, *oricare ar fi* $x \in M$.

Ținînd seama că $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$ și aplicînd proprietățile 3, 4, 5 și 6, deducem:

$$f_{A\Delta B}(x) = f_{A\cap\bar{B}}(x) + f_{B\cap\bar{A}}(x) - f_{A\cap\bar{B}}(x)\cdot f_{B\cap\bar{A}}(x) =$$
$$= f_A(x)\cdot(1 - f_B(x)) + f_B(x)\,(1 - f_A(x)) - f_A(x)\,f_B(x)\,(1 -$$
$$- f_B(x))\,(1 - f_A(x)) = f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x).$$

Observație. Funcția caracteristică a diferenței simetrice mai poate fi dată prin următoarea egalitate :

$$f_{A\Delta B}(x) = |f_A(x) - f_B(x)|.$$

Într-adevăr, ținînd seama că $f_{A\Delta B}(x) = [f_A(x) - f_B(x)]^2$ deducem că :

a) dacă $f_A(x) < f_B(x)$, atunci $f_A(x) = 0$ și $f_B(x) = 1$ și deci, în acest caz $(f_A(x) - f_B(X))^2 = |f_A(x) - f_B(x)| = 1$;

b) dacă $f_A(x) = f_B(x)$, atunci $[f_A(x) - f_B(x)]^2 = |f_A(x) - -f_B(x)| = 0$.

c) dacă $f_B(x) < f_A(x)$, atunci $f_B(x) = 0$ și $f_A(x) = 1$ și deci, în acest caz $[f_A(x) - f_B(x)]^2 = |f_A(x) - f_B(x)| = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

III. FUNCȚII

EXERCIȚII REZOLVATE

349. *Fie* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ *și* $F = \{a, b, c, d\}$. *Care dintre diagramele reprezentate în figura 28 reprezintă o funcție definită pe* E *cu valori în* F *și care nu?*

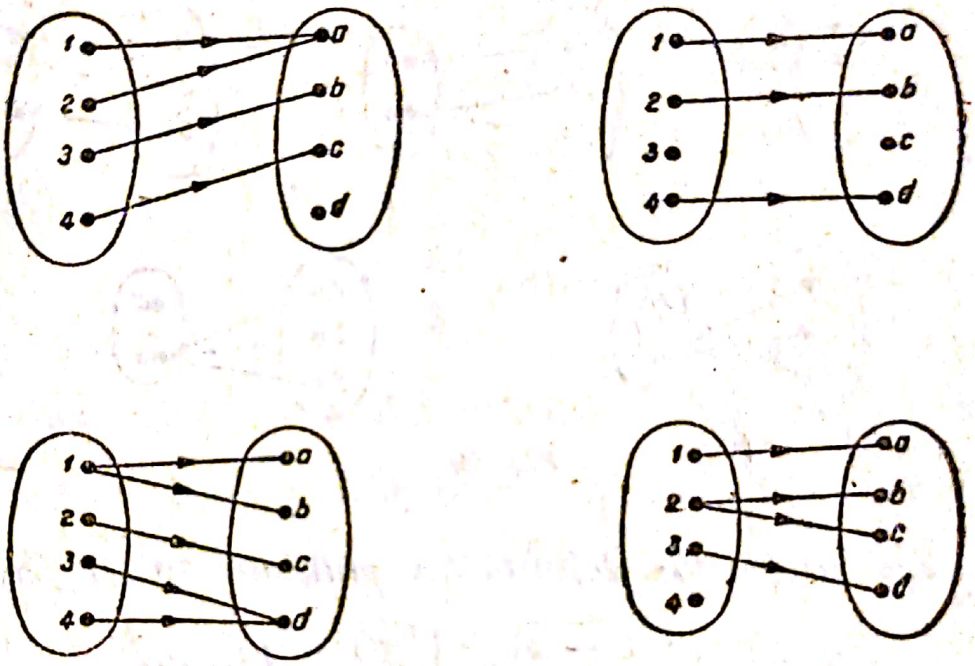


Fig. 28

Răspuns.

Prin diagrama (a) este dată o funcție definită pe E cu valori în F. Diagrama (b) nu reprezintă o funcție definită pe E cu valori în F, deoarece nu este indicată imaginea lui 3.

Diagrama (c) nu reprezintă o funcție deoarece lui 1 îi corespund două elemente din F, a și b. Nici diagrama (d) nu reprezintă o aplicație a lui E în F, căci lui 2 îi corespund două elemente din F, anume b, c.

Scanned with OKEN Scanner

350. *Fie* $E = \{1, 2, 3\}$ *și* $F = \{a, b\}$. *Să se scrie toate funcțiile definite pe* E, *cu valori în* F *indicîndu-se diagrama respectivă.*

Răspuns.

Există opt funcții definite pe E cu valori în F. Diagramele lor sînt următoarele (fig. 29):

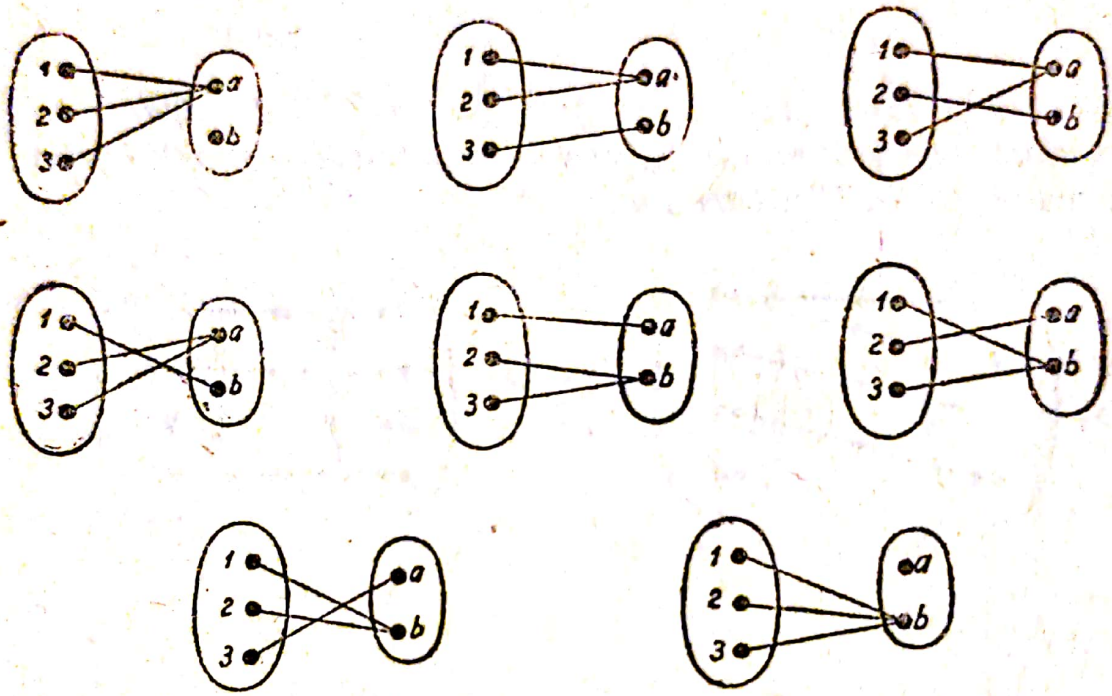


Fig. 29

351. *Fie relația* $\mathcal{R}$ *definită în mulțimea* $[0, 1]$ *astfel:*

$$x \mathcal{R} y : \sqrt{\frac{x(1-x)}{x-y}} - \sqrt{\frac{y(1-y)}{x-y}} = 0$$

Este această relație o funcție de argument x? *Dar dacă relația se stabilește între*

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \text{ și } y \in \left[0, \frac{1}{2}\right)?$$

În caz afirmativ, să se reprezinte grafic funcția într-un sistem de axe xoy ortogonal.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

Deoarece pentru $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ avem $x(1-x) \geqslant 0$, $y(1-y) \geqslant 0$, este necesar să avem și $x > y$. În aceste condiții:

$$\sqrt{\frac{x(1-x)}{x-y}} - \sqrt{\frac{y(1-y)}{x-y}} = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0,$$

relație care nu definește o funcție de argument x, căci nu la orice x din $[0, 1]$ corespunde un y din $[0, 1]$ astfel ca $y < x$. De exemplu pentru $x = \frac{1}{2}$, din $x + y - 1 = 0$ rezultă

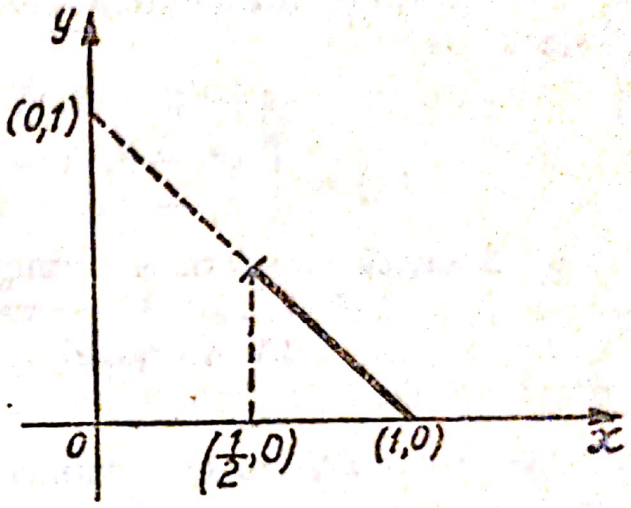


Fig. 30

$$y = \frac{1}{2}, \text{ adică } x = y.$$

Dacă relația este stabilită între $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ și $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, atunci ea este o relație funcțională, deoarece pentru fiecare $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ există un singur $y = 1 - x$, $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ (condiția $x > y$ este îndeplinită).

În acest caz graficul funcției este segmentul de dreaptă îngroșat din figura 30 fără extremitatea cu paranteză.

352. *a) Asociind fiecărui* $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *numărul* $x^2 - 1$ *și fiecărui* $x \in \{-1, 1, 3, 4\}$ *numărul* $x^3 - 4x^2 - x + 4$, *definim o funcție pe* $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ *cu valori în* R?

b) Dar asociind fiecărui $x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *numărul* $x^2 - 1$ *și fiecărui* $x \in \{-1, 1, 3, 4\}$ *numărul* $x^3 + 1$, *definim o funcție pe* $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ *cu valori în* R?

În caz afirmativ să se reprezinte funcția prin acoladă, dîndu-se expresia sa pe două mulțimi disjuncte a căror reuniune este $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Soluție.

a) Corespondența indicată definește o funcție care poate fi scrisă astfel :

$$f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \to R$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \\ x^3 - 4x^2 - x + 4, & x \in \{3, 4\}. \end{cases}$$

b) Această asociere a numerelor nu definește o funcție pe $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ cu valori în R, deoarece numărului 1 i se asociază numărul 0 prin procedeul $x \to x^2 - 1$, dar și numărul 2 prin procedeul $x \to x^3 + 1$.

353. *În mulțimea* Q *a numerelor raționale definim relația care face ca fiecărui număr rațional* $\frac{m}{n}$, m, n *întregi*, $n \neq 0$ *să-i corespundă numărul* $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$. *Este această relație o funcție ? Dar corespondența* $\frac{m}{n} \to m + n$ *?*

Soluție.

Corespondența $\frac{m}{n} \to \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ este o funcție definită pe Q deoarece ea face ca la fiecare număr rațional să corespundă un singur număr rațional. Într-adevăr, avem :

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = \frac{m'^2}{n'^2} \Rightarrow \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = \frac{m'^2 - n'^2}{m'^2 + n'^2}.$$

Corespondența $\frac{m}{n} \to m + n$ nu este o funcție definită pe Q căci ea face ca unui număr rațional să-i corespundă mai multe numere întregi, de exemplu lui $\frac{2}{3}$ îi corespunde 5, dar și 10 $\left(\text{scriind } \frac{2}{3} \text{ sub forma } \frac{4}{6}\right)$.

354. *a) Fie mulțimea M a numerelor reale de forma* $x + y\sqrt{2}$, *unde* $x \in Q$ *și* $y \in Q$. *Asociind fiecărui număr* $x + y\sqrt{2}$ *din M, numărul* $x - y\sqrt{2}$, *definim o funcție pe M cu valori în M?*

b) Fie P mulțimea numerelor întregi de forma $2x + 3y$, *unde* $x \in Z$ *și* $y \in Z$.

Asociind fiecărui număr $2x + 3y$ *din P, numărul* $2x - 3y$, *definim o funcție pe P cu valori în P?*

Soluție.

a) Corespondența $x + y\sqrt{2} \to x - y\sqrt{2}$ este legată de forma sub care sînt scrise numerele din M. Dacă numărul z admite două scrieri de această formă, $x + y\sqrt{2}$ și $x' + y'\sqrt{2}$ atunci lui $z \in M$ îi corespunde și numărul $x - y\sqrt{2}$ și numărul $x' - y'\sqrt{2}$. Corespondența va defini o funcție pe M cu valori în M dacă vom arăta că oricare număr din M admite o scriere unică sub forma $x + y\sqrt{2}$. Într-adevăr, fie $x + y\sqrt{2} = x' + y'\sqrt{2}$. Avem: $x - x' + (y - y')\sqrt{2} = 0$.

Dacă $y \neq y'$, atunci $\sqrt{2} = \dfrac{x' - x}{y - y'}$, adică $\sqrt{2}$ ar fi rațional, ceea ce este fals și deci $y = y'$. Dacă $y = y'$ rezultă și $x = x'$. Corespondența indicată la punctul a) din enunț definește deci o funcție pe M cu valori în M.

b) Această corespondență nu definește o funcție pe mulțimea P cu valori în P, deoarece numerele din P nu admit o scriere unică de forma $2x + 3y$, x și y fiind întregi. Astfel: $5 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 \cdot 4 + 3(-1)$ și deci numărului 5 din P îi corespunde atît $2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1$ cît și $2 \cdot 4 - 3(-1) = 11$.

355. *Următoarele exprimări sînt greșite. Să se explice de ce și să se corecteze:*

a) „*Fie funcția* $f: R \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$“;

b) „*Fie funcția* $f: [0, 5] \to [0, 2]$, $f(x) = x - 1$“;

c) „*Fie funcția* $f: [0, +\infty) \to [3, 4]$, $f(x) = x^2$“.

Răspuns.

a) Deoarece $\frac{1}{x^2-1}$ nu are sens pentru $x = \pm 1$, domeniul de definiție nu poate fi R așa cum este indicat în enunț.

Funcția trebuie definită pe $R - (-1, +1\}$ sau pe o parte a acestei mulțimi.

De asemenea se poate corecta exprimarea păstrînd R ca domeniu de definiție și definind funcția și în punctele $x = -1$, $x = 1$. Astfel se poate spune:

„Fie funcția $f: R \to R$ definită astfel: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-1}, & x \neq \pm 1, \\ 0, x = \pm 1. \end{cases}$

b) Mulțimea în care funcția ia valori conține toate valorile funcției, ori în cazul de față, domeniul de definiție fiind $[0, 5]$, mulțimea valorilor este $[-1, 4]$ și nu este inclusă în $[0, 2]$.

Corectarea se poate face luînd drept mulțime în care funcția ia valori o mulțime care să includă $[-1, 4]$.

Se mai poate corecta și altfel, luînd drept domeniu de definiție o mulțime a cărei imagine prin $f(x) = x - 1$ să fie inclusă în $[0, 2]$.

c) Ca și la punctul b) există valori ale funcției care nu aparțin intervalului $[3, 4]$. Păstrînd relația $f(x) = x^2$ și domeniul de definiție, corectarea se poate face înlocuind $[3, 4]$ cu o mulțime de numere reale care să includă mulțimea valorilor $[0, +\infty)$.

356. *Fie funcția* $f: R \to R$, $f(x) = ax$, $a \in R - \{0\}$.

a) Să se arate că oricare ar fi numerele reale x_1, x_2 m, n *avem* $f(mx_1 + nx_2) = mf(x_1) + nf(x_2)$.

b) Reciproc, să se arate că orice funcție $f: R \to R$ *cu proprietatea că* $f(mx_1 + nx_2) = mf(x_1) + nf(x_2)$, *oricare ar fi numerele reale* x_1, x_2, m, n *este de forma* $f(x) = ax$, *unde* $a = f(1)$.

Soluție.

a) Avem: $f(mx_1 + nx_2) = a(mx_1 + nx_2) = m(ax_1) + n(ax_2) = mf(x_1) + nf(x_2)$ și deci egalitatea $f(mx_1 + nx_2) = mf(x_1) + nf(x_2)$ este adevărată.

b) Dacă egalitatea $f(mx_1 + nx_2) = mf(x_1) + nf(x_2)$ este adevărată oricare ar fi numerele reale x_1, x_2, m, n ea este adevărată și pentru $x_1 = 1$, $n = 0$, x_2 și m numere reale oarecare, în care caz obținem $f(m) = mf(1)$ și notînd $m = x$, $f(1) = a$, rezultă $f(x) = ax$.

357. *Fie E mulțimea finită cu n elemente și F o mulțime finită cu m elemente. Notăm cu $S_{n,m}$ numărul aplicațiilor definite pe E cu valori în F.*

a) Să se determine $S_{1,m}$ și $S_{2,m}$.

b) Să se găsească o relație între $S_{n,m}$ și $S_{n+1,m}$.

c) Să se demonstreze, utilizîndu-se eventual proprietățile precedente, că $S_{n,m} = m^n$.

Soluție.

a) Fie $E = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $F = \{1, 2, \ldots, m\}$. $S_{1,m}$ reprezintă numărul aplicațiilor mulțimii $\{1\}$ în mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, m\}$.

Există m astfel de aplicații, deci $S_{1,m} = m$.

Numărul aplicațiilor mulțimii $\{1, 2\}$, în mulțimea $\{1, 2, \ldots, m\}$ este $S_{2,m} = m^2$. Într-adevăr, considerînd aplicațiile de forma $\begin{matrix} 1 \to 1 \\ 2 \to x \end{matrix}$, unde $x \in \{1, 2, \ldots, m\}$, obținem m aplicații care fac ca lui 1 să-i corespundă 1; tot m aplicații ca lui 1 să-i corespundă 2 etc. În total se obțin $m \cdot m = m^2$ aplicații.

b) Fie $\begin{matrix} 1 \to a_1 \\ 2 \to a_2 \\ 3 \to a_3 \\ \ldots\ldots \\ n \to a_n \end{matrix}$

o aplicație a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ în $\{1, 2, \ldots, m\}$. Pentru a obține o aplicație a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ în $\{1, 2, \ldots, m\}$, trebuie să adăugăm o corespondență $n + 1 \to x$, unde $x \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$. Obținem astfel m aplicații ale mulțimii $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ în $\{1, 2, \ldots, m\}$. Deoarece există $S_{n,m}$ aplicații $\{1, 2, 3, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$, obținem $S_{n+1,m} = m S_{n,m}$.

c) Scriind egalitatea $S_{k+1,m} = mS_{k,m}$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$, avem:

$$S_{2,m} = mS_{1,m}$$
$$S_{3,m} = mS_{2,m}$$
$$S_{4,m} = mS_{3,m}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{n,m} = mS_{n-1,m}.$$

Înmulțind membru cu membru aceste egalități obținem, după simplificări, $S_{n,m} = m^n$.

358. *1) Fie funcția* $f: R \to R$, $f(t) = at + b$.

Să se arate că oricare ar fi numerele reale x, y *este adevărată egalitatea:* $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$. (*)

2) Fie funcția $f: R \to R$, $f(t) = at^2 + bt + c$, $a \neq 0$, *iar* x, y *numere reale neegale.*

Să se arate că dacă $a > 0$, *atunci* $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$, *iar dacă* $a < 0$ *atunci* $f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Soluție.

1) Deoarece $f(t) = at + b$, avem:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a\frac{x+y}{2} + b = \frac{ax+ay+2b}{2},$$

$\frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{ax+b+ay+b}{2} = \frac{ax+ay+2b}{2}$ și deci egalitatea (*) este adevărată.

Proprietatea poate fi verificată pe graficul din figura 31.

2) Avem: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x+y}{2}\right) + c =$

$$= \frac{1}{4}(ax^2 + ay^2 + 2axy + 2bx + 2by + 4c),$$

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{1}{2}(ax^2 + ay^2 + bx + by + 2c),$$

Scanned with OKEN Scanner

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{f(x)+f(y)}{2} = -\frac{a}{4}(x-y)^2.$$

Dacă $a > 0$ atunci $-\frac{a}{4}(x-y)^2 < 0$ și deci $f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$ iar dacă $a < 0$, atunci $-\frac{a}{4}(x-y)^2 > 0$ și deci

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

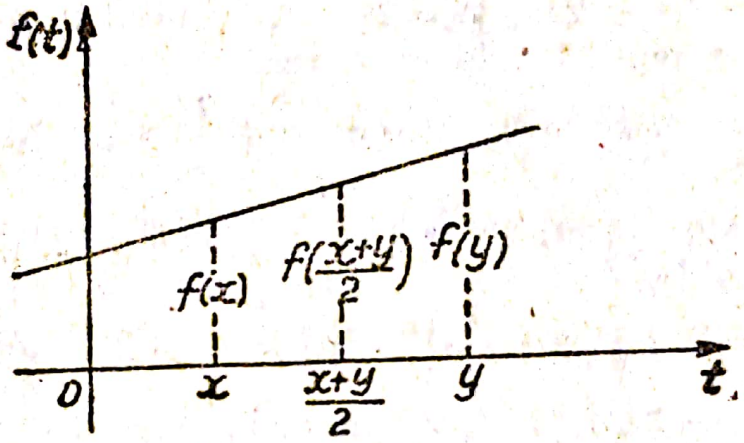


Fig. 31

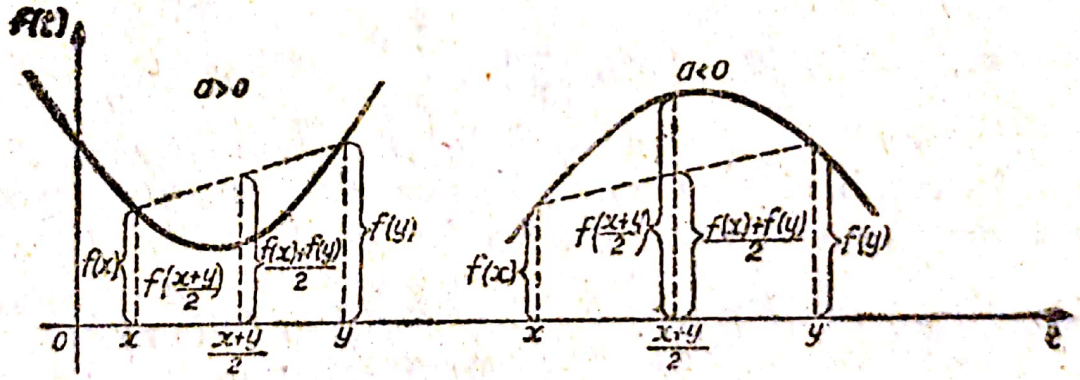


Fig. 32

Proprietatea poate fi verificată pe graficul din fig. 32.

359. *1) Fie funcția* $f: R \to R$ *astfel încît* $f(x-2) = x^2 - 5x + 6$ *oricare ar fi* x *real. Să se calculeze* $f(x)$.

2) *Fie funcția* $f: R \to R$. *Știind că* $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, *să se calculeze* $f(x)$.

3) *Dată fiind funcția* $f: R \to R$ *astfel încît* $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$ *oricare ar fi* $x \neq 0$, *să se arate că dacă* $|x| \geqslant 2$ *atunci* $f(x)=x^3-3x$.

Soluție.

1) Notînd $x-2=t$ avem $x=t+2$, $f(x-2)=f(t)=(t+2)^2-5(t+2)+6=t^2-t$, deci $f(t)=t^2-t$ sau $f(x)=x^2-x$ pentru oricare x real.

2) Dacă $x \in R-\{0\}$ atunci $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geqslant 2$. Notînd $x+\frac{1}{x}=t$, avem pentru $t \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$: $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=f(t)=t^2-2$, adică dacă $x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$ atunci $f(x)=x^2-2$.

3) Ca și la punctul precedent, notînd $x+\frac{1}{x}=t$, avem: $t \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=t^3$, $x^3+\frac{1}{x^3}=t^3-3t$, $f(t)=t^3-3t$ și deci dacă $|x| \geqslant 2$ atunci $f(x)=x^3-3x$. În condițiile din enunț se poate calcula $f(x)$ numai pentru $x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$.

360. *Fie* $x \in R$, $y \in R$ *coordonatele unui punct din plan în raport cu două axe perpendiculare.*

a) Să se determine mulțimea punctelor $M(x, y)$ *pentru care* $\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{xy}$ *este un număr real.*

b) Să se arate că relația $\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{xy}=1$, *unde* $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, *definește o funcție de argument* x.

c) Să se reprezinte grafic această funcție.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

a) $\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{xy}$ este un număr real dacă avem simultan:

$$\begin{cases}(1-x)(1-y)\geqslant 0,\\ xy\geqslant 0,\end{cases}$$

ceea ce este echivalent cu:

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

$$\text{sau}\begin{cases}x\leqslant 0\\ y\leqslant 0\end{cases}$$

$$\text{sau}\begin{cases}x\geqslant 1\\ y\geqslant 1.\end{cases}$$

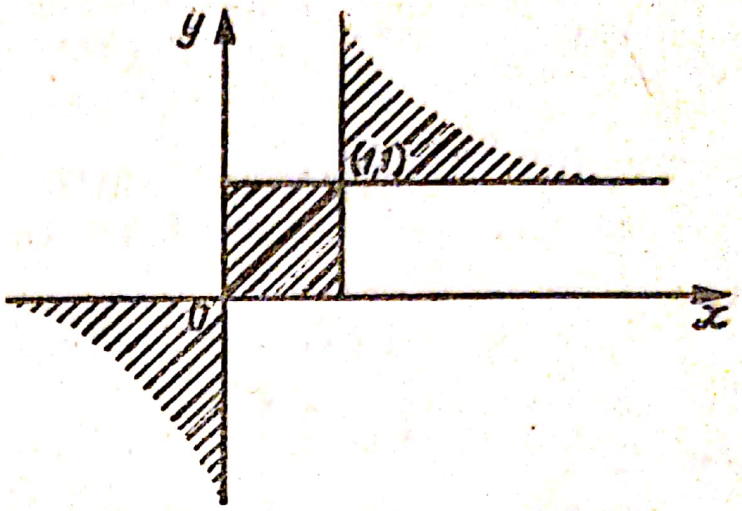


Fig. 33

Rezultă că mulțimea punctelor $M(x, y)$ pentru care $\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{xy}$ este un număr real, este porțiunea hașurată a planului (figura 33).

b) Avem:

$$\begin{cases}\sqrt{(1-x)(1-y)}+\sqrt{xy}=1,\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-x)(1-y)=(1-\sqrt{xy})^2\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2,\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y,\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant y\leqslant 1.\end{cases}$$

Relația dată definește deci o funcție de argument x, anume funcția identică a mulțimii $[0, 1]$.

c) Graficul funcției este segmentul de dreaptă cu extremitățile în punctele $(0, 0)$ $(1, 1)$ (fig. 33).

361. *Fie funcțiile*:

$f: \{-1, 1, 2, 3\} \to R$, $f(x) = x^6 - 5x^5 + 6x^4 - x^2 + 5x - 6$;
$g: \{-1, 1, 2, 3\} \to R$, $g(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$.
Să se verifice că $f = g$.

Soluție.

Funcțiile au același domeniu de definiție și iau valori în R. Să arătăm că $f(x) = g(x)$ oricare ar fi x în $\{-1, 1, 2, 3\}$.

Avem: $f(-1) = g(-1) = 0$; $f(1) = g(1) = 0$; $f(2) = g(2) = 0$, $f(3) = g(3) = 0$.

362. *Fie funcțiile:*

$$f: \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 2, 8, 13\},\ f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ dacă } x \in \{0, 1\} \\ 5x-2, \text{ dacă } x \in \{2, 3\} \end{cases},$$

$$g: \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 2, 8, 13\},\ g(x) = \begin{cases} x^2+1, \text{ dacă } x \in \{0, 1\}, \\ x^3+4, \text{ dacă } x \in \{2, 3\}. \end{cases}$$

Să se verifice că $f = g$.

Soluție.

Cele două funcții sînt definite pe aceeași mulțime $\{0, 1, 2, 3\}$ și iau valori în $\{1, 2, 8, 13\}$. Să arătăm că $f(x) = g(x)$ oricare ar fi $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Avem: $f(0) = g(0) = 1$; $f(1) = g(1) = 2$; $f(2) = g(2) = 8$; $f(3) = g(3) = 13$ și deci funcțiile sînt egale.

363. *Sînt egale funcțiile:*

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}},\ x \geqslant 1;$$

$$g(x) = \begin{cases} 2, 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2\sqrt{x-1},\ x > 2 ? \end{cases}$$

Soluție.

Funcțiile sînt egale. Într-adevăr, avem:

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1 + \sqrt{x-1})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{x-1})^2} = |1 + \sqrt{x-1}| + |1 - \sqrt{x-1}| = 1 + \sqrt{x-1} + |1 - \sqrt{x-1}|;$$

dacă $1 \leqslant x \leqslant 2$, atunci $1 - \sqrt{x-1} \geqslant 0$, $|1 - \sqrt{x-1}| = 1 - \sqrt{x-1}$ și $f(x) = 2$; dacă $x > 2$, atunci $1 - \sqrt{x-1} < 0$, $|1 - \sqrt{x-1}| = \sqrt{x-1} - 1$ și $f(x) = 2\sqrt{x-1}$.

Funcțiile date sînt deci egale.

Scanned with OKEN Scanner

364. *Se dau funcțiile:*

$$f:[0,4]\to R,\ f(x)=\max_{0<t<x}(4t-t^2)$$

$$g:[0,4]\to R,\ g(x)=\begin{cases}4x-x^2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 4, & 2<x\leqslant 4.\end{cases}$$

a) Să se calculeze: $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$.
b) Sînt egale funcțiile f, g?
c) Să se reprezinte grafic funcția f, într-un sistem de referință xOy rectangular.

Soluție.

a) Avem: $f(0)=\max\limits_{0<t<0}(4t-t^2)=\max\limits_{t=0}(4t-t^2)=0$

$f(1)=\max\limits_{0<t<0}(4t-t^2)$ și deoarece $h(t)=4t-t^2$ este strict crescătoare pe $[0, 1]$ valoarea cea mai mare a funcției h pe acest interval este $h(1)=3$ și deci $f(1)=3$;

$f(3)=\max\limits_{0<t<3}(4t-t^2)$ și deoarece $h(t)\leqslant h(2)=4$, pentru $0\leqslant t\leqslant 3$ (figura 34), rezultă $f(3)=4$.

De asemenea avem: $g(0)=0$, $g(1)=3$, $g(3)=4$.

b) Funcțiile f și g sînt egale. Într-adevăr, ele au același domeniu de definiție, $[0, 4]$ și amîndouă iau valori în R. Trebuie să mai arătăm că $f(x)=g(x)$ oricare ar fi $x\in[0,4]$. Deoarece $h(t)=4t-t^2$ este strict crescătoare pe $[0, 2]$, avem oricare ar fi $x\in[0,2]$.

$$\max_{0<t<x}(4t-t^2)=4x-x^2,$$

adică $f(x)=4x-x^2$,

dacă $0\leqslant x\leqslant 2$.

Deoarece $h(t)=4t-t^2$ are valoarea maximă 4, obținută pentru $t=2$, avem oricare ar fi $x\in(2,4]$.

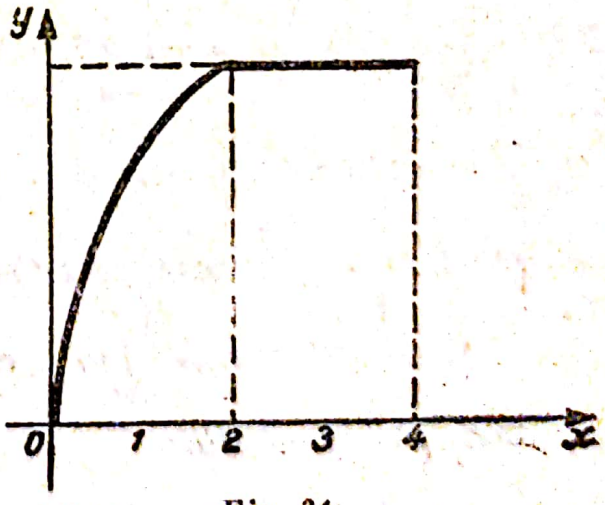


Fig. 34

$\max_{0<t<x} (4t - t^2) = 4$, adică $f(x) = 4$, dacă $2 < x \leqslant 4$.

În concluzie, $f(x) = g(x)$ oricare ar fi $x \in [0, 4]$, funcțiile f, g sînt egale.

c) Graficul funcției f este cel din figura 34.

365. *Fie funcțiile:*

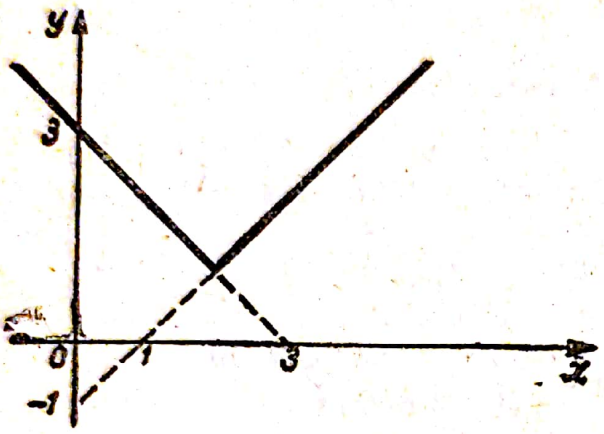


Fig. 35

$$f(t) = \begin{cases} 3 - t, & \text{dacă } t \leqslant 2 \\ t - 1, & \text{dacă } t > 2; \end{cases}$$

$$g(x) = max\ (x - 1,\ 3 - x),\quad x \in R,$$

(max (x, y) = cel mai mare dintre numerele x, y dacă $x \neq y$; max (x, x) = x).

1) Să se arate că funcțiile f și g sînt egale.

2) Să se reprezinte grafic funcția f.

Soluție.

1) Funcțiile sînt definite pe R și au valori în R. Să arătăm că $f(x) = g(x)$ oricare ar fi x real.

Avem: $x - 1 \leqslant 3 - x \Leftrightarrow x \leqslant 2$, deci $\max (x - 1, 3 - x) = 3 - x$, dacă $x \leqslant 2$;

$x - 1 > 3 - x \Leftrightarrow x > 2$, deci $\max (x - 1, 3 - x) = x - 1$, dacă $x > 2$,

adică: $\max (x - 1, 3 - x) = \begin{cases} 3 - x, & \text{dacă } x \leqslant 2, \\ x - 1, & \text{dacă } x > 2, \end{cases}$

și deci $f(x) = g(x)$ oricare ar fi $x \in R$, funcțiile f, g sînt deci egale.

2) Graficul funcției f este cel din figura 35.

366. *Fie funcțiile:*

$$f: [0,\ 2\pi] \to R,\ f(x) = arcsin\ (sin\ x),$$

Scanned with OKEN Scanner

$$g:[0,2\pi]\to R,\ g(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ \pi-x, \text{ dacă } \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2},\\ x-2\pi, \text{ dacă } \dfrac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi. \end{cases}$$

1) Să se demonstreze că $f=g$.
2) Să se reprezinte grafic funcția f.

Soluție.

1) Deoarece pentru $\dfrac{-\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ avem $\arcsin(\sin x)=x$, rezultă că dacă $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, atunci $f(x)=x$ adică $f(x)=g(x)$.

Avem:

$$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\frac{-3\pi}{2}<-x<-\frac{\pi}{2}\Rightarrow\pi-\frac{3\pi}{2}<\pi-x<\pi-\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<\pi-x<\frac{\pi}{2}$$

și deci în acest caz $f(x)=\arcsin(\sin x)=\arcsin[\sin(\pi-x)]=\pi-x=g(x)$.

În sfîrșit, dacă $\dfrac{3\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2\pi$, atunci $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x-2\pi\leqslant 0$ și deci $f(x)=\arcsin(\sin x)=\arcsin[\sin(x-2\pi)]=x-2\pi=g(x)$.

Deoarece funcțiile f și g au același domeniu de definiție, $[0,2\pi]$, iau valori în R și $f(x)=g(x)$ oricare ar fi $x\in[0,2\pi]$, funcțiile sînt egale.

2) Graficul funcției este cel din figura 36.

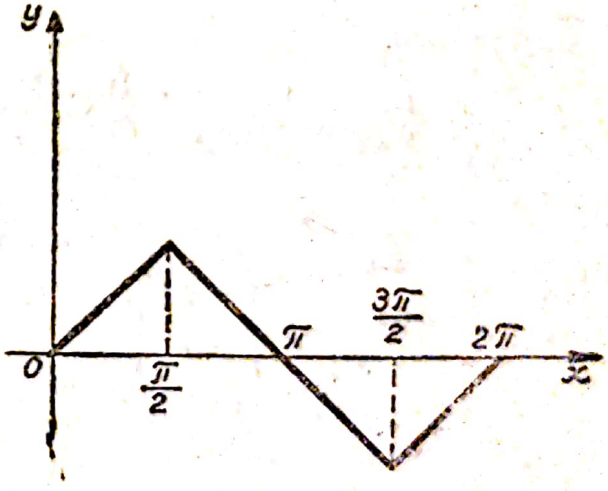


Fig. 36

367. *Fie* $f: \{1, 2, 3\} \to R$ *o funcție pentru care* $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 5$. *Să se construiască o prelungire* $g: R \to R$ *a funcției* f, *de forma* $g(x) = ax^2 + bx + c$.

Soluție.

Pentru $x \in \{1, 2, 3\}$ trebuie să avem $f(x) = g(x)$ și deci:

$$\begin{aligned} g(1) &= a + b + c = 1, \\ g(2) &= 4a + 2b + c = 2, \\ g(3) &= 9a + 3b + c = 5, \end{aligned}$$

de unde rezultă $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$.

O prelungire a lui f este deci $g: R \to R$, $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

368. *Fie* $f: \{1, 2\} \to R$ *o funcție pentru care* $f(1) = 2$ *și* $f(2) = 4$. *Să se construiască o prelungire* $g: R \to R$ *a funcției* f *de forma* $g(x) = ax + b$.

Soluție.

Deoarece pentru $x \in \{1, 2\}$ trebuie să avem $f(x) = g(x)$, rezultă $f(1) = g(1)$, adică $a + b = 2$ și $f(2) = g(2)$, adică $2a + b = 4$.

Din $a + b = 2$ și $2a + b = 4$ rezultă $a = 2$, $b = 0$ și deci o prelungire a lui f la R este $g: R \to R$, $g(x) = 2x$.

369. *Fie* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ *și* $F = \{a, b, c\}$. *Să se facă diagramele corespunzătoare la două funcții surjective definite pe* E *cu valori în* F *și la două funcții definite pe* E *cu valori în* F *nesurjective.*

Răspuns.

Diagramele a două funcții surjective definite pe E cu valori în F sînt (fig. 37):

Fig. 37

Diagramele a două funcții nesurjective definite pe E cu valori în F sînt (fig. 38):

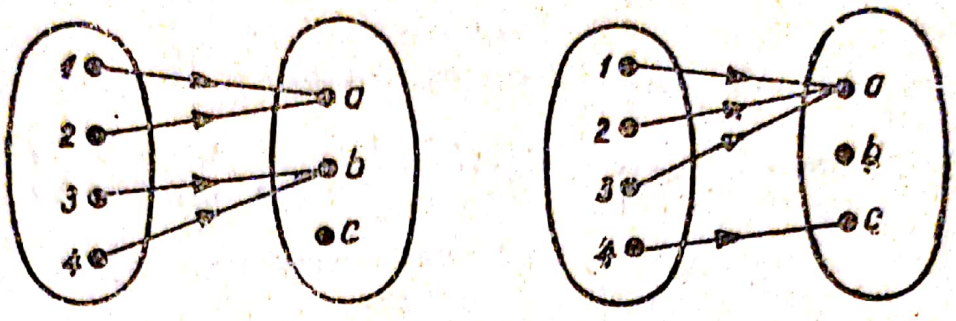


Fig. 38

370. *a) Să se facă diagrama funcțiilor injective definite pe* $\{1, 2\}$ *cu valori în* $\{a, b, c\}$.

b) Să se facă diagrama unei funcții definită pe $\{1, 2, 3\}$ *cu valori în* $\{a, b, c\}$ *neinjectivă.*

Răspuns.

a) Există șase funcții injective definite pe $\{1, 2\}$ cu valori în $\{a, b, c\}$. Diagramele lor sînt următoarele (fig. 39):

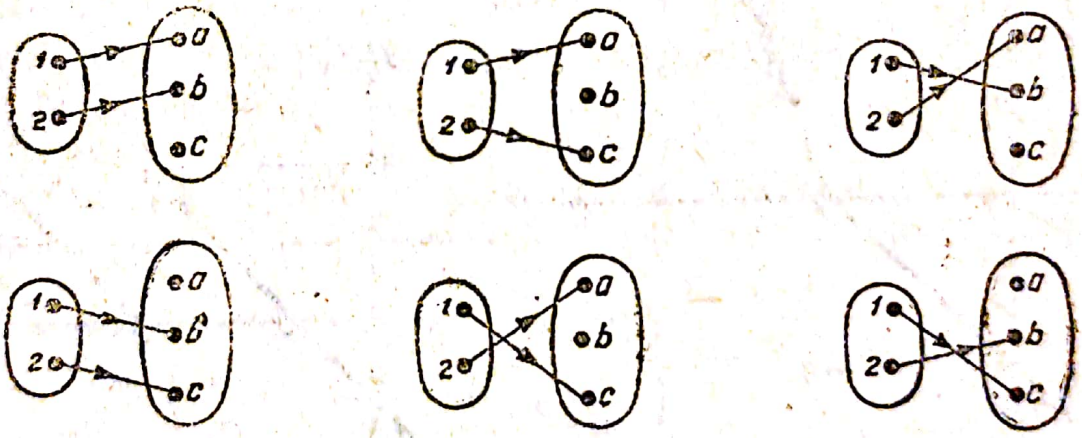


Fig. 39

b) Diagrama unei funcții neinjective definite pe $\{1, 2, 3\}$ cu valori în $\{a, b, c\}$ este (fig. 40):

371. *a) Să se arate, utilizîndu-se graficul, că funcția* $f: R \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ dacă } x \in (-\infty, 2) \\ 3x - 6, \text{ dacă } x \in [2, +\infty), \end{cases}$$

este injectivă.

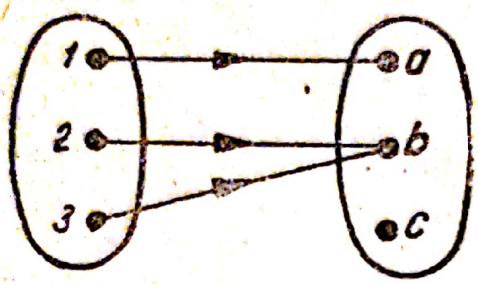


Fig. 40

b) Să se arate, folosindu-se graficul, că funcția $g : R \to R$,

$$g(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ dacă } x \in (-\infty, 3), \\ x - 3, \text{ dacă } x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

nu este injectivă.

Soluție.

a) Pe graficul funcției, în figura 41, se observă că oricare paralelă la axa absciselor taie graficul în cel mult un punct. astfel că funcția f este injectivă.

b) Pe graficul funcției, în figura 42, se observă că există paralele la axa absciselor care taie graficul în două puncte, de exemplu paralela la Ox care trece prin punctul (0, 1) astfel că funcția nu este injectivă.

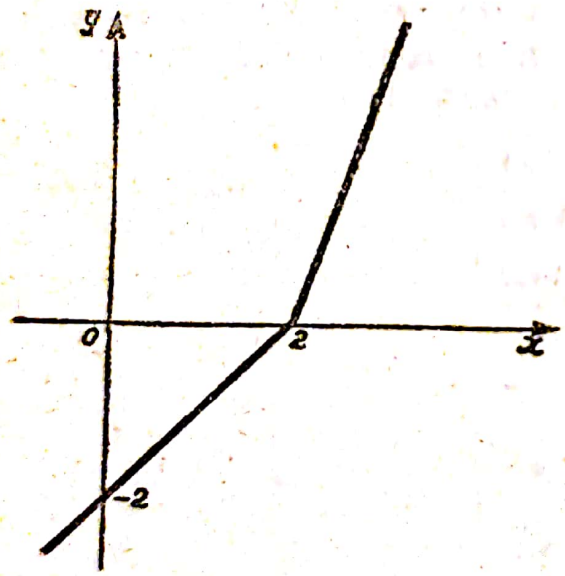


Fig. 41

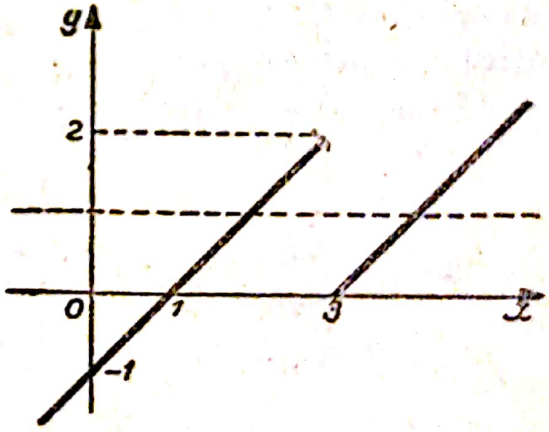


Fig. 42

372. Să se precizeze două restricții injective ale funcției $f : R \to R$ *de forma* $f(x) = x^2 - 4$.

Răspuns.

Următoarele restricții ale lui f sînt injective :

$$f_1 : (-\infty, 0] \to R, f_1(x) = x^2 - 4;$$
$$f_2 : (2, +\infty) \to R, f_2(x) = x^2 - 4.$$

373. *Se știe că o funcție strict crescătoare pe tot domeniul de definiție este injectivă. Reciproca este adevărată ? Pentru răspuns se va cerceta cazul funcției* $f : (0, +\infty) \to (-\infty, 1)$, *pentru care*

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{dacă } x \in [1, +\infty), \\ x, & \text{dacă } x \in (0, 1). \end{cases}$$

(Se recomandă reprezentarea grafică).

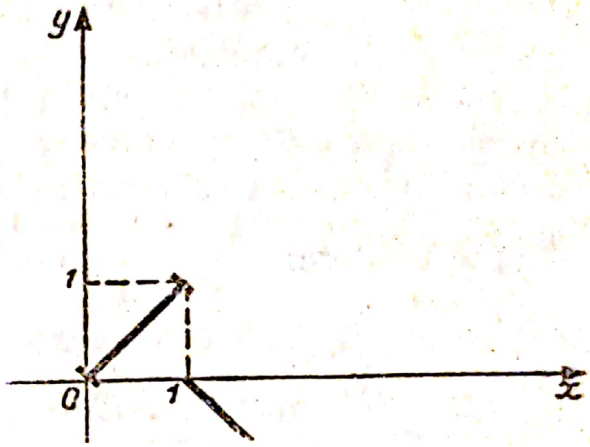


Fig. 43

Soluție.

Reciproca nu este adevărată. Funcția f este injectivă dar nu este strict crescătoare. Într-adevăr, pe graficul funcției din figura 43 se constată că oricare paralelă la axa absciselor taie graficul în cel mult un punct, deci funcția este injectivă. Tot pe grafic se observă că funcția nu este strict monotonă.

374. *Să se facă diagramele aplicațiilor bijective definite pe* $\{1, 2, 3\}$ *cu valori în* $\{a, b, c\}$.

Răspuns.

Există șase aplicații bijective ale mulțimii $\{1, 2, 3\}$ în mulțimea $\{a, b, c\}$. Diagramele lor sînt următoarele (fig. 44) :

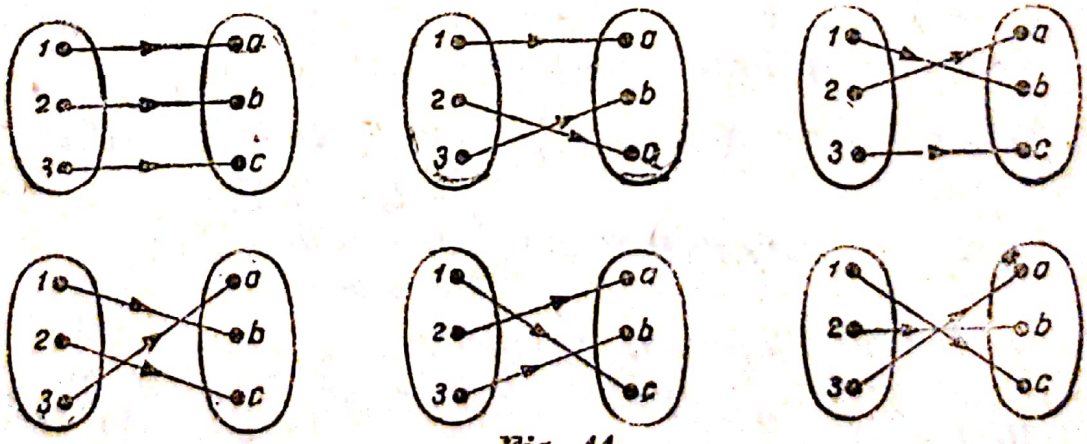


Fig. 44

375. *Să se verifice că funcția* $f: R - \{1\} \to R - \{0\}$,

$$f(x) = \frac{1}{x-1}, \text{ este bijectivă.}$$

Soluție.

Să arătăm mai întîi că funcția este injectivă. Pentru aceasta fie $a \neq 1$, $b \neq 1$. Avem:

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{1}{a-1} = \frac{1}{b-1} \Rightarrow a - 1 = b - 1 \Rightarrow a = b,$$ deci funcția este injectivă.

Să arătăm că ea este și surjectivă. Pentru aceasta va fi suficient să arătăm că oricare număr real $a \neq 0$ este valoare a funcției, adică să arătăm că există $x \in R - \{1\}$ astfel ca $f(x) = a$. Avem: $\frac{1}{x-1} = a$, de unde $x = \frac{a+1}{a} \neq 1$.

Fiind injectivă și surjectivă funcția f este bijectivă.

376. *Fie mulțimea* $E = \{0, 1\}$ *și funcția* $f: R \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & \text{dacă } x \in E, \\ x + 3, & \text{dacă } x \in R - E. \end{cases}$$

Să se verifice că f *este bijectivă.*

Soluție.

Funcția $g: R \to R$, $g(x) = x + 3$ este bijectivă. Să arătăm că $f = g$. Într-adevăr, funcțiile au același domeniu de definiție, R; iau valori în aceeași mulțime, anume R; pentru $x \neq 0$ și $x \neq 1$ avem $f(x) = g(x)$; $f(0) = g(0) = 3$; $f(1) = g(1) = 4$, adică oricare ar fi $x \in R$ avem $f(x) = g(x)$ și deci funcțiile sînt egale. Rezultă că funcția f este bijectivă.

377. *Fie funcția* $f: R \to \{-1, 0, 1\}$ *definită astfel*;

$$f(x) = sign\ x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

a) Este această funcție bijectivă ?

b) Să se demonstreze că oricare ar fi $x \in R$ *avem* $x \cdot sign\ x = |x|$.

c) Să se demonstreze că oricare ar fi numerele reale, u, v este adevărată egalitatea: $f(uv) = f(u) \cdot f(v)$.

d) Să se reprezinte grafic funcția f.

Soluție.

a) Funcția este surjectivă dar nu este injectivă și deci nici bijectivă.

b) Dacă $x < 0$, atunci sign $x = -1$, $x \cdot \text{sign } x = -x$;
dacă $x = 0$, atunci sign $x = 0$, $x \cdot \text{sign } x = 0$;
dacă $x > 0$, atunci sign $x = 1$, $x \cdot \text{sign } x = x$ și deci

$$x \cdot \text{sign } x = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} \text{ adică } x \cdot \text{sign } x = |x|, \ x \in R.$$

c) Fie $uv > 0$. Dacă $u > 0$, $v > 0$, atunci $f(u) = 1$, $f(v) = 1$, $f(u) \cdot f(v) = 1$.

Dacă $u < 0$, $v < 0$, atunci $f(u) = -1$, $f(v) = -1$, $f(u) \cdot f(v) = 1$ și cum $f(uv) = 1$, rezultă că în ambele cazuri avem $f(uv) = f(u) \cdot f(v)$.

Egalitatea precedentă este adevărată și în cazul $uv < 0$, deoarece $f(u) \cdot f(v) = -1$, $f(uv) = -1$.

Dacă $uv = 0$, atunci cel puțin unul din numerele u, v este nul, încît $f(u) \cdot f(v) = 0$, $f(uv) = 0$ și deci $f(uv) = f(u) f(v)$.

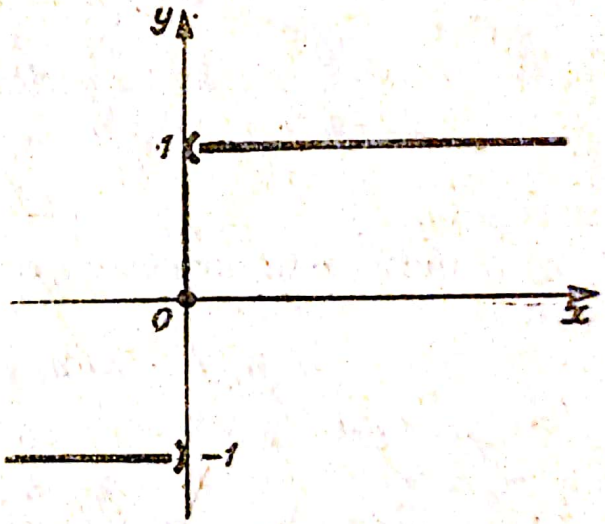


Fig. 45

d) Graficul funcției f este cel din figura 45.

378. *Fie funcția* $f: R - \{2\} \to R, f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

Este această funcție surjectivă ? Dar injectivă ? Dar bijectivă ?

Soluție.

O funcție $f: E \to F$ este surjectivă dacă ecuația cu necunoscuta x, $f(x) = y$, are cel puțin o soluție în E, oricare ar fi

Scanned with OKEN Scanner

y din F. În cazul funcției date, ecuația $\frac{x+1}{x-2} = y$ nu are soluții în $R - \{2\}$ oricare ar fi y real. Într-adevăr, ecuația se scrie $x(y-1) = 2y+1$ și pentru $y = 1$ nu are soluții. Funcția din enunț nu este deci surjectivă.

Fie $x_1 \in R - \{2\}$, $x_2 \in R - \{2\}$ și să arătăm că este adevărată implicația $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, de unde va rezulta că funcția este injectivă. Avem:

$$\frac{x_1+1}{x_1-2} = \frac{x_2+1}{x_2-2} \Rightarrow 3x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Deoarece nu este surjectivă, funcția dată nu este bijectivă.

379. *Fie mulțimile* $E = \{0, 1, 5, 6\}$, $F = \{0, 3, 8, 15\}$ *și funcția* $f: E \to F$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

a) Este această funcție surjectivă ? Dar injectivă ? Dar bijectivă ?

b) Să se răspundă la aceleași întrebări în cazul funcției

$$f: [0, -\infty) \to R, \quad f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Soluție.

a) Funcția este surjectivă, deoarece $f(E) = F$. Într-adevăr, avem:

$$f(0) = 3,\ f(1) = 0,\ f(5) = 8,\ f(6) = 15.$$

Funcția este și injectivă căci oricare ar fi numerele x_1, x_2 din E, $x_1 \neq x_2$, avem $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Fiind surjectivă și injectivă, funcția este bijectivă.

b) Dacă funcția ar fi surjectivă ar trebui ca ecuația cu necunoscuta x, $f(x) = y$, să aibă cel puțin o soluție în $[0, +\infty)$ oricare ar fi y în R.

Există însă numere reale y pentru care ecuația nu are soluții în $[0, +\infty)$ și deci funcția nu este surjectivă. Într-adevăr, pentru $y = -2$ ecuația $f(x) = y$ devine $x^2 - 4x + 5 = 0$, ecuație care nu are soluții reale.

Dacă funcția ar fi injectivă, ar trebui ca ecuația cu necunoscuta x, $f(x) = y$ să aibă cel mult o soluție în $[0, +\infty)$, oricare ar fi y real. Dar pentru $y = 0$ ecuația $f(x) = y$ devine

Scanned with OKEN Scanner

$x^2 - 4x + 3 = 0$, ecuație care are două soluții în $[0, +\infty)$ anume, 1 și 3. Funcția nu este deci injectivă. Ea nu este nici bijectivă.

380. *Fie funcția* $f: R \to R, f(x) = [x]$ *(partea întreagă a numărului* x*) definită astfel: dacă* $x = k + r$, k *fiind întreg și* $0 \leqslant r < 1$, *atunci* $[x] = k$.

1) Este această funcție injectivă ?

2) Să se demonstreze că oricare ar fi x *real, este adevărată egalitatea:* $[2x] - [x] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$.

3) Să se reprezinte grafic funcția dată.

Soluție.

1) Funcția nu este injectivă căci există numerele reale x_1, x_2, $x_1 \neq x_2$ astfel ca $f(x_1) = f(x_2)$. Într-adevăr, pentru $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ avem $[1] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$.

2) Fie $x = k + r$, k întreg, $0 \leqslant r < 1$. Considerăm mai întîi cazul $0 \leqslant r < \frac{1}{2}$ Avem :

$$[2x] = [2(k + r)] = [2k + 2r] = 2k, \qquad [x] = [k + r] = k,$$

$$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[k + r + \frac{1}{2}\right] = k,$$

de unde rezultă $[2x] - [x] = 2k - k = k = \left[x + \frac{1}{2}\right]$.

Dacă $\frac{1}{2} \leqslant r < 1$, atunci:

$$[2x] = [2(k + r)] = [2k + 2r] = 2k + 1,$$
$$[x] = [k + r] = [k],$$

$\left[x + \frac{1}{2}\right] = \left[k + r + \frac{1}{2}\right] = k + 1$ și deci $[2x] - [x] = 2k +$

$$+ 1 - k = k + 1 = \left[x + \frac{1}{2}\right].$$

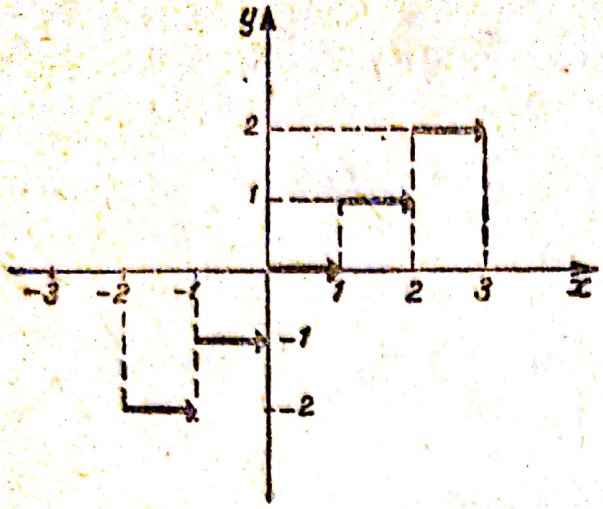


Fig. 46

3) Graficul funcției date este cel din figura 46.

381. *Fie* Δ *mulțimea dreptelor dintr-un plan în care se dă punctul* A.

Se consideră corespondența care face ca fiecărei drepte din Δ *să-i corespundă perpendiculara din* A *pe* d.

Este această corespondență o aplicație a lui Δ *în* Δ ?

În caz afirmativ, este această aplicație injectivă ?

Soluție.

Corespondența este o funcție, căci pe oricare dreaptă d din Δ se poate duce o perpendiculară din A și numai una.

Aplicația nu este injectivă, deoarece dreptelor paralele din Δ *le corespunde aceeași perpendiculară din* A.

382. *Fie mulțimile:*

$$E = \{u | u = 2n - 1,\ n \in N^*\},$$
$$F = \{v | v = 3n + 2,\ n \in N^*\}.$$

1) Să se scrie două aplicații bijective definite pe E *cu valori în* F.

2) Să se scrie o funcție $f : E \to F$ *care să fie injectivă și să nu fie surjectivă.*

3) Să se scrie o funcție $g : E \to F$ *care să fie surjectivă și să nu fie injectivă.*

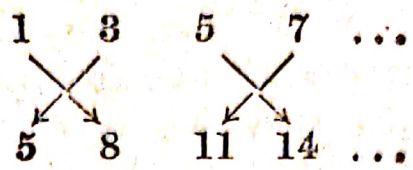
Soluție.

1) Corespondența $2n - 1 \to 3n + 2$ este o aplicație bijectivă $f : E \to F$.

Avem: $f(2n - 1) = 3n + 2$ sau notînd $2n - 1 = x$, $f(x) = 3 \cdot \frac{x+1}{2} + 2$, $f(x) = \frac{3x+7}{2}$. Deoarece $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, f este injectivă.

Ea este surjectivă, deoarece $\frac{3x+7}{2} = 3n+2 \Rightarrow x = 2n-1$.

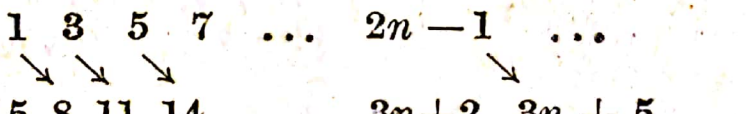
O altă aplicație bijectivă $f: E \to F$ poate fi definită astfel:



adică

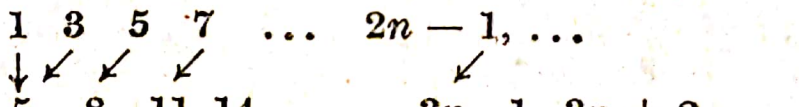
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3x+13), & \text{dacă } x = 4n-3,\ n \in N^*, \\ \frac{1}{2}(3x+1), & \text{dacă } x = 4n-1,\ n \in N^* \end{cases}$$

2) Aplicația definită astfel:



adică $f: E \to F$, $f(x) = \frac{1}{2}(3x+13)$, este injectivă, dar nu este surjectivă (5 nu este valoare a funcției).

3) Aplicația definită astfel:



adică $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3x+1), & \text{dacă } x = 2n+1,\ n \in N^*, \\ 5, & \text{dacă } x = 1, \end{cases}$

este surjectivă, dar nu este injectivă.

383. *Care dintre funcțiile următoare sînt injective și care nu sînt injective?*

a) $f(x) = max\ (x+1,\ 2-3x),\ x \in R$;
b) $f(x) = min\ (-x, x),\ x \in R$;
c) $f(x) = max\ (x+1,\ 2x-1),\ x \in R$;
d) $f(x) = min\ (-2x,\ -x+1),\ x \in R$;

(max (x, y) = cel mai mare dintre numerele x, y dacă x ≠ y; max (x, x) = x; min (x, y) = cel mai mic dintre numerele x, y, dacă x ≠ y; min (x, x) = x).

Soluție.

Funcția de la punctul **a)** nu este injectivă, deoarece există numerele reale x_1, x_2 astfel ca $x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$. Într-adevăr, avem: $f(0) = \max(1, 2) = 2$; $f(1) = \max(2, -1) = 2$, deci $f(0) = f(1)$.

Nici funcția de la punctul *b)* nu este injectivă, deoarece $f(-1) = \min(1, -1) = -1$, $f(1) = \min(-1, 1) = -1$, și deci $f(-1) = f(1)$.

Funcția de la punctul **c)** este injectivă. Într-adevăr, avem:

$$\max(x + 1,\ 2x - 1) = \begin{cases} x + 1, \text{ dacă } x \leqslant 2, \\ 2x - 1, \text{ dacă } x > 2. \end{cases}$$

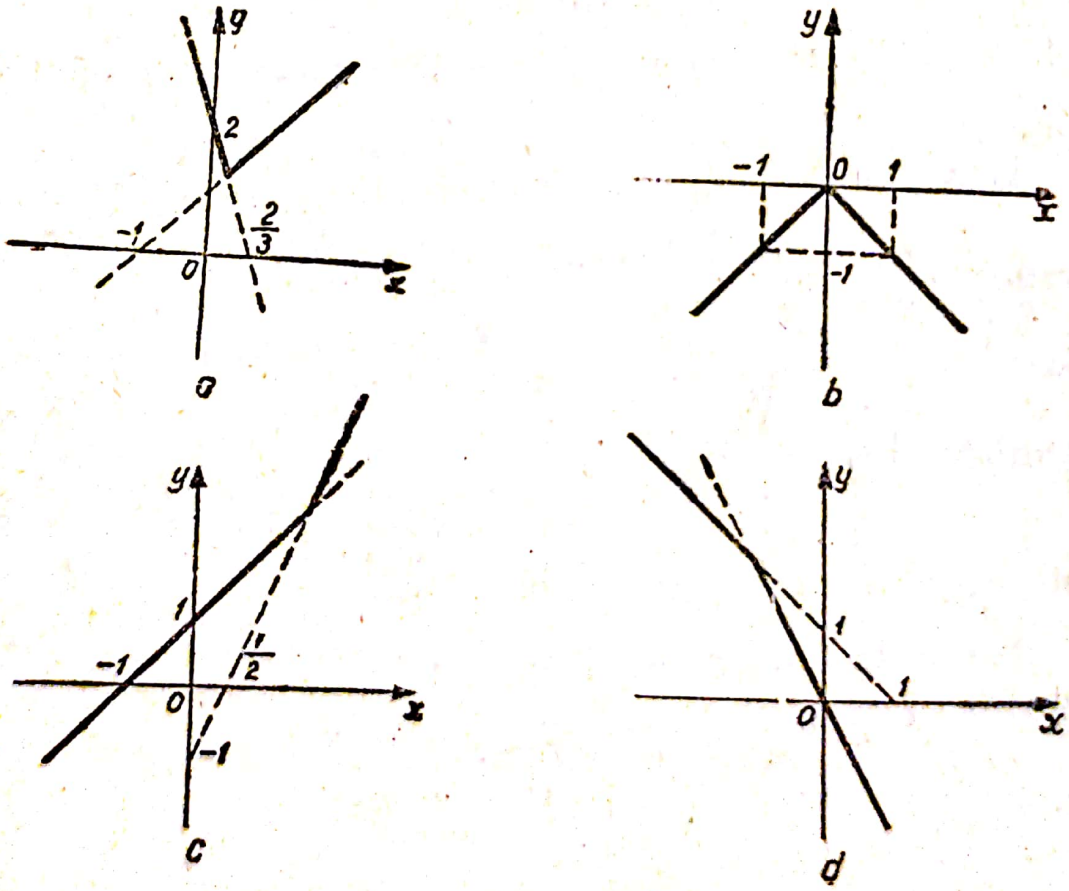


Fig. 47

Scanned with OKEN Scanner

Implicația $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ este adevărată cînd $x_1 \leqslant 2$ și $x_2 \leqslant 2$; de asemenea ea este adevărată și în cazul $x_1 > 2$, $x_2 > 2$. Dacă $x_1 \leqslant 2$ și $x_2 > 2$, atunci $x_1 + 1 \leqslant 3$ și $2x_2 - 1 > 3$, adică $f(x_1) \neq f(x_2)$ și deci funcția este injectivă.

În mod asemănător se arată că și funcția de la punctul d) este injectivă. Aceste proprietăți se pot verifica și pe graficul din figura 47.

384. *Fie funcția* $f: E \to [-4, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 6x + 5$, *E fiind o mulțime de numere reale astfel că ecuația cu două necunoscute* $x + y = 6$ *nu are soluții în* $E \times E$.

Este această funcție surjectivă ? Dar injectivă ? Dar bijectivă ?

Soluție.

În $[-4, +\infty)$ există numere care nu sînt valori ale funcției și deci funcția nu este surjectivă. Într-adevăr, funcția nu ia valoarea -4, căci ecuația $x^2 - 6x + 5 = -4$ are soluția $x = 3$ și $3 \notin E$ (dacă 3 ar aparține lui E atunci $x + y = 6$ ar avea soluția $x = 3$, $y = 3$ în $E \times E$).

Funcția dată este injectivă. Într-adevăr, fie $\alpha \in E$, $\beta \in E$ și $\alpha \neq \beta$.

Avem: $f(\alpha) = f(\beta) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - \varepsilon)$ și deoarece $\alpha - \beta \neq 0$, $\alpha + \beta - 6 \neq 0$, rezultă $f(\alpha) \neq f(\beta)$, deci f este injectivă.

Deoarece nu este surjectivă, funcția nu este nici bijectivă.

385. *Fie funcția* $f: E \to R$ *avînd proprietățile:*

1) f *nu este constantă pe* E.

2) Dacă A *și* B *sînt părți ale lui* E, *astfel ca* $A \cap B \neq \emptyset$ *și există* $x' \in A$ *și* $x'' \in B$ *astfel ca* $f(x') = f(x'')$, *atunci există* $x \in A \cap B$ *astfel ca* $f(x) = f(x')$.

Să se arate că în aceste condiții funcția f *este injectivă.*

Soluție.

Dacă E are numai două elemente, $E = \{a, b\}$, atunci nefiind constantă pe E avem $f(a) \neq f(b)$ și deci f este injectivă.

Să presupunem că E are cel puțin trei elemente și să demonstrăm proprietatea din enunț, prin reducerea la absurd. Dacă f n-ar fi injectivă, ar exista x_1 și x_2 în E astfel

Scanned with OKEN Scanner

ca $x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$. Dacă x este un element arbitrar din E, diferit de x_1 și x_2, atunci pentru mulțimile $A = \{x_1, x\}$, $B = \{x_2, x\}$ avem ținînd seama de condiția 2) din enunț:

$A \cap B = \{x\}$, $f(x) = f(x_1)$, adică funcția este constantă pe E, ceea ce este în contradicție cu condiția 1) din enunț și deci f este injectivă.

386. *Fie funcția numerică* $f: E \to F$ *și propozițiile:*

1) Oricare ar fi numărul a *din* $f(E)$ *există* $x \in E$ *astfel ca* $f(x) \neq a$.

2) Există $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$ *astfel ca* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Există funcții pentru care numai una dintre cele două propoziții să fie adevărată?

Soluție.

Cele două propoziții sînt echivalente, deci răspunsul la întrebarea din enunț este negativ. Într-adevăr, să presupunem că propoziția 1) este adevărată și să arătăm că și propoziția 2) este adevărată.

$f(E)$ are cel puțin două elemente, căci dacă $f(x_1)$ este o valoare a funcției, atunci luînd în 1) $a = f(x_1)$, rezultă că există $x_2 \in E$, $x_2 \neq x_1$ astfel ca $f(x_2) \neq f(x_1)$; propoziția 2) este adevărată.

Reciproc, dacă funcția f are cel puțin două valori distincte, $f(x_1) \neq f(x_2)$, atunci:
dacă $a = f(x_1)$, există un număr în E, anume x_2 astfel ca $f(x_2) \neq a$; dacă $a = f(x_2)$ atunci pentru $x = x_1$ avem $f(x_1) \neq f(x_2)$, deci $f(x_1) \neq a$;
dacă $a \neq f(x_1)$ și $a \neq f(x_2)$, atunci $f(x) \neq a$ este adevărată și pentru $x = x_1$ și pentru $x = x_2$, adică propoziția 1) este adevărată.

Cele două propoziții caracterizează funcțiile f care nu sînt constante pe E.

387. *Fie* E *o mulțime finită și funcția* $f: E \to E$.

Să se demonstreze că au loc echivalențele următoare:

a) (f *este surjectivă*) $\Leftrightarrow$ (f *este injectivă*).

b) (f *este injectivă*) $\Leftrightarrow$ (f *este bijectivă*).

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

a) Fie $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ și să presupunem că f este surjectivă, adică $f(E) = E$. Deoarece E are n elemente, $f(E)$ are tot n elemente.

Să arătăm că f este injectivă. Dacă n-ar fi, atunci ar exista a_i și a_j în E, $a_i \neq a_j$ și $f(a_i) = f(a_j)$; în acest caz $f(E)$ ar avea cel mult $n - 1$ elemente, în contradicție cu faptul că $f(E)$ are n elemente și deci f este injectivă.

Reciproc, presupunem că f este injectivă și să arătăm că este surjectivă. Dacă n-ar fi surjectivă atunci ar exista $a_k \in E$ care nu ar fi valoare a funcției, deci $a_k \neq f(a_1), \ldots, a_k \neq f(a_n)$, $f(E) \neq E$, $f(E) \subset E$, ceea ce este în contradicție cu faptul că E și $f(E)$ au același număr de elemente. Rezultă că f este surjectivă și deci prima echivalență din enunț este demonstrată.

b) Să presupunem că f este injectivă. Ținînd seama de echivalența de la punctul a) rezultă că f este surjectivă, deci este bijectivă. Cum o funcție bijectivă este și injectivă, rezultă că echivalența a doua a enunțului este stabilită.

388. *Fie funcțiile:*

$$f: [4, +\infty) \to R, f(x) = x^2 - 6x + 5,$$

$$g: R \to R, g(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

Să se determine mulțimile valorilor acestor funcții. Sînt funcțiile date surjective?

Soluție.

Fie F mulțimea valorilor lui f și $y_0 \in F$. Dacă y_0 este o valoare a funcției, atunci există $x \geqslant 4$ astfel ca $f(x) = y_0$, adică ecuația cu necunoscuta x, $x^2 - 6x + 5 - y_0 = 0$ are soluții reale în $[4, +\infty)$.

Rezultă $\Delta = 36 - 4(5 - y_0) \geqslant 0$, $y_0 \geqslant -4$, $x = 3 \pm \sqrt{y_0 + 4}$.

Din $x \geqslant 4$ și $x = 3 \pm \sqrt{y_0 + 4}$ rezultă $x = 3 + \sqrt{y_0 + 4}$ și $y_0 \geqslant -3$.

Scanned with OKEN Scanner

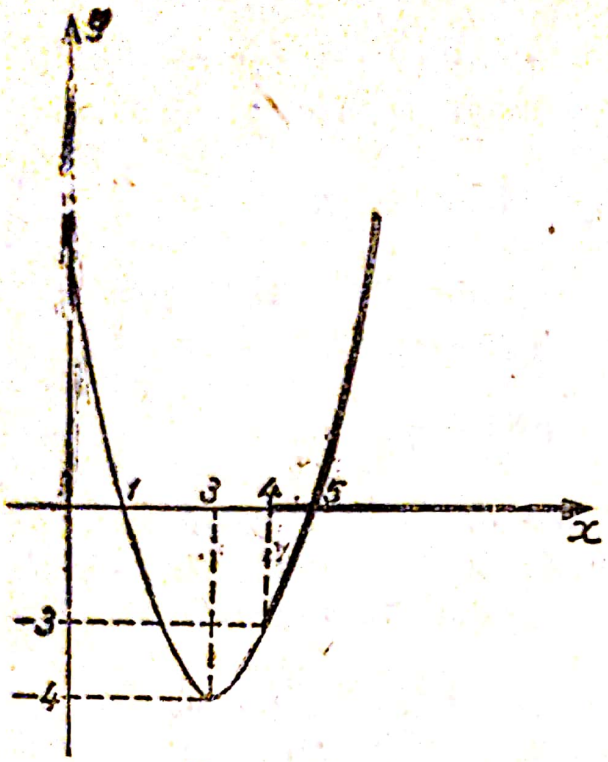


Fig. 48

Am arătat astfel că $y_0 \in F \Rightarrow y_0 \geq -3$, adică $F \subset [-3, +\infty)$.

Este adevărată și incluziunea inversă. Într-adevăr, fie $y_0 \in [-3, +\infty)$ și să arătăm că y_0 este valoare a funcției f, adică există $x \geq 4$, astfel ca $f(x) = y_0$. Din $x^2 - 6x + 5 = y_0$ și $y_0 \geq -3$ rezultă $x = 3 + \sqrt{y_0 + 4} \geq 3 + 1 = 4$. Am arătat astfel că $[-3, +\infty) \subset F$ și deoarece avem și $F \subset [-3, +\infty)$, rezultă $F = [-3, +\infty)$ (vezi fig. 48).

Pentru funcția g se procedează în mod asemănător. Notînd cu G mulțimea valorilor funcției g și cu y_0 o valoare a funcției, deci $y_0 \in G$, rezultă că există $x \in R$, astfel ca $f(x) = y_0$, adică ecuația cu necunoscuta x, $\dfrac{x}{x^2 + x + 1} = y_0$, are cel puțin o soluție reală. Rezultă că realizantul ecuației de gradul doi, $y_0x^2 + (y_0 - 1)x + y_0 = 0$, este mai mare sau egal cu zero, adică $(y_0 - 1)^2 - 4y_0^2 \geq 0$, $-3y_0^2 - 2y_0 + 1 \geq 0$. Rezolvînd această inecuație cu necunoscuta y_0 obținem: $-1 \leq y_0 \leq \dfrac{1}{3}$.

Am arătat astfel că $G \subset \left[-1, \dfrac{1}{3}\right]$. Analog, se arată că este adevărată și incluziunea în sens invers, $G \supset \left[-1, \dfrac{1}{3}\right]$ și deci $G = \left[-1, \dfrac{1}{3}\right]$.

Scanned with OKEN Scanner

389. *a) Fie funcția* $f: R \to R, f(x) = x^2$ *și mulțimile* $A = [-2, 1]$ $B = [0, 2]$.

Să se compare mulțimile:

$$f(A \cup B) \text{ cu } f(A) \cup f(B);$$
$$f(A \cap B) \text{ cu } f(A) \cap f(B).$$

b) Dacă $f: E \to F$ *este o funcție, iar* A *și* B *părți ale lui* E, *să se arate că următoarele propoziții sînt adevărate:*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

Soluție.

a) Avem: $A \cup B = [-2, 2]$ $f(A \cup B) = [0, 4]$, $f(A) = [0, 4]$, $f(B) = [0, 4]$, $f(A) \cup f(B) = [0, 4]$ și deci $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

$A \cap B = [0, 1]$, $f(A \cap B) = [0, 1]$, $f(A) \cap f(B) = [0, 4] \cap [0, 4] = [0, 4]$, deci $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ și $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

b) Avem:

$y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow$ (există $x \in A \cup B$, $f(x) = y$) $\Leftrightarrow$ (există $x \in A$ astfel ca $f(x) = y$) sau (există $x \in B$ și $f(x) = y$) $\Leftrightarrow y \in f(A)$ sau $y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup (B)$ deci,

$y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B)$, adică $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

De asemenea, avem:

$y \in f(A \cap B) \Rightarrow$ (există $x \in A \cap B$ astfel ca $f(x) = y$) $\Leftrightarrow$ (există $x \in A$ astfel ca $f(x) = y$) și (există $x \in B$ astfel ca $f(x) = y$) $\Rightarrow y \in f(A)$ și $y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$, deci $y \in f(A \cap B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$, adică $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

390. *Fie* $f: E \to F$ *o funcție constantă, iar* A *și* B *părți ale lui* E *astfel ca* $A \cap B \neq \emptyset$.

Să se arate că este adevărată egalitatea $f(A \cup B) = f(A \cap B)$.

Reciproca este adevărată ?

Soluție.

Fie $f(x) = a$, $x \in E$. Avem: $f(A \cup B) = \{a\}$, $f(A \cap B) = \{a\}$ și deci egalitatea din enunț este adevărată.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproca este adevărată. Într-adevăr, să presupunem că oricare ar fi $A \subset E$, $B \subset E$, $A \cap B \neq \emptyset$, este adevărată egalitatea $f(A \cup B) = f(A \cap B)$ și să arătăm că f este o funcție constantă.

Deoarece avem oricare ar fi f:

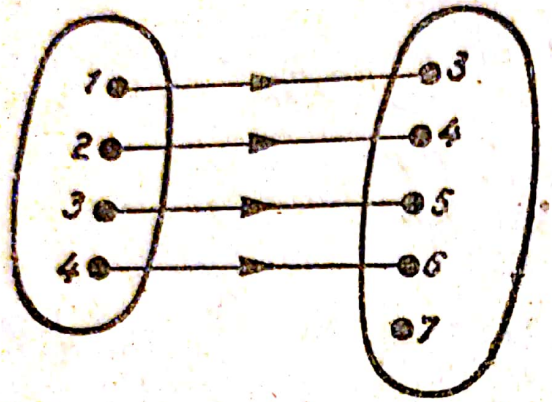


Fig. 49

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$
$$f(A) \cap f(B) \subset f(A) \cup f(B),$$

deducem $f(A) \cup f(B) = f(A) \cap f(B)$ și deci $f(A) = f(B)$.

Dacă E are cel puțin două elemente, fie x un element arbitrar din E și x_1 un element fixat din E. Luăm $A = \{x, x_1\}$, $B = \{x_1\}$, cu $x \neq x_1$. Avem $A \cap B \neq \emptyset$ și deoarece $f(A) = f(B)$ rezultă că oricare ar fi $x \in E$ avem $f(x) = f(x_1)$, adică funcția este constantă pe E.

391. *Fie funcția* $f: E \to F$, A *și* B *părți ale mulțimii* E, $A \cap B \neq \emptyset$ *și egalitatea* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

a) Să se scrie o funcție injectivă — luînd drept E *și* F *mulțimi finite — și să se verifice că egalitatea din enunț este adevărată.*

b) Este adevărată egalitatea oricare ar fi funcția injectivă f *?*

Soluție.

a) Fie funcția injectivă $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{3, 4, 5, 6, 7\}$ dată prin diagrama din figura 49, și $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.

Avem: $A \cap B = \{2, 3\}$, $f(A \cap B) = \{4, 5\}$, $f(A) = \{3, 4, 5\}$, $f(B) = \{4, 5, 6\}$, $f(A) \cap f(B) = \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 5\}$, deci egalitatea $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ este adevărată.

b) Să arătăm că dacă f este injectivă atunci este adevărată incluziunea: $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Avem: $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ și $y \in f(B) \Rightarrow$ există $x' \in A, f(x') = y$ și există $x'' \in B, f(x'') = y$.

Ținînd seama că funcția este injectivă, avem: $f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$ și deci: $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow$ există $x' \in A$

și $x' \in B$ astfel ca $f(x') = y \Rightarrow$ există $x' \in A \cap B$, $f(x') = y \Rightarrow y \in f(A \cap B)$. Am arătat astfel că $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ și deoarece este adevărată și incluziunea în sens invers (ex. precedent) rezultă că mulțimile $f(A \cap B)$ și $f(A) \cap f(B)$ sînt egale.

392. *Fie funcția* $f : E \to F$ *și* A *o parte a lui* F. *Se numește imagine inversă a mulțimii* A *prin funcția* f *și se notează cu* $\overset{-1}{f}(A)$, *mulțimea tuturor elementelor lui* E *ale căror imagini prin* f *aparțin lui* A, *adică* $\overset{-1}{f}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\}$.

Să se verifice într-un caz particular și apoi să se demonstreze proprietățile următoare:

a) $\overset{-1}{f}(F) = E$;

b) $A \subset B \subset F \Rightarrow \overset{-1}{f}(A) \subset \overset{-1}{f}(B)$;

c) $A \subset F, B \subset F, A = B \Rightarrow \overset{-1}{f}(A) = \overset{-1}{f}(B)$;

d) $A \subset F, B \subset F \Rightarrow \overset{-1}{f}(A \cup B) = \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)$;

e) $A \subset F, B \subset F \Rightarrow \overset{-1}{f}(A \cap B) = \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$.

Soluție.

Primele trei proprietăți se pot verifica în figura 50, iar ultimele două proprietăți în figura 51.

a) Pentru a demonstra că $\overset{-1}{f}(F) = E$, vom observa mai întîi că din modul cum a fost definită mulțimea $\overset{-1}{f}(F)$ rezultă

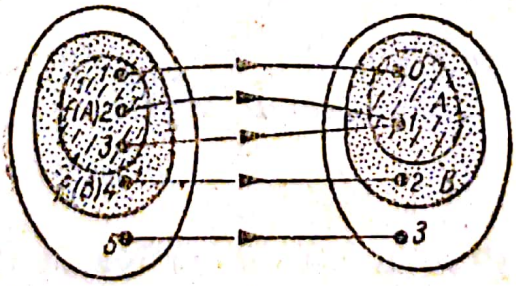


Fig. 50

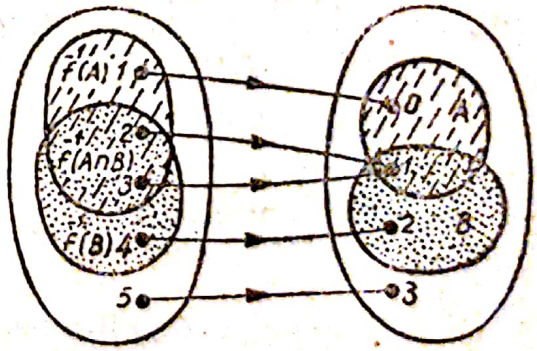


Fig. 51

$f(\overset{-1}{f}(F)) \subset E$; deoarece $x \in E \Rightarrow f(x) \in F \Rightarrow x \in \overset{-1}{f}(F)$, avem și $E \subset \overset{-1}{f}(F)$ și deci $\overset{-1}{f}(F) = E$.

b) Avem: $x \in \overset{-1}{f}(A) \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow f(x) \in B \Rightarrow x \in \overset{-1}{f}(B)$ și deci $\overset{-1}{f}(A) \subset \overset{-1}{f}(B)$;

c) Aplicînd proprietatea de la punctul precedent avem: $A = B \Rightarrow A \subset B$ și $B \subset A \Rightarrow \overset{-1}{f}(A) \subset \overset{-1}{f}(B)$ și $\overset{-1}{f}(B) \subset \overset{-1}{f}(A) \Rightarrow \overset{-1}{f}(A) = \overset{-1}{f}(B)$.

d) Avem $A \subset A \cup B \Rightarrow \overset{-1}{f}(A) \subset \overset{-1}{f}(A \cup B)$; $B \subset A \cup B \Rightarrow \overset{-1}{f}(B) \subset \overset{-1}{f}(A \cup B)$ și deci $\overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B) \subset \overset{-1}{f}(A \cup B)$. De asemenea, avem: $x \in \overset{-1}{f}(A \cup B) \Rightarrow f(x) \in A \cup B \Rightarrow f(x) \in A$ sau $f(x) \in B \Rightarrow x \in \overset{-1}{f}(A)$ sau $x \in \overset{-1}{f}(B) \Rightarrow x \in \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)$ și deci $\overset{-1}{f}(A \cup B) \subset \overset{-1}{f}(A) \cup \overset{-1}{f}(B)$.

e) Avem: $A \cap B \subset A \Rightarrow \overset{-1}{f}(A \cap B) \subset \overset{-1}{f}(A)$ și analog $\overset{-1}{f}(A \cap B) \subset \overset{-1}{f}(B)$, de unde rezultă $\overset{-1}{f}(A \cap B) \subset \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$; $x \in \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B) \Rightarrow x \in \overset{-1}{f}(A)$ și $x \in \overset{-1}{f}(B) \Rightarrow f(x) \in A$ și $f(x) \in B \Rightarrow f(x) \in A \cap B \Rightarrow x \in \overset{-1}{f}(A \cap B)$, deci $\overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B) \subset \overset{-1}{f}(A \cap B)$ și $\overset{-1}{f}(A \cap B) = \overset{-1}{f}(A) \cap \overset{-1}{f}(B)$.

393. *Fie funcția*

$$f: R \to \{0, 1\},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional,} \\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

(funcția lui Dirichlet)

1) Este această funcție bijectivă ?

2) Să se arate că oricare număr rațional, diferit de zero este o perioadă a funcției.

Soluție.

1) Funcția este surjectivă, dar nu este injectivă și deci nici bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

2) Fie r un număr rațional. Dacă x este rațional atunci $x + r$ este rațional ; dacă x este irațional, atunci $x + r$ este irațional. Ținînd seama de aceasta avem :

$$f(x+r) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \text{ este rațional,} \\ 0, \text{ dacă } x \text{ este irațional,} \end{cases} = f(x),$$

deci oricare ar fi numărul rațional r, $f(x + r) = f(x)$, adică f are ca perioadă oricare număr rațional nenul.

394. *Fie funcția* $f: R \to R$ *definită astfel :*

$$f(x) = \begin{cases} x - 2k, \text{ dacă } 2k \leqslant x < 2k+1, \ k \text{ întreg} \\ -x + 2k + 2, \text{ dacă } 2k+1 \leqslant x < 2k+2, \ k \text{ întreg.} \end{cases}$$

1) *Să se calculeze* $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$, $f(\sqrt{10})$.

2) *Este această funcție injectivă ?*

3) *Să se arate că* $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ *oricare ar fi* $x \in R$.

4) *Să se arate că numărul 2 este o perioadă a funcției.*

5) *Să se compare funcția dată cu funcția*

$g: R \to R$, $g(x) = (-1)^{[x]} \cdot \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$ unde $[x]$ *reprezintă cel mai mare întreg* $\leqslant x$.

6) *Să se reprezinte grafic funcția f.*

Soluție.

1) Deoarece avem $2k \leqslant 0 < 2k + 1$ pentru $k = 0$, $f(0)$ se deduce din $f(x) = x - 2k$, înlocuind $x = 0$, $k = 0$, deci $f(0) = 0$; în mod asemănător se obține $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; deoarece inegalitățile $2k \leqslant \frac{5}{2} < 2k + 1$ sînt adevărate pentru $k = 1$, înlocuind $x = \frac{5}{2}$, $k = 1$ în $f(x) = x - 2k$, obținem $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $f(\sqrt{10})$ se calculează observînd că avem $2k + 1 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 2k + 2$ pentru $k = 1$ și deci înlocuind în $f(x) = -x +$

$+ 2k + 2, x = \sqrt{10}$, $k = 1$, obținem $f(\sqrt{10}) = 4 - \sqrt{10}$.

2) Funcția nu este injectivă căci $\frac{1}{2} \neq \frac{5}{2}$, dar $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

3) Dacă există k întreg astfel ca $2k \leqslant x < 2k + 1$, atunci $0 \leqslant x - 2k < 1$ adică $0 \leqslant f(x) < 1$.

Dacă există k întreg astfel ca $2k + 1 \leqslant x < 2k + 2$, atunci $0 < -x + 2k + 2 \leqslant 1$, adică $0 < f(x) \leqslant 1$ și deci oricare ar fi $x \in R$ avem $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

4) Dacă $2k \leqslant x < 2k + 1$, atunci $2k + 2 \leqslant x + 2 < 2k + 3$ sau $2k' \leqslant x + 2 < 2k' + 1$ unde $k' = k + 1$ și $f(x + 2) = x + 2 - 2k' = x - 2k = f(x)$.

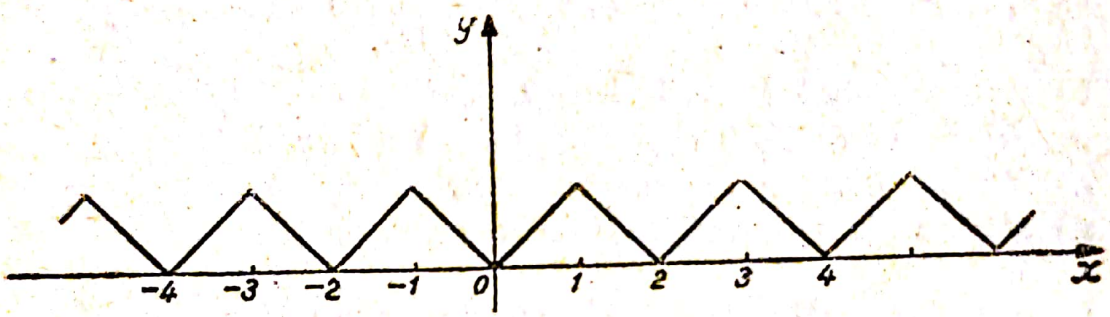


Fig. 52

Dacă $2k + 1 \leqslant x < 2k + 2$, atunci $2k + 3 \leqslant x + 2 < 2k + 4$, $f(x + 2) = -x - 2 + 2k + 4 = -x + 2k + 2 = f(x)$, deci oricare ar fi $x \in R$ avem $f(x + 2) = f(x)$, adică 2 este o perioadă a funcției f.

5) Funcțiile sînt egale. Ambele sînt definite pe R și iau valori reale. Dacă $[x] = 2k$, $k \in Z$, atunci $2k \leqslant x < 2k + 1$ și $g(x) = x - 2k = f(x)$. Dacă $[x] = 2k + 1$, $k \in Z$, atunci $2k + 1 \leqslant x < 2k + 2$ și $g(x) = -x + 2k + 2 = f(x)$, deci oricare ar fi $x \in R$, $f(x) = g(x)$.

6) Graficul funcției f este cel din figura 52.

395. *Să se reprezinte grafic funcțiile următoare și să se spună care sînt surjective și care nu sînt surjective.*

$f_1 : \{1, 2, 3\} \to \{2, 4, 6\}$, $f_1(x) = 2x$;

$f_2 : \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f_2(x) = x + 1$;

$f_3 : R \to R$, $f_3(x) = 1 - x$;
$f_4 : [0, +\infty) \to R$, $f_4(x) = 2x - 1$;
$f_5 : [1, 5] \to [-2, 2]$, $f_5(x) = -x + 3$;
$f_6 : [-1, 4] \to [0, 7]$, $f_6(x) = x + 1$;
$f_7 : R \to [0, +\infty)$, $f_7(x) = |x - 1|$;
$f_8 : [-2, 3] \to [0, 3]$, $f_8(x) = |x|$;

$$f_9 : [-2, 4] \to [-2, 0], \quad f_9(x) = -\frac{1}{2}|2-x|;$$

$f_{10} : R \to [0, +\infty)$, $f_{10}(x) = x + |x|$;
$f_{11} : R \to (0, +\infty)$, $f_{11}(x) = |x - 1| + |x - 2|$;

$$g_1 : R \to (-\infty, 0), \quad g_1(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leqslant 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$$

$$g_2 : R \to [0, +\infty), \quad g_2(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -2x, & x < 0; \end{cases}$$

$$g_3 : [-1, 4] \to [-1, 2], \quad g_3(x) = \begin{cases} x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2, & 0 < x \leqslant 4; \end{cases}$$

$g_4 : [0, 4] \to [0, 2]$, $g_4(x) = \min(x, 4 - x)$;
$g_5 : R \to [0, +\infty)$, $g_5(x) = \max(x + 1, 1 - x)$;
$g_6 : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, -1, 3\}$, $g_6(x) = x^2 - 4x + 3$;
$g_7 : \{-1, 1, 2\} \to \{0, 1, 3\}$, $g_7(x) = x^2 - 1$;
$g_8 : R \to [-4, +\infty)$, $g_8(x)\ x^2 - 2x - 3$;
$g_9 : [0, 3) \to [-3, 2]$, $g_9(x) = -x^2 + 2x$;
$g_{10} : R \to R$, $g_{10}(x) = x\,|\,x\,|$;
$h_1 : [+1, 5] \to [-1, 3]$, $h_1(x) = |\,x^2 - 6x + 8\,|$;

$$h_2 : R - \{0\} \to R, \quad h_2(x) = \frac{1}{2}\log_2 x^2;$$

$h_3 : [0, +\infty) \to \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $h_3(x) = [x]$ (*partea întreagă a lui* x).

Soluție.

Graficele funcțiilor f_1, f_2 sînt cele din fig. 53;
Funcția f_1 este surjectivă : funcția f_2 nu este surjectivă.
Graficele funcțiilor f_3 și f_4 sînt cele din fig. 54 :

Mulțimea în care funcția ia valori este reprezentată pe axa ordonatelor printr-o linie dublă. Mulțimea valorilor funcției se obține proiectînd graficul funcției pe axa ordonatelor. Pentru funcția f_3 aceste mulțimi sînt egale, deci f_3 este surjectivă; pentru f_4 mulțimile nu sînt egale și deci funcția nu este surjectivă.

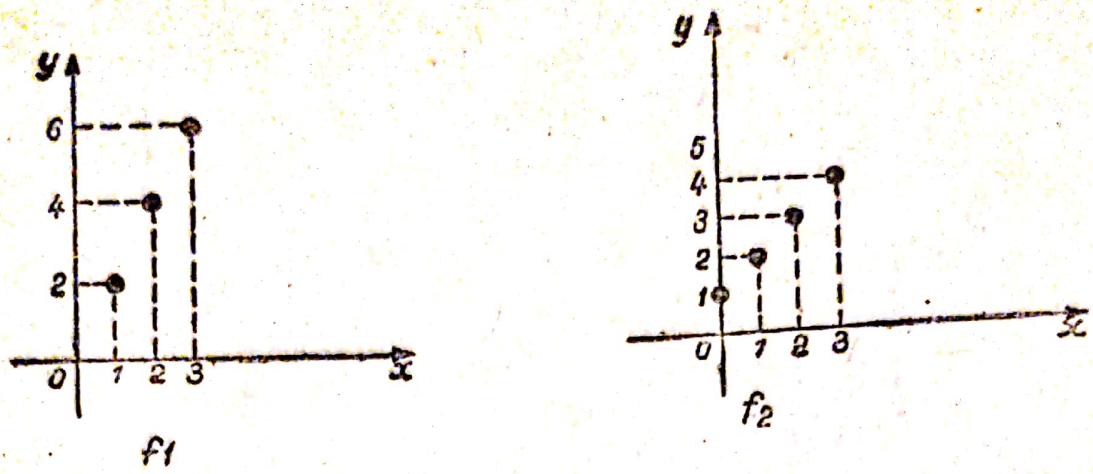


Fig. 53

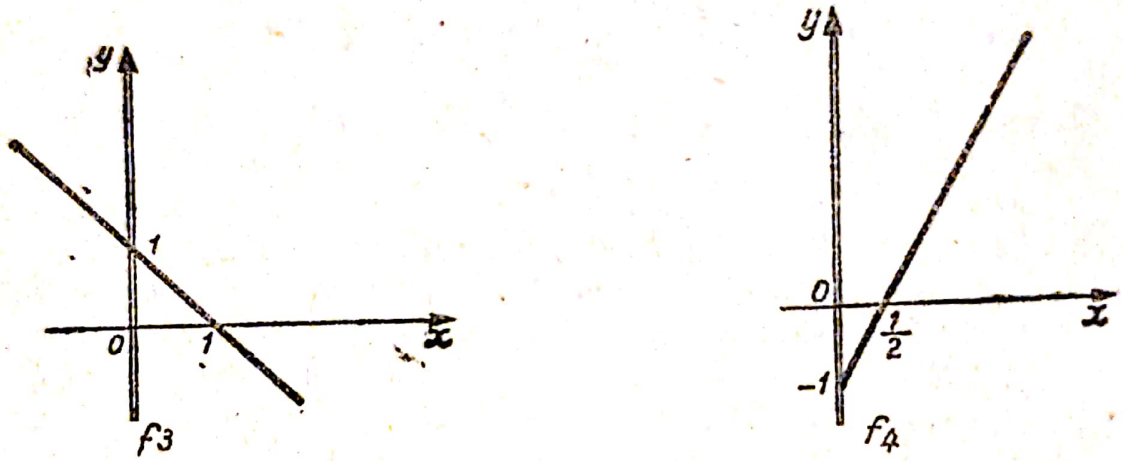


Fig. 54

Graficele funcțiilor f_5, f_6 sînt cele din fig. 55.

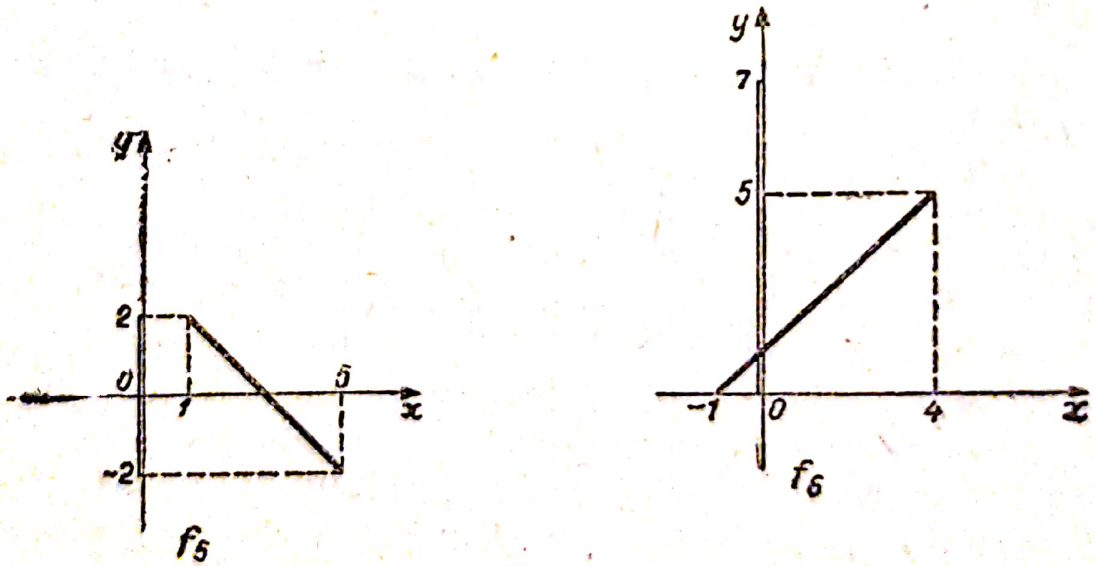


Fig. 55

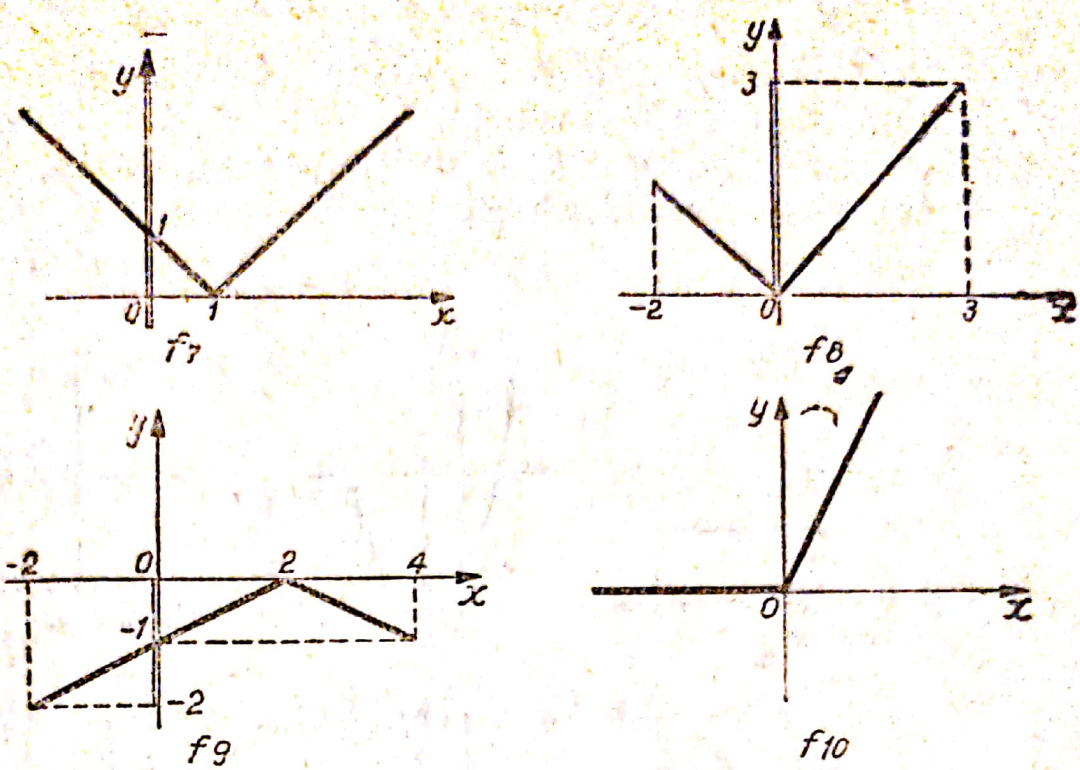


Fig. 56

Funcția f_5 este surjectivă căci mulțimea valorilor (proiecția graficului pe axa ordonatelor) este egală cu mulțimea în care funcția ia valori (partea dublată a axei ordonatelor).

Funcția f_6 nu este surjectivă căci mulțimea valorilor funcției este intervalul $[-1, 5]$ — proiecția graficului pe Oy — iar mulțimea în care funcția ia valori este $[-1, 7]$ (partea dublată a axei ordonatelor), se constată că aceste mulțimi sînt egale pentru funcțiile f_7, f_8, f_9, f_{10}, deci aceste funcții sînt surjective (fig. 56).

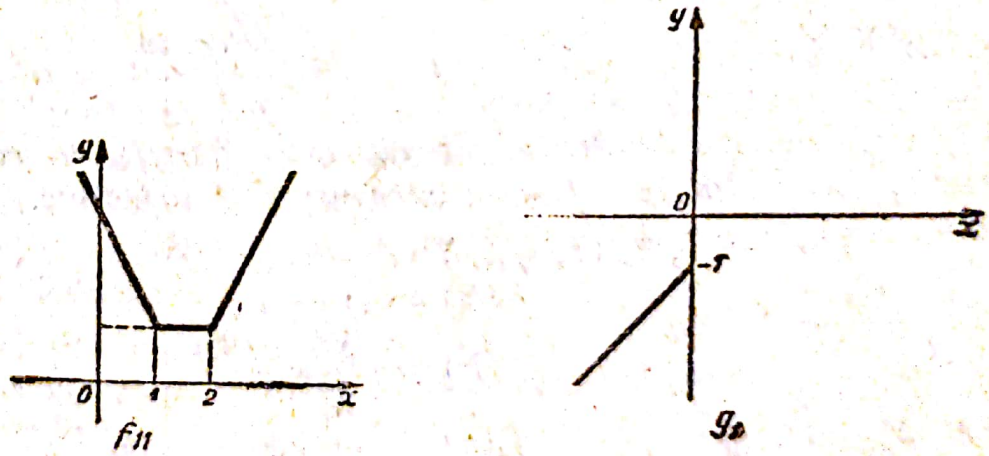


Fig. 57

Procedînd ca mai înainte se constată că funcțiile f_{11} și g_1 nu sînt surjective. Graficele lor sînt cele din fig. 57.

Funcțiile g_2, g_4, g_6, g_8, g_{10}, h_2, h_3 sînt surjective, iar g_3, g_5, g_7, g_9, h_1 nu sînt surjective. Graficele lor sînt cele din fig. 58 și fig. 59.

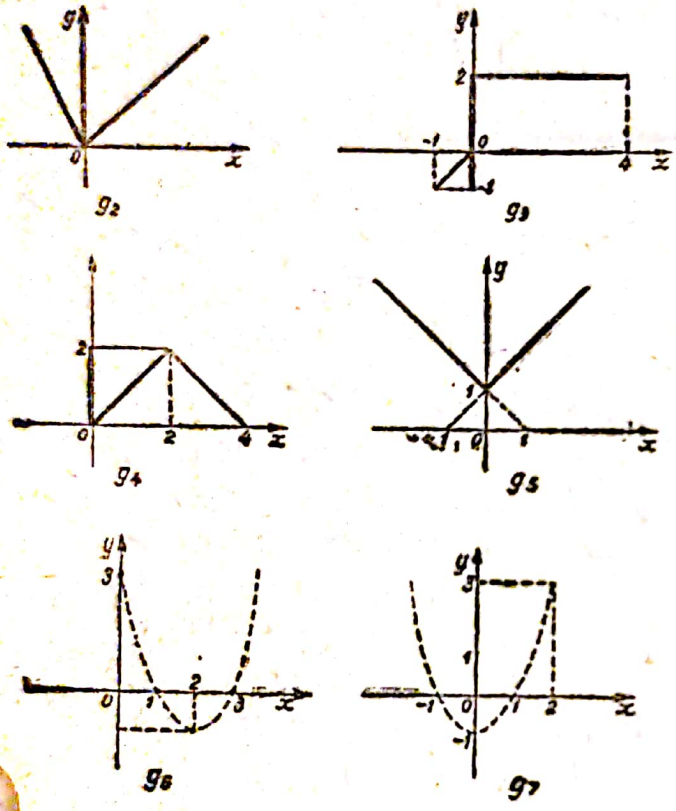


Fig. 58

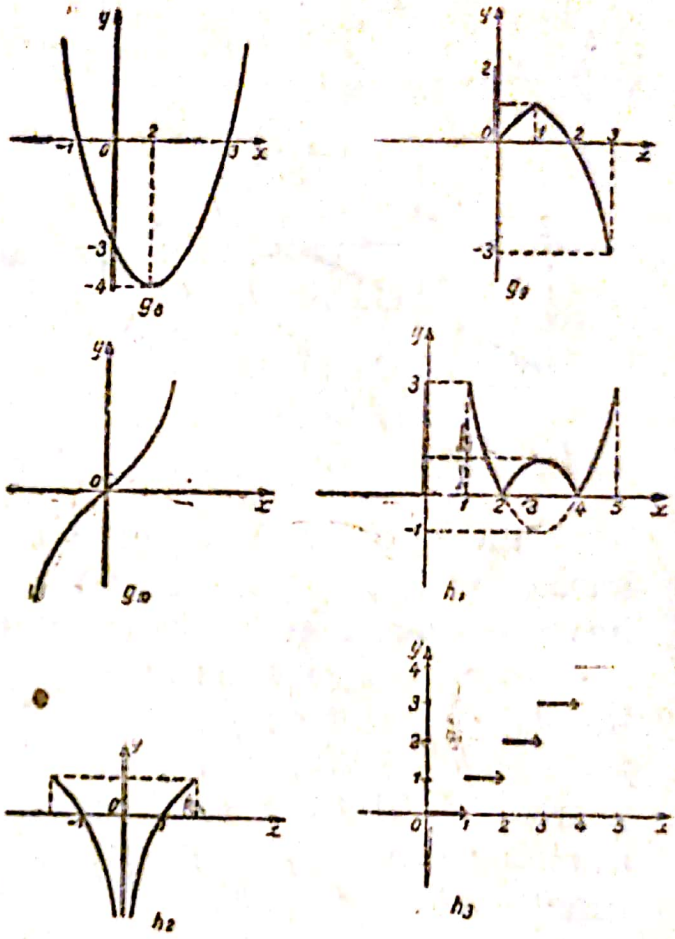


Fig. 59

396. *Să se reprezinte grafic următoarele funcții și să se spună care funcții sînt injective și care nu sînt injective.*

$f_1 : \{-1, 0, 1\} \to \{-1, 0, 1\}$, $f_1(x) = -x$;

$f_2 : [0, 4] \to R$, $f_2(x) = x - 1$;

$f_3 : R \to R$, $f_3(x) = \frac{1}{2}x + 1$;

$f_4 : (-\infty, 0] \to R$, $f_4(x) = -|x + 1|$;

$f_5 : R \to [-1, 1]$, $f_5(x) = |x| - |x - 1|$;

$f_6 : (-\infty, 1] \to R$, $\quad f_6(x) = \begin{cases} -x, & x \leqslant 0, \\ x - 1, & 0 < x \leqslant 1; \end{cases}$

$f_7 : R \to R$, $\quad f_7(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leqslant 0, \\ x + 1, & x > 0; \end{cases}$

$f_8 : [-5, 1] \to [0, 1]$, $\quad f_8(x) = \min\left(\frac{1}{5}x + 1, 1 - x\right)$;

$f_9 : [-4, +\infty) \to R$, $\quad f_9(x) = \max\left(\frac{x}{4} + 1, \frac{3}{4}x\right)$;

$f_{10} : R \to R$, $\quad f_{10}(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$;

$g_1 : (-\infty, -2] \cup [1, 4) \to R$, $\quad g_1(x) = x^2 - 2x - 8$;

$g_2 : [0, +\infty) \to R$, $\quad g_2(x) = |-x^2 + 4x|$;

$g_3 : R \to R$, $\quad g_3(x) = 2^x$;

$g_4 : R \to R$, $\quad g_4(x) = 2^{|x|}$;

$g_5 : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $\quad g_5(x) = \sin x$;

$g_6 : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$, $\quad g_6(x) = \cos x$.

Soluție.

Dacă oricare paralelă la axa absciselor taie graficul unei funcții în cel mult un punct (adică îl taie într-un singur punct sau nu-l taie deloc), atunci funcția este injectivă. Dacă există o paralelă la axa absciselor care taie graficul funcției în două sau în mai multe puncte, funcția nu este injectivă.

Reprezentînd grafic funcțiile date și ținînd seama de această caracterizare a funcțiilor injective, se constată că funcțiile : $f_1, f_2, f_3, f_7, f_9, g_1, g_3, g_5$ sînt injective, iar funcțiile $f_4, f_5, f_6, f_8, f_{10}, g_2, g_4, g_6$ nu sînt injective.

Graficele funcțiilor sînt în figurile : 60, 61 și 62.

Scanned with OKEN Scanner

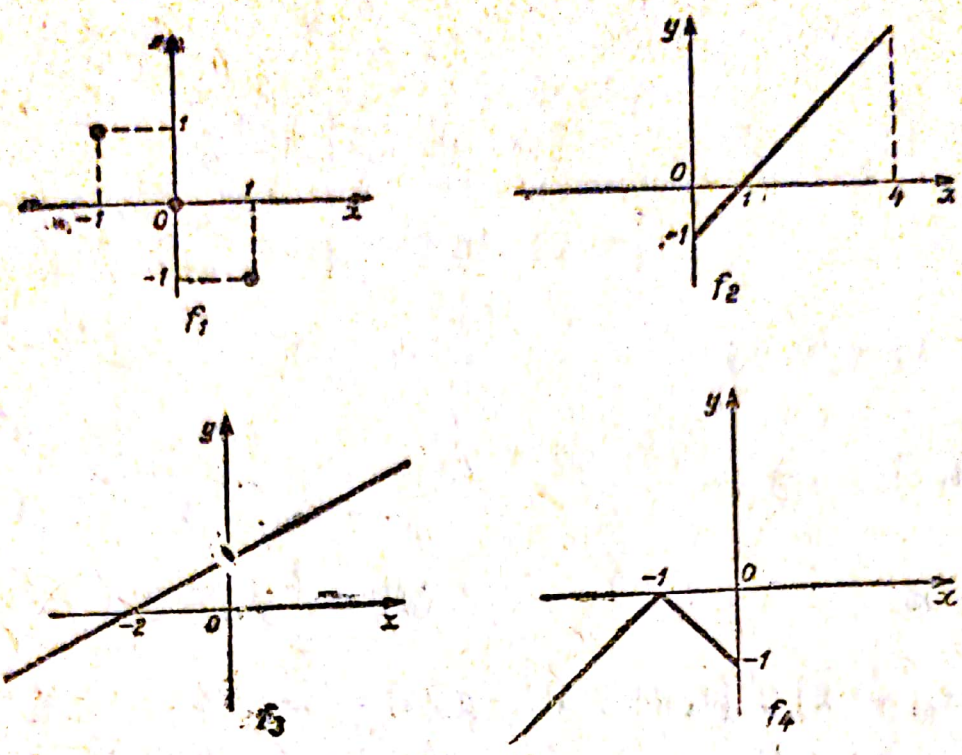


Fig. 60

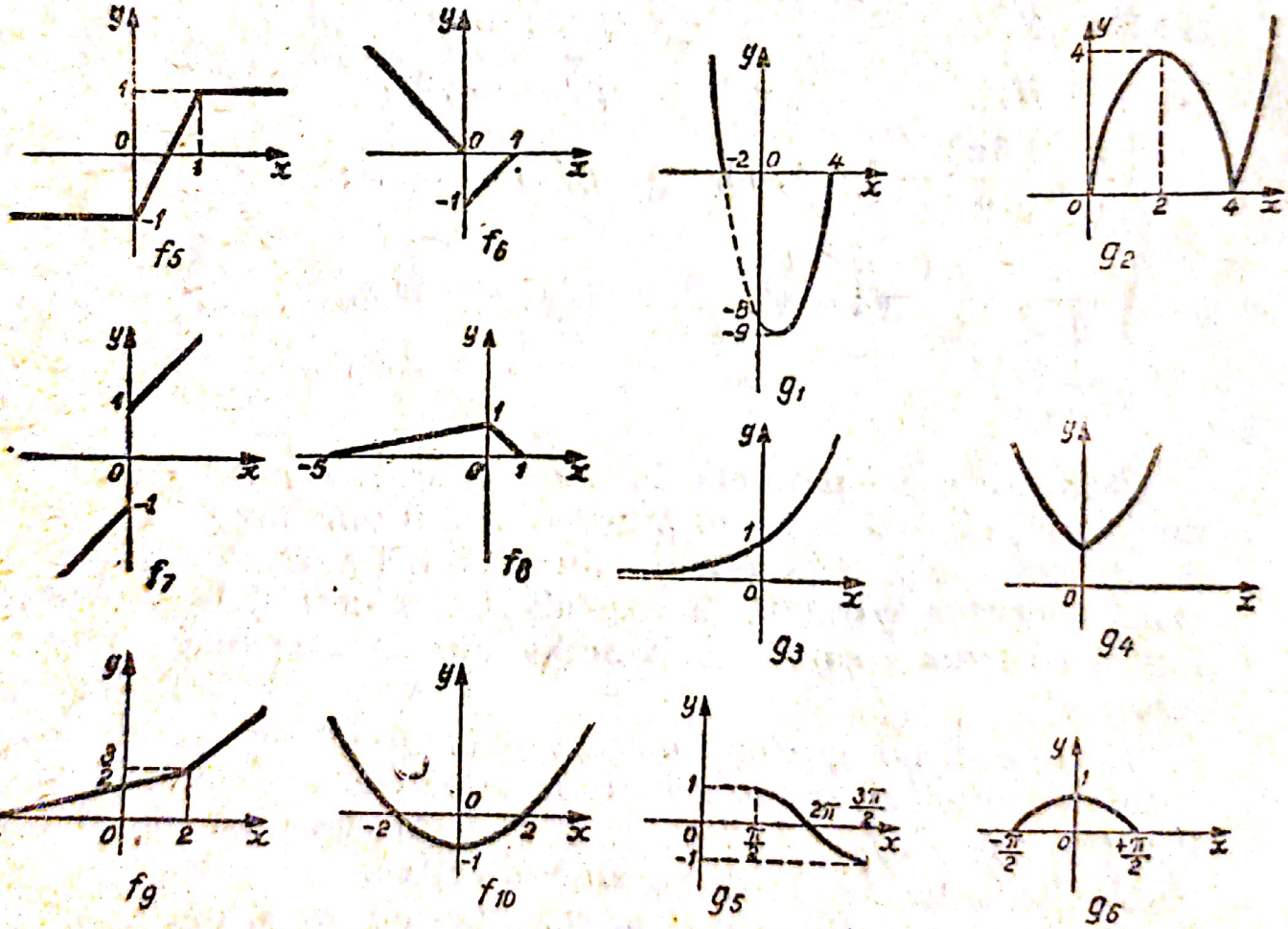


Fig. 61

Fig. 62

397. *Să se reprezinte grafic funcțiile următoare și să se spună care funcții sînt bijective și care nu sînt bijective.*

$f_1 : \{0, 1, 3\} \to \{-2, 0, 4\}$, $f_1(x) = 2x - 2$;

$f_2 : \{-3, 0, 2\} \to \left\{1, \frac{11}{5}, 3, 4\right\}$, $f_2(x) = \frac{1}{5}(2x + 11)$;

$f_3 : [-2, 3] \to [0, 2]$, $f_3(x) = \frac{1}{5}(-2x + 6)$;

$f_4 : [-2, 3] \to [0, 3]$, $f_4(x) = \frac{1}{5}(-2x + 6)$;

$f_5 : R \to R$, $f_5(x) = \frac{2}{5}x + 1$;

$f_6 : R \to [0, +\infty)$, $f_6(x) = |x - 2|$;

$f_7 : (-2, 0] \cup [2, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f_7(x) = |x|$;

$f_8 : R \to [2, +\infty)$, $f_8(x) = |x| + |x - 2|$;

$f_9 : [-2, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f_9(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x + 1, & x > 0; \end{cases}$

$f_{10} : [-1, +\infty) \to R$, $f_{10}(x) = \begin{cases} -3x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x, & 0 < x \leqslant 1, \\ -\frac{1}{2}(x+1), & x > 1; \end{cases}$

$g_1 : (-\infty, 0] \to R$, $g_1(x) = \min(x, -2x)$;

$g_2 : [0, +\infty) \to (-\infty, 4]$, $g_2(x) = \max\left(3 - x, -\frac{1}{3}x + 1\right)$;

$g_3 : R \to \left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$, $g_3(x) = -x^2 + 3x$;

$g_4 : R \to R$, $g_4(x) = x^2 + 2x + 2$;

$g_5 : (0, 1] \cup [2, +\infty) \to [0, +\infty)$, $g_5(x) = x^2 - 2x + 1$;

$g_6 : R \to [0, +\infty)$, $g_6(x) = \begin{cases} |x^2 - 1|, & x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

Soluție.

O funcție este bijectivă dacă este surjectivă și injectivă. Fie F mulțimea punctelor de pe axa ordonatelor reprezentînd mulțimea în care funcția ia valori. Dacă oricare paralelă

Scanned with OKEN Scanner

la axa absciselor, dusă prin punctele lui F, taie graficul funcției cel puțin într-un punct, funcția este surjectivă.

Dacă oricare paralelă la axa absciselor, dusă prin punctele lui F, întîlnește graficul funcției în cel mult un punct, funcția este injectivă. Rezultă că o funcție este bijectivă dacă oricare paralelă la axa absciselor, dusă prin punctele lui F, întîlnește graficul într-un singur punct.

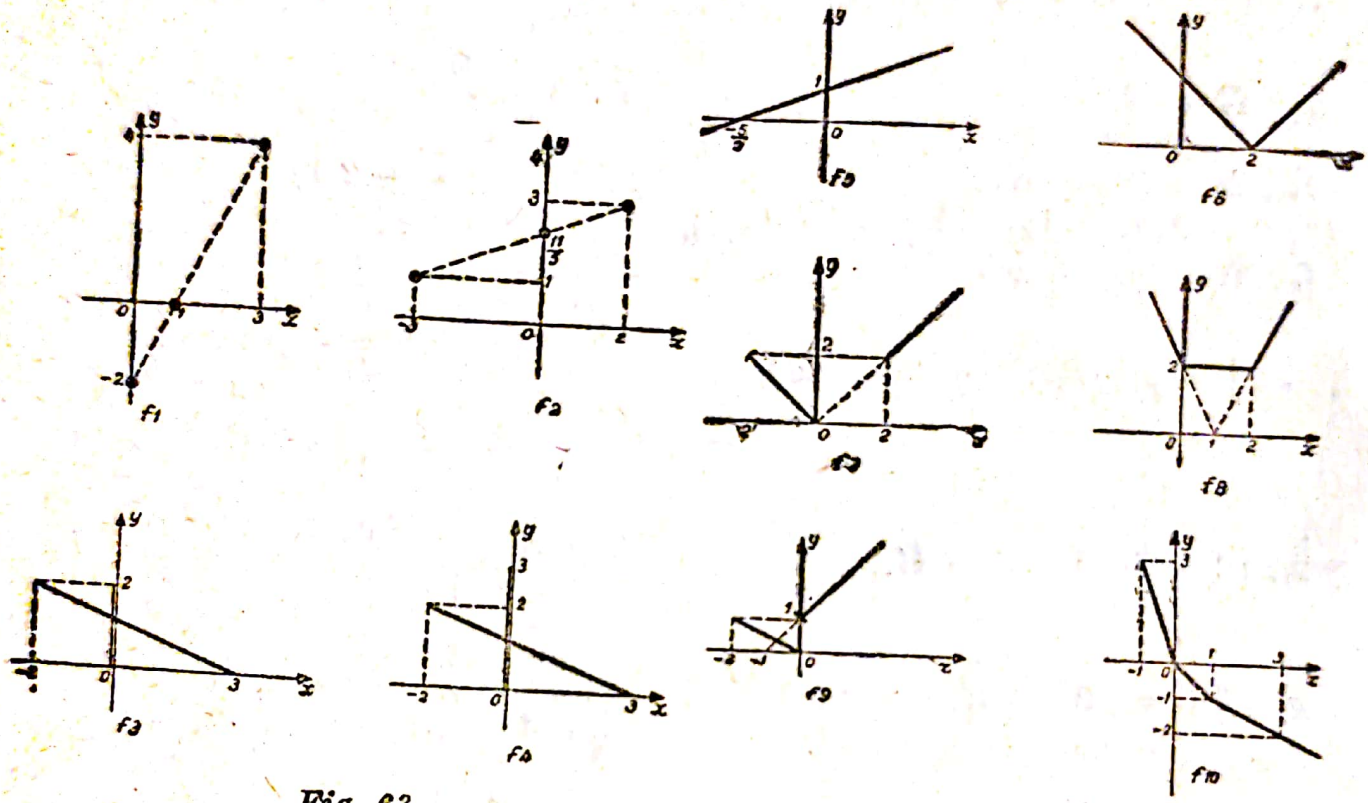


Fig. 63

Fig. 64

Folosind această caracterizare geometrică a funcțiilor bijective, se constată că funcțiile $f_1, f_3, f_5, f_7, f_9, g_5$ sînt bijective, iar funcțiile $f_2, f_4, f_6, f_8, f_{10}, g_1, g_2, g_3, g_4, g_6$ nu sînt bijective.

Graficele acestor funcții sînt cele din fig. 63, 64, 65 (mulțimea în care funcția ia valori este reprezentată prin partea dublată a axei ordonatelor).

398. *Fie funcțiile*:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leqslant 0 \\ 2x, & x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 2, \\ x + 1, & x > 2. \end{cases}$$

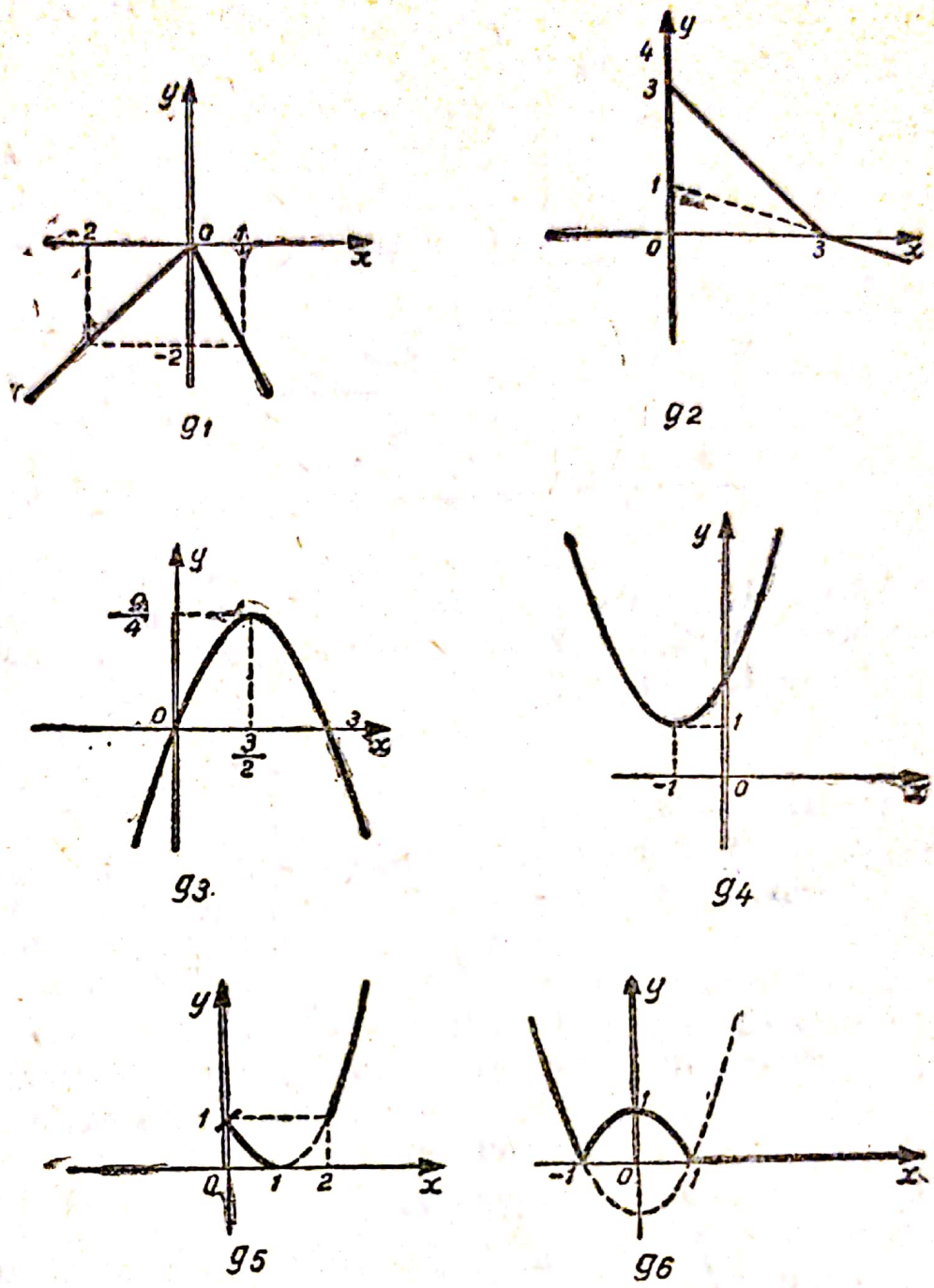


Fig. 65

Să se determine funcţiile: $s = f + g$, $d = f - g$, $p = f \cdot g$, $c = \frac{f}{g}$.

Soluţie.

Alcătuim tabelul următor:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f	$x-1$		$2x$	
g	x	x		$x+1$
$f+g$	$2x-1$	$3x$		$3x+1$
$f-g$	-1	x		$x-1$
$f\cdot g$	x^2-x	$2x^2$		$2x^2+2x$
f/g	$\frac{x-1}{x}$	2		$\frac{2x}{x+1}$

Avem:

$$s(x)=\begin{cases}2x-1, & x\leqslant 0,\\ 3x, & 0<x\leqslant 2,\\ 3x+1, & x>2.\end{cases}\qquad p(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\leqslant 0,\\ 2x^2, & 0<x\leqslant 2,\\ 2x^2+2x, & x>2.\end{cases}$$

$$d(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant 0,\\ x, & 0<x\leqslant 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}\qquad c(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x}, & x<0,\\ 2, & 0<x\leqslant 2,\\ \frac{2x}{x+1}, & x>2.\end{cases}$$

399. *Fie funcția* $f: R\to R, f(x)=x^2-2x$.
a) Să se determine o restricție a lui f, strict crescătoare;
b) Să se determine o restricție a lui f, strict descrescătoare.

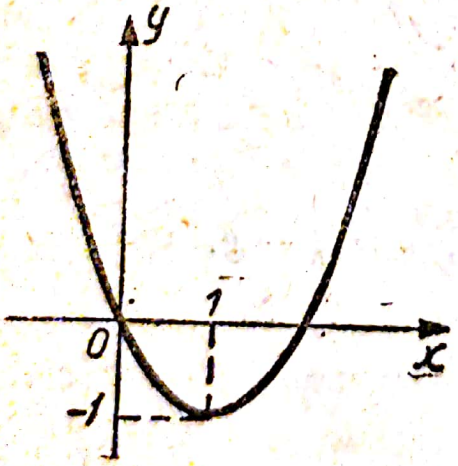


Fig. 66

Răspuns.

a) O restricție strict crescătoare a lui f este funcția $f_1:[1,+\infty)\to R, f_1(x)=x^2-2x$.

b) O restricție strict descrescătoare a lui f este funcția $f_2:(-\infty,1)\to R, f_2(x)=x^2-2x$ (fig. 66).

400. *Fie funcția* $f: E\to F, E\subset R, F\subset R$ *și submulțimile nevide* A, B *ale*

Scanned with OKEN Scanner

ui E. Dacă f este strict crescătoare pe A și strict crescătoare pe B, este strict crescătoare și pe A ∪ B ?

Soluție.

Există f, A și B astfel ca f să fie strict crescătoare pe A, strict crescătoare pe B, dar nu să fie strict crescătoare pe $A \cup B$. Într-adevăr, dacă $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in R - \{0\}$, $A = (-\infty, 0)$, $B = (0, +\infty)$, atunci f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0)$, strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, dar pe $A \cup B = R - \{0\}$ nu este strict crescătoare căci, de exemplu, $-1 < 1$, $f(-1) = 1 > -1 = f(1)$, $f(-1) > f(1)$.

401. *Fie funcția strict crescătoare* $f : E \to R$.

Care dintre funcțiile următoare, definite pe E, este strict crescătoare și care este strict descrescătoare ?

1) $f + C$, C *constantă*;

2) $f \cdot C$, C *constantă nenulă*;

3) f^2.

Soluție.

1) Deoarece $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, pentru $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, avem și $f(x_1) + C < f(x_2) + C$, adică $f + C$ este o funcție strict crescătoare pe E.

2) Dacă $C > 0$, atunci Cf este strict crescătoare pe E. Într-adevăr, avem: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ și cum $C > 0$, rezultă că $Cf(x_1) < Cf(x_2)$, adică funcția Cf este strict crescătoare pe E.

Dacă $C < 0$, atunci $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow Cf(x_1) > Cf(x_2)$ și deci în acest caz Cf este strict descrescătoare pe E.

3) Dacă $f(x) \geqslant 0$, $x \in E$, atunci $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f^2(x_1) < f^2(x_2)$ și deci f^2 este strict crescătoare pe E: dacă $f(x) \leqslant 0$, $x \in E$, atunci

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f^2(x_1) > f^2(x_2)$ și deci f^2 este strict descrescătoare pe E. Dacă f nu păstrează un semn constant pe E, f^2 nu este strict monotonă pe E.

402. *Fie* $f : E \to R$ *o funcție strict monotonă astfel încît* E *conține un interval* F *pe care* f *nu se anulează, iar* $g : F \to R$ *o funcție pentru care* $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $x \in F$.

1) Există f și F îndeplinind condițiile de mai înainte, astfel ca g să fie strict monotonă ?

2) Oricare ar fi f și F îndeplinind condițiile din enunț, g este strict monotonă ?

Soluție.

1) Dacă $f(x) = x$, $x \in R - \{0\}$, $F = (0, +\infty)$, atunci $g(x) = \dfrac{1}{x}$ este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$, deci există f și F astfel ca $\dfrac{1}{f}$ să fie strict monotonă pe F.

2) Nu oricare ar fi F și f îndeplinind condițiile din enunț g este strict monotonă. Într-adevăr, fie funcția :

$$f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x + 1, & x \geqslant 0; \end{cases}$$

atunci, dacă $F = [-1, +1]$, avem $f(x) \neq 0$ pentru $x \in F$ și

$$g : F \to R,\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & -1 \leqslant x < 0, \\ \dfrac{1}{x+1}, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Funcția g nu este strict monotonă, căci $g\left(-\dfrac{1}{2}\right) > g\left(-\dfrac{1}{4}\right)$, $g\left(-\dfrac{1}{4}\right) < g(0)$ (fig. 67).

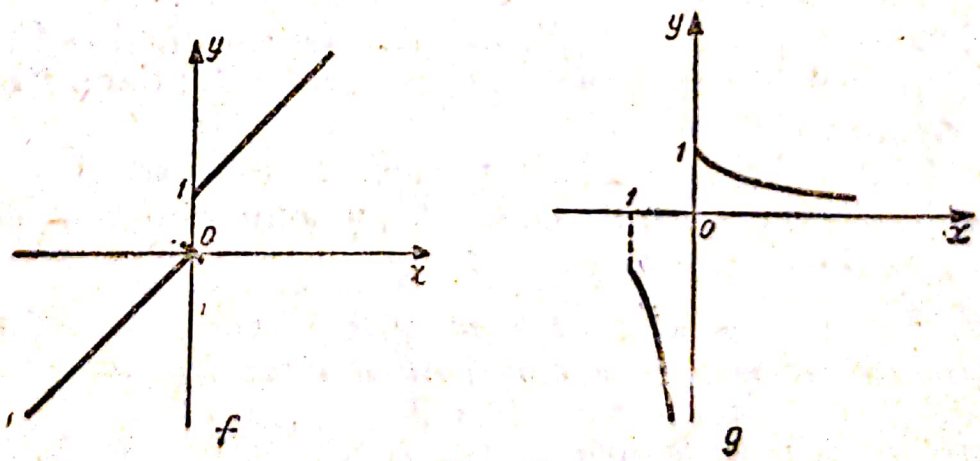


Fig. 67

Scanned with OKEN Scanner

403. *Suma a două funcții strict crescătoare pe o mulțime* $E \subset R$ *este o funcție strict monotonă pe* E *? Dar produsul ?*

Soluție.

Fie funcțiile strict crescătoare $f : E \to R$, $g : E \to R$.

Pentru $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, avem: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ și adunînd aceste inegalități membru cu membru: $\frac{[f(x_1) + g(x_1)] - [f(x_2) + g(x_2)]}{x_1 - x_2} > 0$, adică suma funcțiilor f și g este o funcție strict crescătoare.

De asemenea dacă f și g sînt strict descrescătoare, atunci $f + g$ este strict descrescătoare.

Există funcții strict crescătoare al căror produs nu este o funcție strict crescătoare, de exemplu dacă $f(x) = g(x) = x$, $x \in R$, atunci f și g sînt strict crescătoare dar $h(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2$, $x \in R$ nu este strict monotonă.

Dacă f și g sînt strict crescătoare pe E și $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ pentru $x \in E$, atunci produsul $f \cdot g$ este o funcție crescătoare pe E.

Într-adevăr, avem:

$$f(x_1) \cdot g(x_1) - f(x_2) \cdot g(x_2) = [f(x_1) - f(x_2)] \cdot g(x_1) + [g(x_1) - g(x_2)] \cdot f(x_2),$$

de unde rezultă că dacă

$f(x_1) < f(x_2)$, $g(x_1) < g(x_2)$, atunci $f(x_1) \cdot g(x_1) < f(x_2) \cdot g(x_2)$, $f \cdot g$ fiind astfel o funcție strict crescătoare.

404. *Fie funcția* f:

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to R, f(x) = \max_{-\frac{\pi}{2} \leq t \leq x} (\cos t).$$

a) Să se calculeze $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. *Este injectivă această funcție ?*

b) Să se reprezinte grafic funcția f.
(Dată funcția $f:[a, b]\to R$ *și* $x\in[a, b]$, $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant x} f(t)$ *reprezintă cea mai mare valoare a funcției f pe intervalul* $[a, x]$*).*

Soluție.

a) Avem: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\max\limits_{-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant-\frac{\pi}{2}}(\cos\ t)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0.$

Ținînd seama că funcția cosinus este strict crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$, avem $\cos\ t\leqslant\cos\ 0=1$, pentru $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant 0$ și deci $f(0)=1$.

De asemenea avem: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\max\limits_{-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}}(\cos t)=1.$

Deoarece $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, funcția dată nu este injectivă.

b) Deoarece cosinusul este o funcție strict crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$ și strict descrescătoare pe $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, avem:

$\max\limits_{-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant x}(\cos\ t)=\cos\ x$, dacă $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$;

$\max\limits_{-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant x}(\cos\ t)=1$, dacă $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$, adică

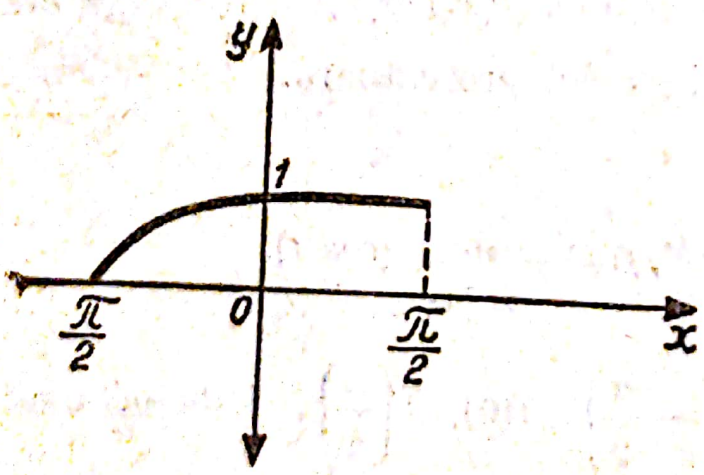


Fig. 68

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Graficul funcției este cel din figura 68.

405. *Fie funcțiile* $E = \{-1, 0, 1, 2\}$, $F = \{-2, 0, 3\}$ *și funcțiile*:

$$f : E \to R, \quad f(x) = x^2 - x - 2,$$
$$g : F \to R, \quad g(x) = x - 1.$$

Pot fi definite funcțiile compuse $f \circ g$, $g \circ f$ *? În caz afirmativ să se determine aceste funcții.*

Soluție.

Avem: $f(E) = \{f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = \{-2, 0\}$, $g(F) = \{g(-2), g(0), g(3)\} = \{-3, -1, 2\}$.

Deoarece $f(E) \subset F$, există $g \circ f$; fiindcă $g(F) \not\subset E$. nu se poate defini $f \circ g$. Avem deci $g \circ f$: $E \to R$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 1 = x^2 - x - 3$ (diagrama din fig. 69).

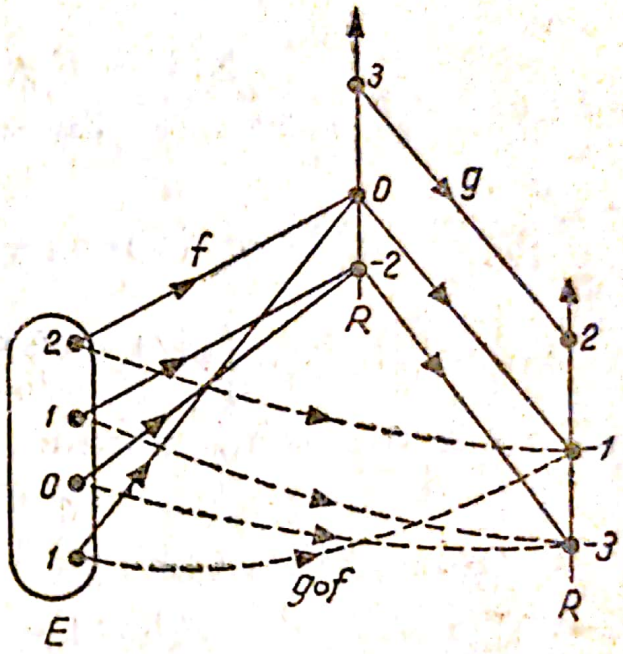


Fig 69

406. *Fie mulțimile* $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 4\}$, $G = \{2, 3, 4\}$, $H = \{0, 1, 4\}$ *și funcțiile*:

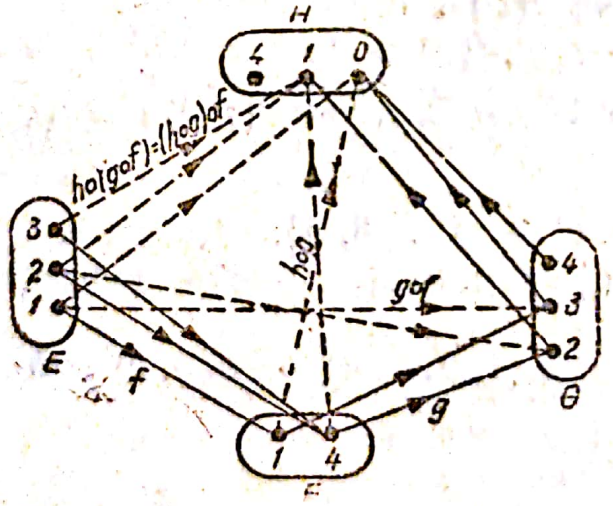


Fig. 70

$f : E \to F$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 4$;
$g : F \to G$, $g(1) = 3$, $g(4) = 2$;
$h : G \to H$, $h(2) = 1$, $h(3) = 0$, $h(4) = 0$.

Să se alcătuiască o diagramă și să se verifice că $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Soluție.

Pe diagrama din figura 70 se constată că funcțiile $h \circ (g \circ f)$ și $(h \circ g) \circ f$ au același domeniu de definiție, E,

iau valori în aceeași mulțime H, și $(h\circ(g\circ f))(x) = ((h\circ g)\circ f)(x)$, oricare ar fi $x \in E$, deci egalitatea din enunț este adevărată (compunerea funcțiilor este asociativă).

407. *Fie funcțiile:*

$$f: R \to R, f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ -x, & x > 0; \end{cases}$$
$$g: R \to R\, g(x) = -x^2.$$

Să se demonstreze că: $f\circ g = g$, $g\circ f = g$, $f\circ f = f$.

Soluție.

Deoarece $f(R) = g(R) = (-\infty, 0] \subset R$, există funcțiile $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$.

Avem $f(g(x)) = \begin{cases} g(x) \text{ dacă } g(x) \leqslant 0, \\ -g(x) \text{ dacă } g(x) > 0 \end{cases}$ și cum $g(x) \leqslant 0$ oricare ar fi $x \in R$, rezultă $f(g(x)) = g(x) = -x^2$, dec

$$f\circ g = g.$$

De asemenea, avem:

$$g(f(x)) = -f^2(x);$$

dacă $x \leqslant 0$, atunci $f(x) = x$, $g(f(x)) = -x^2$;
dacă $x > 0$, atunci $f(x) = -x$, $g(f(x)) = -x^2$ și deci $g(f(x)) = -x^2$, $g\circ f = g$.

Compunînd f cu f obținem:

$$f(f(x)) = \begin{cases} f(x), f(x) \leqslant 0, \\ -f(x), f(x) > 0 \end{cases}$$

și deoarece $f(x) \leqslant 0$ oricare ar fi $x \in R$, avem $f(f(x)) = f(x)$ adică $f\circ f = f$.

408. *Fie funcția* $f: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ *și* $e: \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$, *funcția identică a mulțimii* $\{a, b, c\}$.

Să se determine funcțiile $g: \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$ *care satisfac egalitatea* $g\circ f = e$

Soluție.

Există trei astfel de funcții numite „reciproce la stînga" ale funcției f.

Scanned with OKEN Scanner

Ele sînt notate cu g_1, g_2, g_3 și sînt date în diagramele din figura 71.

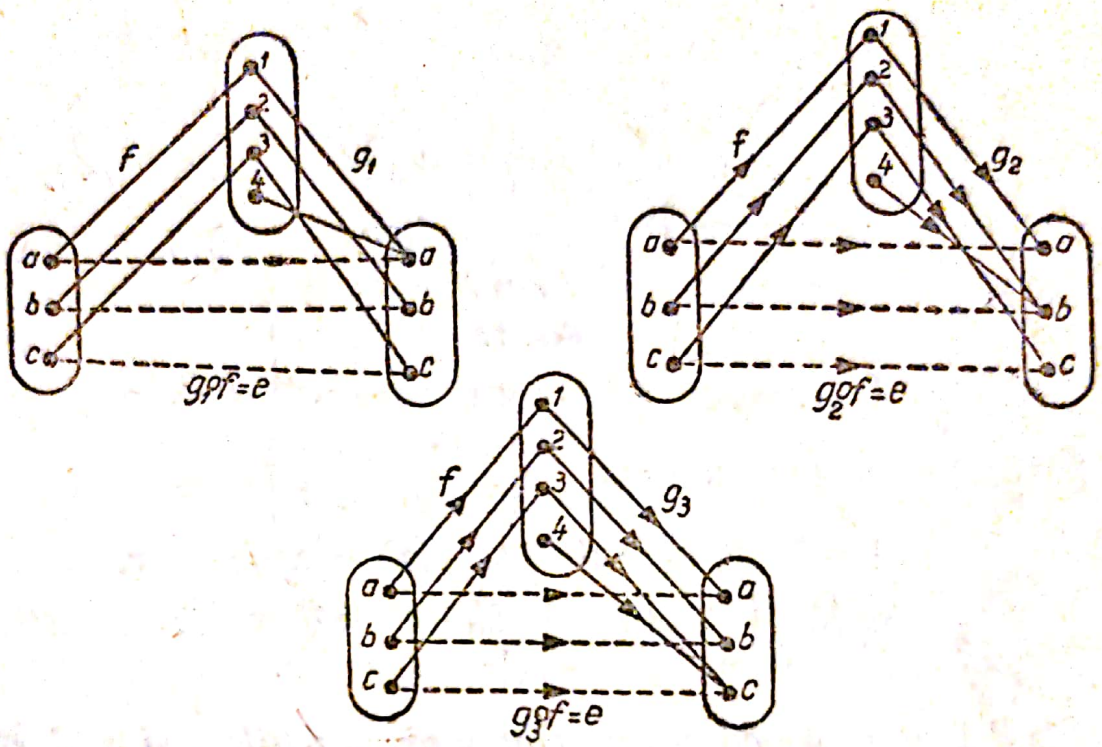


Fig. 71

409. *Fie funcția* $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$ *definită astfel:* $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c, f(4) = c$, iar $e: \{a, b, c\} \to \{a, b, c\}$ funcția *identică a mulțimii* $\{a, b, c\}$.

1) Să se determine toate funcțiile $g: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ *care au proprietatea* $f \circ g = e$.

2) Dacă funcțiile $f: E \to F$, $g: F \to E$ *satisfac egalitatea* $f \circ g = e$, *e fiind funcția identică a mulțimii* F, *să se arate că* f *este surjectivă.*

Soluție.

1) Există două astfel de funcții numite „reciproce la dreapta" ale funcției f. Ele sînt notate cu g_1, g_2 și sînt date în diagramele din figura 72.

2) Să arătăm că oricare ar fi $y \in F$ există $x \in E$ astfel ca $y = f(x)$. Fie $y \in F$ și să notăm cu x elementul $g(y)$ din E. Deoarece $f \circ g = e$, avem $f(g(y)) = e(y) = y$, adică $f(x) = y$ și deci funcția f este surjectivă.

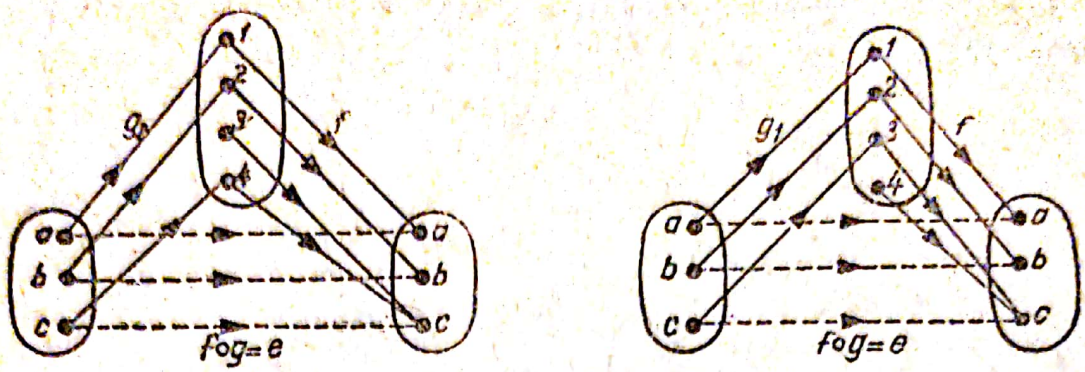


Fig. 72

410. *Se dau funcțiile:*

$$f:[-1,+1]\to[0\ \pi],\ f(x)=\arccos\ x,$$
$$g:[-1,+1]\to E,\ g(x)=4x^3-3x,$$
$$\text{unde}\quad E=g([-1,+1]).$$

1) Să se arate că se pot compune funcțiile f și g și să se determine f∘g.

2) Să se determine toate numerele x pentru care este adevărată egalitatea: $(f\circ g)(x)=3\ \arccos\ x$.

Soluție.

1) Avem: $-1\leqslant 4x^3-3x\leqslant 1\Leftrightarrow\begin{cases}4x^3-3x+1\geqslant 0\\4x^3-3x-1\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(2x-1)^2\geqslant 0\\(x-1)(2x+1)^2\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow(-1\leqslant x\leqslant 1)$$

și deci $g([-1,+1])=[-1,+1]$, astfel că funcțiile f și g se pot compune și $f\circ g:[-1,+1]\to[0,\pi]$, $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\arccos(4x^3-3x)$.

2) Deoarece $-1\leqslant x\leqslant 1$, putem considera $x=\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$.

În acest caz, $\arccos(4x^3-3x)=\arccos(4\cos^3 t-3\cos t)=$

$$=\arccos(\cos 3t)=\begin{cases}3t,\ \text{dacă}\ 0\leqslant 3t\leqslant\pi,\\2\pi-3t,\ \text{dacă}\ \pi<3t\leqslant 2\pi,\\-2\pi+3t,\ \text{dacă}\ 2\pi<3t\leqslant 3\pi\end{cases}=$$

$$= \begin{cases} 3 \arccos x, \text{ dacă } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ 2\pi - 3 \arccos x, \text{ dacă } -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ -2\pi + 3 \arccos x, \text{ dacă } -1 \leqslant x < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\text{deci } (f \circ g)(x) = \begin{cases} -2\pi + 3 \arccos x, \text{ dacă } -1 \leqslant x < -\frac{1}{2}, \\ 2\pi - 3 \arccos x, \text{ dacă } -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 3 \arccos x, \text{ dacă } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

egalitatea din enunț fiind adevărată pentru $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

411. *Fie funcția* $f : E \to F$ *și* $e : E \to E$ *funcția identică a mulțimii* E.

Să se demonstreze că dacă există o funcție $g : F \to E$ *astfel ca* $g \circ f = e$, *atunci* f *este injectivă. Reciproca este adevărată ?*

Soluție.

Fie $x_1 \in E$, $x_2 \in E$ și $f(x_1) = f(x_2)$. Să arătăm că $x_1 = x_2$. Deoarece $g \circ f = e$, avem :

$$g(f(x_1)) = e(x_1) = x_1;$$
$$g(f(x_2)) = e(x_2) = x_2$$

și deoarece $f(x_1) = f(x_2)$ avem și $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, adică $x_1 = x_2$, ceea ce demonstrează că funcția f este injectivă.

Reciproca este adevărată. Într-adevăr, să arătăm că dacă $f : E \to F$ este injectivă, există o funcție $g : F \to E$ astfel ca $g \circ f = e$.

Dacă y este un element din F, considerăm cazurile următoare :

1) y este imaginea unui singur element x din E și deci $y = f(x)$;

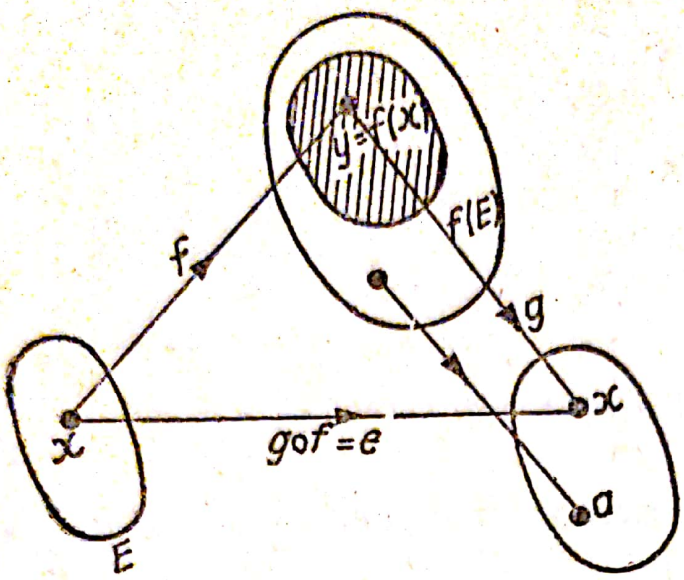


Fig. 73

2) y nu este imaginea niciunui element din L.

Definim funcția $g : F \to E$ astfel:

$$g(y) = \begin{cases} x, \text{ dacă } y = f(x), \\ a, \text{ dacă nu există } x \in E \text{ astfel ca } y = f(x), \end{cases}$$

a fiind un element determinat din E.

Funcția g astfel definită are proprietatea $g \circ f = e$ (fig. 73).

412. *Fie funcțiile* $f : E \to F$, $g : F \to G$.

1) Să se demonstreze că dacă $g \circ f$ *este injectivă, atunci și* f *este injectivă.*

2) Să se demonstreze că dacă $g \circ f$ *este surjectivă, atunci și* g *este surjectivă.*

Soluție.

1) Dacă f n-ar fi injectivă, atunci ar exista $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) = f(x_2)$. În acest caz, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, adică $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ și deci $g \circ f$ nu este injectivă, în contradicție cu ipoteza. Rezultă că f este injectivă.

2) Demonstrăm tot prin reducere la absurd. Să presupunem că g nu este surjectivă. În acest caz există $z \in G$ astfel că oricare ar fi $y \in F$ avem $g(y) \neq z$. Deoarece oricare ar fi $x \in E$ avem $f(x) \in F$, rezultă $g(f(x)) \neq z$, adică $(g \circ f)(x) \neq z$, deci $g \circ f$ nu este surjectivă ceea ce contrazice ipoteza și deci g este o surjecție.

413. *Fie funcția* $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ *reprezentată în diagrama din figura 74.*

Este inversabilă funcția f *? În caz afirmativ să se reprezinte diagrama corespunzătoare funcției* f.

Soluție.

Funcția f este bijectivă și deci inversabilă. Diagrama funcției $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ inversa lui f este cea din fig. 75.

Scanned with OKEN Scanner

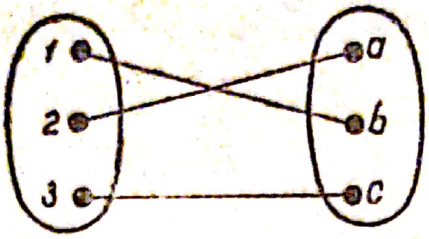


Fig. 74

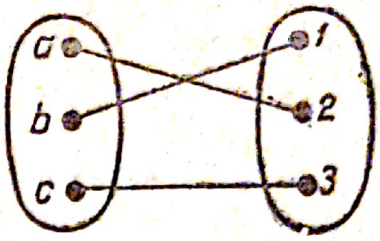


Fig. 75

414. *Să se arate că funcția* $f : [1, 3] \to [3, 7], f(x) = 2x + 1$ *este bijectivă și să se verifice această proprietate a funcției pe graficul ei.*

Să se afle apoi funcția f^{-1} *și să se reprezinte grafic în raport cu același sistem de referință folosit pentru graficul lui* f.

Soluție.

Funcția f este injectivă, deoarece pentru numerele x_1, x_2 din $[1, 3]$ avem: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ea este și surjectivă, deoarece:

$$3 \leqslant 2x + 1 \leqslant 7 \Rightarrow 2 \leqslant 2x \leqslant 6 \Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

Fiind injectivă și surjectivă f este bijectivă și deci este inversabilă.

Aceasta se poate constata și pe graficul funcției din fig. 76 unde se vede că oricare paralelă la axa absciselor dusă prin puncte de pe oy, reprezentînd $[3, 7]$, întîlnește graficul într-un singur punct, deci funcția este bijectivă.

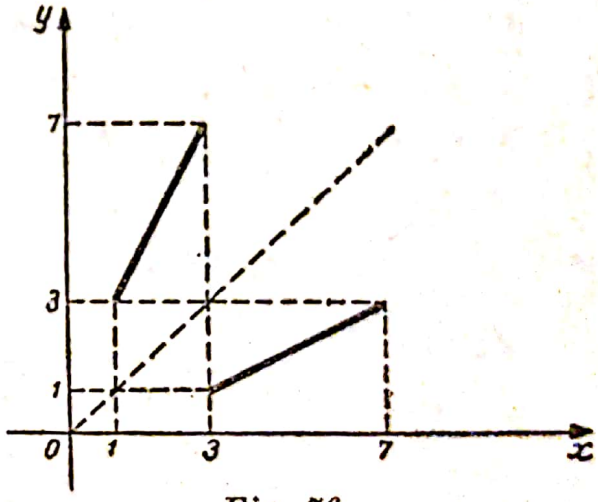


Fig. 76

Deoarece din $y = 2x + 1$ rezultă $x = \frac{1}{2}(y - 1)$ inversa lui f este:

$$f^{-1} : [3, 7] \to [1, 3], \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1).$$

Pe figura 76 se constată că graficele funcțiilor f, $\overset{-1}{f}$ sînt simetrice în raport cu bisectoarea întîia.

415. *Să se determine funcțiile* $f: R \to R$, $f(x) = ax + b$ *care sînt egale cu reciprocele lor.*

Soluție.

Reciproca funcției bijective: $f: R \to R$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ este funcția $\overset{-1}{f}: R \to R$, $\overset{-1}{f}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$. Pentru ca $f = \overset{-1}{f}$ trebuie să avem: $\frac{1}{a} = a$ și $-\frac{b}{a} = b$ sau $a^2 = 1$ și $b(a+1) = 0$, de unde rezultă $a = -1$ și b arbitrar sau $a = 1$ și $b = 0$.

Deci funcțiile $f: R \to R$, $f(x) = ax + b$, egale cu reciprocele lor, sînt:

$$f: R \to R,\ f(x) = -x + b;$$
$$f: R \to R,\ f(x) = x.$$

416. *Să se determine inversele funcțiilor următoare:*

a) $f: R \to R$, $f(x) = 2x - 3$;
b) $g: R \to R$, $g(x) = -x + 4$.

Să se reprezinte grafic într-un sistem xoy ortogonal funcțiile f *și* $\overset{-1}{f}$ *apoi în alt sistem, funcțiile* g *și* $\overset{-1}{g}$.

Soluție.

Funcțiile sînt bijective deci inversabile. Deoarece din $y = 2x - 3$ rezultă $x = \frac{1}{2}(y + 3)$, inversa funcției f este $\overset{-1}{f}: R \to R$ $\overset{-1}{f}(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$.

Inversa lui g este:

$$\overset{-1}{g}: R \to R,\ \overset{-1}{g}(x) = -x + 4:\ g = \overset{-1}{g}$$

Scanned with OKEN Scanner

Funcțiile f și f^{-1} sînt reprezentate grafic în fig. 77 iar g și g^{-1} în fig. 78.

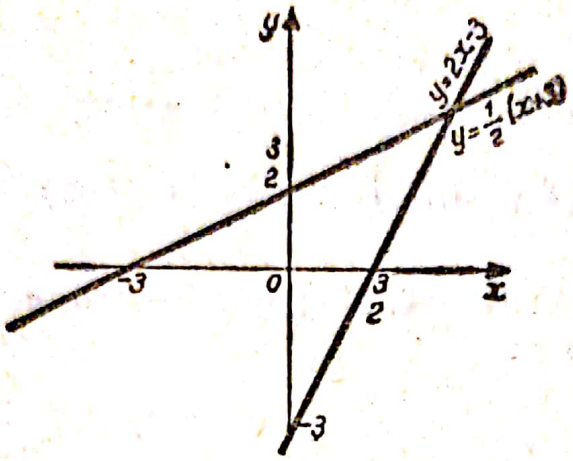


Fig. 77

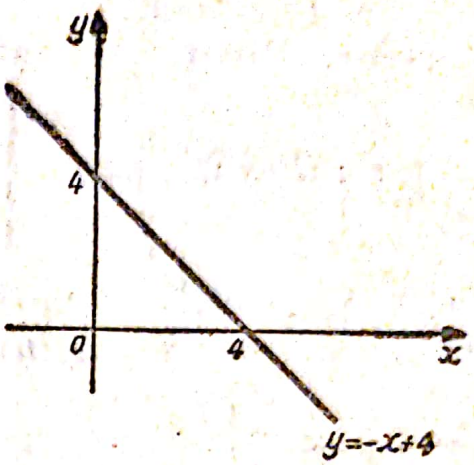


Fig. 78

417. *Fie funcția* $f: R \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 3), \\ 2x - 5, & \text{dacă } x \in [3, +\infty). \end{cases}$$

Să se arate că f este inversabilă și să se afle inversa. Se vor reprezenta grafic funcțiile f și f^{-1}.

Soluție.

Pe graficul funcției, în figura 79, se constată că funcția este bijectivă, deci inversabilă. Să demonstrăm aceasta folosind definiția funcției bijective. Funcția este injectivă. Într-adevăr, dacă $x_1 < 3$, $x_2 < 3$ și $x_1 \neq x_2$, atunci $x_1 - 2 \neq x_2 - 2$, adică $f(x_1) \neq f(x_2)$. De asemenea, la valori diferite ale lui x din $[3, +\infty)$ corespund valori diferite ale funcției. Dacă $x_1 < 3$ și $x_2 \geq 3$, atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$, deoarece $f(x_1) < 1$ iar $f(x_2) \geq$

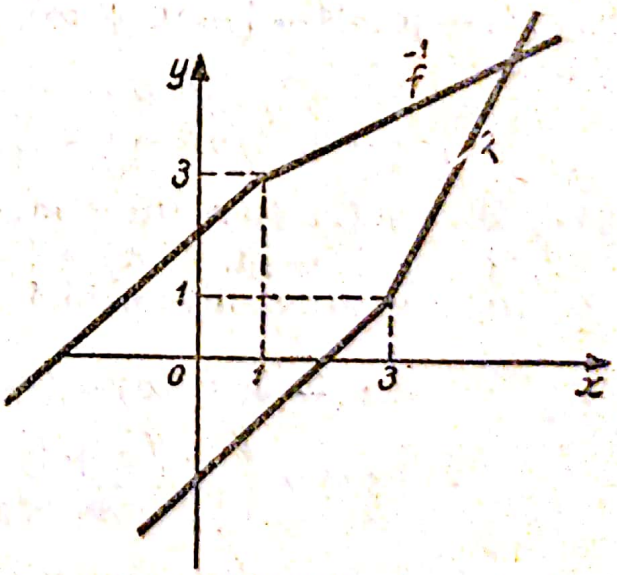


Fig. 79

$\geqslant 1$. Am arătat astfel că dacă $x_1 \in R$, $x_2 \in R$ și $x_1 \neq x_2$, atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$, adică funcția este injectivă. Deoarece oricare număr real este valoare a funcției, ea este și surjectivă, deci bijectivă.

Inversa funcției f este funcția:

$$\overset{-1}{f} : R \to R, \overset{-1}{f}(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1), \\ \frac{1}{2}(x + 5), & \text{dacă } x \in [1, +\infty). \end{cases}$$

418. *Să se arate că funcția* $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 9$ *admite restricții inversabile definite pe:*

a) $[0, +\infty)$;

b) $(-\infty, 0]$;

c) $(-3, 0] \cup [3, +\infty)$.

Să se determine inversele acestor funcții și să se reprezinte grafic.

Soluție.

a) Restricția f_1 a lui f la $[0, +\infty)$:

$f_1 : [0, +\infty) \to [-9, +\infty)$, $f_1(x) = x^2 - 9$ este bijectivă, deci inversabilă. Inversa ei este funcția:

$$\overset{-1}{f_1} : [-9, +\infty) \to [0, +\infty), \quad f_1(x) = \sqrt{x + 9}.$$

b) Restricția bijectivă a lui f la $(-\infty, 0]$ este funcția f_2: $f_2 : (-\infty, 0] \to [-9, +\infty)$, $f_2(x) = x^2 - 9$, iar reciproca sa este:

$$\overset{-1}{f_2} : [-9, +\infty) \to (-\infty, 0], \overset{-1}{f_2}(x) = -\sqrt{x + 9}.$$

c) Restricția f_3 a lui f la $(-3, 0] \cup [3, +\infty)$:

$f_3 : (-3, 0] \cup [3, +\infty) \to [-9, +\infty)$, $f_3(x) = x^2 - 9$ este bijectivă, deci inversabilă. Inversa este:

$$\overset{-1}{f_3} : (-9, +\infty) \to (-3, 0] \cup [3, +\infty),$$

$$\overset{-1}{f_3}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x + 9} & \text{dacă } x \in [-9, 0), \\ \sqrt{x + 9}, & \text{dacă } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Graficele funcțiilor sînt cele din figura 80.

Scanned with OKEN Scanner

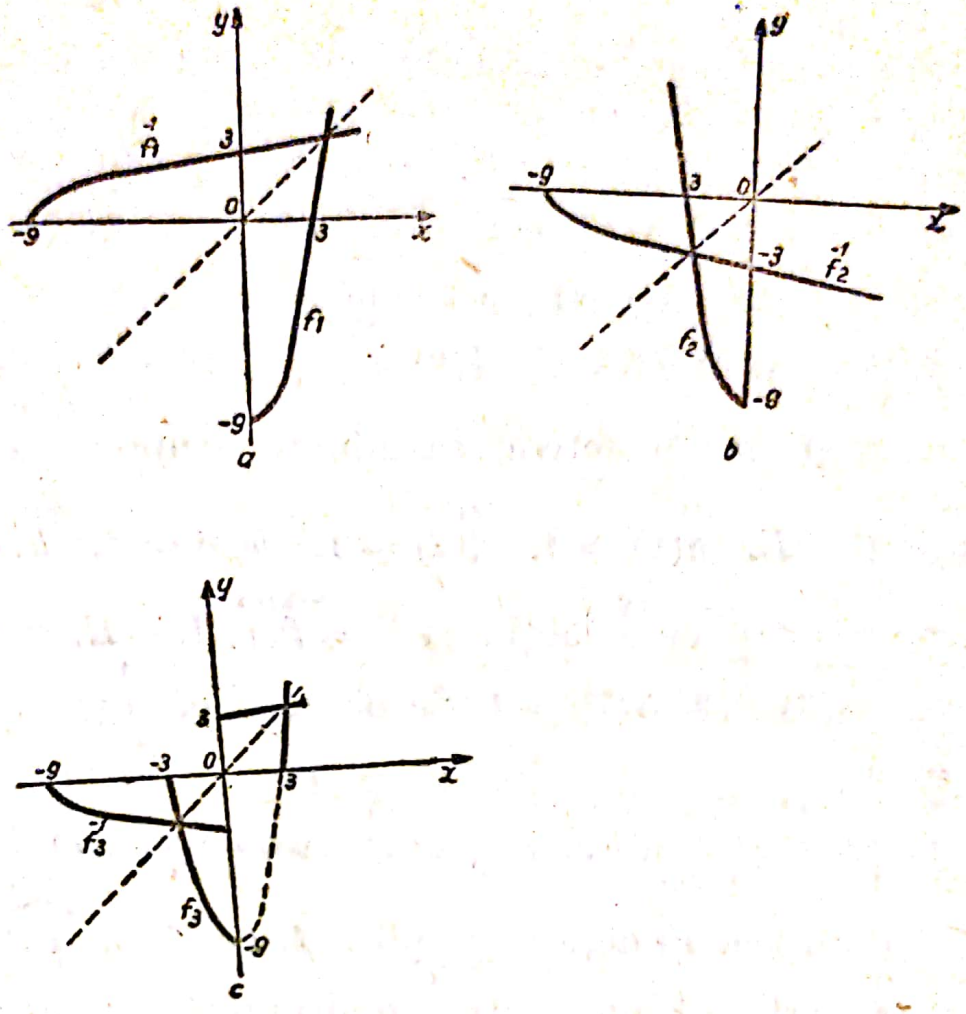


Fig. 80

419. *Fie mulțimile* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $F = \{a, b, c, d\}$ *și aplicațiile:*

$$f : E \to F,\ f(1) = a,\ f(2) = b,\ f(3) = c,\ f(4) = d,$$
$$g : F \to E,\ g(a) = 2,\ g(b) = 4,\ g(c) = 3,\ g(d) = 1.$$

1) Să se determine f^{-1}, g^{-1}, $g \circ f$, $\overbrace{g \circ f}^{-1}$ *și apoi să se compare* $\overbrace{g \circ f}^{-1}$ *cu* $f^{-1} \circ g^{-1}$.

2) Să se demonstreze că dacă funcțiile $f : E \to F$, $g : F \to G$ *admit reciproce, atunci* $\overbrace{g \circ f}^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

1) Funcțiile f și g fiind bijective admit reciproce, anume:

$$\overset{-1}{f}: F \to E,\ \overset{-1}{f}(a) = 1,\ \overset{-1}{f}(b) = 2,\ \overset{-1}{f}(c) = 3,\ \overset{-1}{f}(d) = 4;$$

$$\overset{-1}{g}: E \to F,\ \overset{-1}{g}(2) = a,\ \overset{-1}{g}(4) = b,\ \overset{-1}{g}(3) = c,\ \overset{-1}{g}(1) = d.$$

De asemenea, avem:

$$h = g \circ f : E \to E,\quad h(1) = 2,\quad h(2) = 4,\quad h(3) = 3,\quad h(4) = 1.$$

și deoarece h este bijectivă, ea admite reciprocă, anume:

$$\overset{-1}{h} = \overset{-1}{\widehat{g \circ f}}: E \to E,\quad \overset{-1}{h}(1) = 4,\quad \overset{-1}{h}(2) = 1,\quad \overset{-1}{h}(3) = 3,\quad \overset{-1}{h}(4) = 2.$$

Compunînd $\overset{-1}{f}$ cu $\overset{-1}{g}$ obținem $S = \overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}: E \to E$, $S(2) = 1$, $S(4) = 2$, $S(3) = 3$, $S(1) = 4$. Se observă că $\overset{-1}{h} = S$, adică $\overset{-1}{\widehat{g \circ f}} = \overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}$.

2) Dacă f și g admit reciproce, atunci și compusa lor $g \circ f$ are reciprocă. Funcția $g \circ f$ aplică E pe G, iar $\overset{-1}{\widehat{g \circ f}}$ aplică G pe E; $\overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}$ este tot o aplicație a mulțimii G pe mulțimea E.

Fie $z \in G$ și să notăm $\overset{-1}{g}(z) = y \in F$, iar $\overset{-1}{f}(y) = x \in E$. Avem:

$$(\overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g})(z) = \overset{-1}{f}\ (\overset{-1}{g}(z)) = \overset{-1}{f}(y) = x;$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z, \text{ adică } \overset{-1}{(g \circ f)}(z) = x$$

și deci $\overset{-1}{\widehat{g \circ f}} = \overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}$.

420. *Fie E o mulțime finită de numere întregi, mulțime avînd cel puțin trei elemente, și funcția $f: E \to E$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.*

1) Să se determine mulțimea E.

2) Să se arate că f are reciprocă și să se compare aceste două funcții.

3) Să se arate că funcția $f: R - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$ *are reciprocă. În ce caz funcția* f *și reciproca sa* $\overset{-1}{f}$ *sînt egale ?*

Soluție.

1) Funcția dată este injectivă și fiind o aplicație a mulțimii finite E pe ea însăși, este și surjectivă și deci f este bijectivă. Deoarece funcția ia valori întregi, trebuie ca $\frac{x+1}{x-1}$ să fie număr întreg și fiindcă $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ și x este întreg, rezultă că $x-1$ trebuie să fie divizor al lui 2 și deci $x \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Ținînd seama că E are cel puțin trei elemente și că $f(-1) = 0, f(0) = -1, f(2) = 3, f(3) = 2$ rezultă $E = \{-1, 0, 2, 3\}$.

2) Funcția $f: \{-1, 0, 2, 3\} \to \{-1, 0, 2, 3\}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ fiind bijectivă are reciprocă și anume: $f: \{-1, 0, 2, 3\} \to \{-1, 0, 2, 3\}$, $\overset{-1}{f}(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Funcția dată este egală cu reciproca sa.

3) Deoarece este adevărată implicația $f: (x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, funcția f este injectivă; deoarece ecuația cu necunoscuta x, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ are soluții în $R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, oricare ar fi y în $R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, funcția f este și surjectivă și deci bijectivă. Fiind bijectivă, f admite reciprocă: $f^{-1}: R - \left\{\frac{a}{c}\right\} \to R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$. Pentru a avea $\overset{-1}{f} = f$ este necesar ca funcțiile să aibă același domeniu de definiție și deci $d = -a$. Această condiție este și suficientă pentru egalitatea funcțiilor. Într-adevăr, dacă $d = -a$

funcțiile sînt definite pe $R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$, iau valori în $R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ și $f^{-1}(x) = f(x)$ pentru oricare x din domeniul de definiție.

421. *Care dintre funcțiile următoare sînt pare și care sînt impare ?*

1) $f(x) = x^3 + x$, $x \in R$;

2) $f(x) = x^4 + 2x^2$, $x \in R$;

3) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, +1)$;

4) $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$, $x \in R$;

5) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x + 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

Soluție.

Funcțiile de la 1), 3), 4) sînt impare iar cele de la 2) și 5) sînt pare.

Pentru funcția de la nr. 4) avem:

$$f(-x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) = \ln \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)(\sqrt{1+x^2} - x)}{\sqrt{1+x^2} - x} =$$

$$= \ln \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = -\ln(\sqrt{1+x^2} - x) = -f(x),$$

deci $f(-x) = -f(x)$ oricare ar fi x real, deci funcția f este impară.

422. *Fie funcția* $f: R \to R$.

1) *Să se arate că dacă dreapta de ecuație* $x = a$ *este o axă de simetrie a graficului funcției* f, *atunci oricare ar fi* $x \in R$ *este adevărată egalitatea* $f(x) = f(2a - x)$.

2) *Să se demonstreze că dacă graficul funcției* f *admite două axe de simetrie paralele cu axa ordonatelor, atunci funcția este periodică.*

Să se verifice într-un caz particular.

Soluție.

1) Dreapta $x = a$ este o axă de simetrie a graficului funcției f dacă $f(a - h) = f(a + h)$ oricare ar fi $h > 0$.

Dacă x este un număr real arbitrar, luînd $h = |x - a|$ avem: $f(a - |x - a|) = f(a + |x - a|)$ sau $f(x) = f(2a - x)$.

2) Fie $a \neq b$ și $x = a$, $x = b$, ecuațiile celor două axe de simetrie (fig. 81). Deoarece $x = a$ este axă de simetrie a graficului lui f, avem: $f(x) = f(2a - x)$; $x = b$ fiind axă de simetrie avem: $f(2a - x) = f[2b - (2a - x)]$, adică $f(2a - x) = f(x + 2a - 2b)$ și deci oricare ar fi $x \in R$, $f(x) = f(x + 2b - 2a)$, adică f este periodică cu perioada $2(b - a)$.

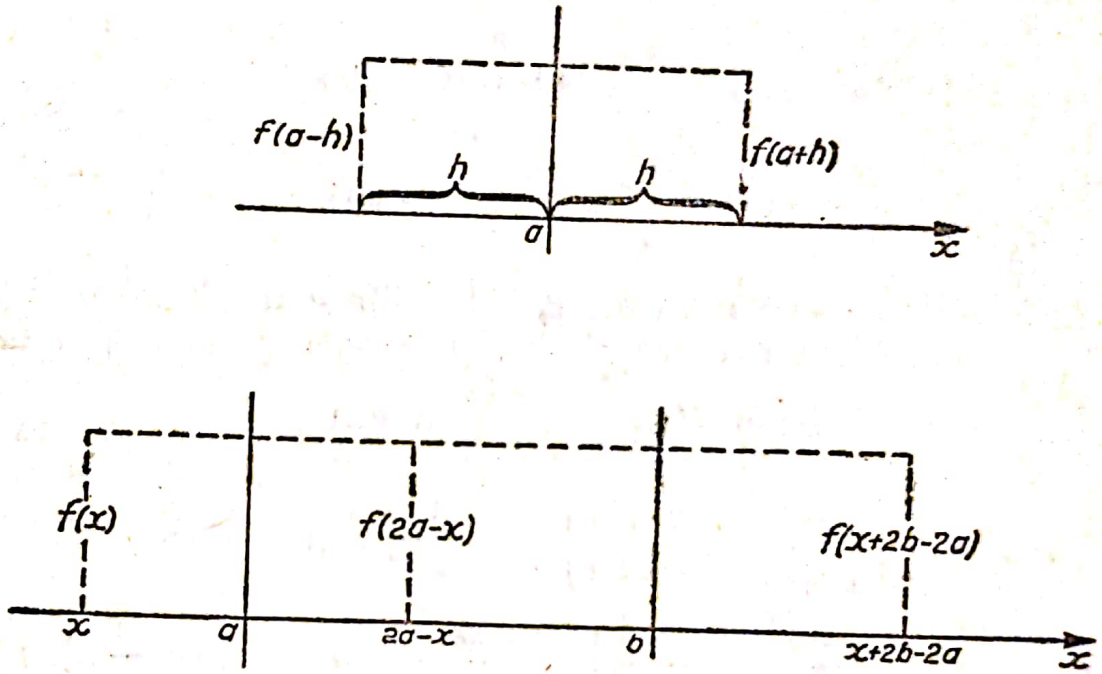


Fig. 81

Funcția $f: R \to R$, $f(x) = \sin x$, al cărei grafic are axele de simetrie $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 3\frac{\pi}{2}$, este periodică cu perioada $2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$.

423. *Fie funcția* $f: (-a, a) \to R$, $a > 0$. *Să se arate că* f *poate fi scrisă ca sumă a două funcții, una pară iar cealaltă impară.*

Să se aplice acest rezultat funcției $f:(-1,1)\to R$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

Soluție.

Să presupunem că există o funcție pară $g:(-a,a)\to R$ și o funcție impară $h:(-a,a)\to R$ astfel ca $f=h+g$.

Avem oricare ar fi $x\in(-a,a)$: $g(-x)=g(x)$, $h(-x)=-h(x)$, $f(x)=g(x)+h(x)$, $f(-x)=g(x)-h(x)$.

Adunînd și scăzînd ultimele două egalități obținem:

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],$$

$$h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

Reciproc, se verifică ușor că funcțiile g și h date de ultimele egalități sînt respectiv pară și impară și că $g+h=f$.

În cazul funcției $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ avem:

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x^2+1}{x^2-1},\quad g(-x)=g(x),$$

$$h(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{1-x}\right)=\frac{2x}{1-x^2},\quad h(-x)=-h(x).$$

424. *A, B, C fiind părți ale unei mulțimi E, să se demonstreze egalitățile următoare folosind proprietățile funcției caracteristice.*

1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Soluție.

Folosind proprietatea $A=B\Leftrightarrow f_A(x)=f_B(x)$, $\forall x\in E$, vom demonstra egalitatea 1) calculînd cu ajutorul lui $f_A(x)$, $f_B(x)$, $f_C(x)$ funcțiile caracteristice ale mulțimilor $A\cup(B\cap C)$, $(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Pentru simplificare vom scrie f_A în loc de $f_A(x)$, etc. Avem:

$$f_{A\cup(B\cap C)} = f_A + f_{B\cap C} - f_A \cdot f_{B\cap C} = f_A + f_B \cdot f_C - f_A \cdot f_B \cdot f_C;$$

$$f_{(A\cup B)\cap(A\cup C)} = f_{A\cup B} \cdot f_{A\cup C} = [f_A + f_B - f_A \cdot f_B] \cdot$$

$$\cdot [f_A + f_C - f_A \cdot f_C] = f_A^2 + f_A \cdot f_C - f_A^2 \cdot f_C + f_A \cdot f_B +$$

$$+ f_B \cdot f_C - f_A \cdot f_B \cdot f_C - f_A^2 \cdot f_B - f_A \cdot f_B \cdot f_C + f_A^2 \cdot f_B \cdot f_C.$$

Ținînd seama că $f_A^2 = f_A$, obținem după reducerea termenilor asemenea:

$$f_{(A\cup B)\cap(A\cup C)} = f_A + f_B \cdot f_C - f_A \cdot f_B \cdot f_C \text{ și deci}$$

$f_{A\cup(B\cap C)} = f_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}$, de unde rezultă că egalitatea de la punctul 1) este adevărată.

Egalitatea de la punctul 2) se demonstrează în mod asemănător.

425. *A, B, C fiind submulțimi ale unei mulțimi E, să se demonstreze folosind proprietățile funcției caracteristice, că implicațiile următoare sînt adevărate:*

1) $(A \cup B = A \cap B) \Rightarrow (A = B)$;

2) $\left.\begin{array}{l} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{array}\right\} \Rightarrow (B = C)$.

Soluție.

1) Avem: $A \cup B = A \cap B \Rightarrow f_{A\cup B}(x) = f_{A\cap B}(x) = f_A(x) +$

$+ f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) \cdot f_B(x) \Rightarrow f_A(x) + f_B(x) -$

$- 2f_A(x) \cdot f_B(x) = 0.$

Ținînd seama că $f_A(x)$ este 0 sau 1 avem $f_A(x) = f_A^2(x)$ și de asemenea $f_B(x) = f_B^2(x)$, încît:

$(A \cup B = A \cap B) \Rightarrow f_A^2(x) + f_B^2(x) - 2f_A(x) \cdot f_B(x) = 0 \Rightarrow [f_A(x) -$

$- f_B(x)]^2 = 0 \Rightarrow f_A(x) = f_B(x) \Rightarrow A = B$ și deci implicația 1) este adevărată.

2) Avem:

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = A \cap C \\ A \cup B = A \cup C \end{array}\right\} \Rightarrow f_{A\cap B}(x) = f_{A\cap C}(x), \quad f_{A\cup B}(x) = f_{A\cup C}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) \cdot f_C(x) \\ f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = f_A(x) + f_C(x) - f_A(x) \cdot f_C(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_B(x) = f_C(x) \Rightarrow B = C$ și deci implicația 2) din enunț este demonstrată.

426. *Fie mulțimea E, iar A și B două părți ale ei. Notînd cu $\overline{A}$, $\overline{B}$ complementarele acestor submulțimi în raport cu E, să se demonstreze folosind proprietățile funcției caracteristice a unei mulțimi că următoarele egalități sînt adevărate (relațiile lui De Morgan)*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Soluție.

Ținînd seama de proprietățile funcției caracteristice, avem:

$$f_{\overline{A \cup B}}(x) = 1 - f_{A \cup B}(x) = 1 - f_A(x) - f_B(x) + f_A(x) \cdot f_B(x),$$

$$f_{\overline{A} \cap \overline{B}}(x) = f_{\overline{A}}(x) \cdot f_{\overline{B}}(x) = [1 - f_A(x)] \cdot [1 - f_B(x)] = 1 -$$
$$- f_A(x) - f_B(x) + f_A(x) \cdot f_B(x)$$

și deci $f_{\overline{A \cup B}}(x) = f_{\overline{A} \cap \overline{B}}(x)$, de unde rezultă $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Pentru relația a doua din enunț, avem:

$$f_{\overline{A \cap B}}(x) = 1 - f_{A \cap B}(x) = 1 - f_A(x) \cdot f_B(x),$$

$$f_{\overline{A} \cup \overline{B}}(x) = f_{\overline{A}}(x) + f_{\overline{B}}(x) - f_{\overline{A}}(x) \cdot f_{\overline{B}}(x) = 1 - f_A(x) + 1 -$$
$$- f_B(x) - [1 - f_A(x)] \cdot [1 - f_B(x)] = 1 - f_A(x) + 1 -$$
$$- f_B(x) - 1 + f_B(x) + f_A(x) - f_A(x) \cdot f_B(x) = 1 - f_A(x) \cdot$$
$$\cdot f_B(x)$$ și deci $f_{\overline{A \cap B}}(x) = f_{\overline{A} \cup \overline{B}}(x)$, de unde rezultă $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

427. *Fie o mulțime E, iar a și b numere reale neegale. Pentru fiecare parte A a lui E se definește funcția: $f_A : E \to \{a, b\}$,*

$$f_A(x) = \begin{cases} a, & \text{dacă } x \in A \\ b, & \text{dacă } x \notin A. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să se găsească toate funcțiile care au proprietatea : $f_{A\cap B} = f_A \cdot f_B$ *oricare ar fi părțile* A, B *ale lui* E.

Soluție.

Formăm tabelul următor cu valorile funcțiilor f_A, f_B, $f_A \cdot f_B$, $f_{A\cap B}$, în ipoteza că mulțimile $A - B$, $B - A$, $A \cap B$ nu sînt vide:

	$f_A(x)$	$f_B(x)$	$f_A(x) \cdot f_B(x)$	$f_{A\cap B}(x)$
$x \in A-B$	a	b	ab	b
$x \in B-A$	b	a	ab	b
$x \in A\cap B$	a	a	a^2	a
$x \notin A\cup B$	b	b	b^2	b

Pentru a avea $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ oricare ar fi $x \in E$, trebuie să fie adevărate egalitățile:

$$\begin{cases} ab = b, \\ a^2 = a \\ b^2 = b \end{cases} \text{, adică} \quad \begin{cases} b(a-1) = 0, \\ a(a-1) = 0, \\ b(b-1) = 0. \end{cases}$$

Ținînd seama că $a \neq b$ avem $a \neq 0$ (dacă $a = 0$, din $b(a-1) = 0$ rezultă $b = 0$ și deci $a = b$), iar din $a(a-1) = 0$, rezultă $a = 1$. Deoarece $b \neq 1$, din $b(b-1) = 0$ se obține $b = 0$.

În ipoteză că există funcții satisfăcînd egalitatea din enunț, am obținut $a = 1$, $b = 0$ și deci $f_A : E \to \{0, 1\}$, $f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A, \\ 0, & \text{dacă } x \notin A. \end{cases}$

Se verifică ușor că $f_{A\cap B}$, $f_A \cdot f_B$ sînt ambele definite pe E, iau valori în $\{0, 1\}$ și $f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ pentru fiecare x din E, oricare ar fi părțile A, B ale lui E (chiar și cînd una din mulțimile A, B este vidă, sau amîndouă). Pentru fiecare parte A a lui E există deci o singură funcție f_A îndeplinind condițiile din enunț (funcția caracteristică a mulțimii A).

Scanned with OKEN Scanner

428. *Fie $\mathcal{P}(E)$ mulțimea părților unei mulțimi E și F mulțimea aplicațiilor definite pe E cu valori în $\{0, 1\}$. Să se arate că aplicația $A \to f_A$ este o bijecție între $\mathcal{P}(E)$ și F. (Prin A s-a notat o parte a mulțimii E, iar prin f_A funcția caracteristică a mulțimii A.)*

Să se deducă de aici numărul de aplicații ale unei mulțimi finite E, cu n elemente, în $\{0, 1\}$.

Soluție.

Aplicația care face ca fiecărei părți A a mulțimii E să-i corespundă funcția caracteristică f_A, este injectivă.

Într-adevăr, fie $A \subset E$, $B \subset E$. Dacă $A \neq B$, există un element al uneia din ele care nu face parte din cealaltă.

Fie $x \in A$ și $x \notin B$. În acest caz, conform definiției funcției caracteristice, $f_A(x) = 1$ și $f_B(x) = 0$, deci $f_A(x) \neq f_B(x)$.

Am demonstrat astfel că $A \neq B \Rightarrow f_A \neq f_B$, deci aplicația $A \to f_A$ este injectivă.

Să demonstrăm că ea este și surjectivă. Pentru aceasta vom arăta că oricare funcție definită pe E cu valori în $\{0, 1\}$ este funcția caracteristică a unei părți a lui E. Fie funcția $f: E \to \{0, 1\}$. Notăm cu A mulțimea tuturor elementelor x ale lui E pentru care $f(x) = 1$. Pentru celelalte elemente din E avem $f(x) = 0$. De aici rezultă că f este funcția caracteristică a mulțimii A și deci aplicația $A \to f_A$ este surjectivă. Fiind injectivă și surjectivă ea este bijectivă.

Există tot atîtea aplicații ale mulțimii finite, E, în $\{0, 1\}$, cîte părți are E. Dacă E are n elemente, există 2^n submulțimi ale lui E și deci 2^n aplicații ale unei mulțimi cu n elemente într-o mulțime cu 2 elemente.

Scanned with OKEN Scanner

FUNCȚII

EXERCIȚII PROPUSE

429. *Fie* $E = \{0, 1, 5, 6\}$ *și* $F = \{1, 2, 3, 4\}$. *Care dintre diagramele reprezentate în figura 82 reprezintă o funcție definită pe* E *cu valori în* F *și care nu ?*

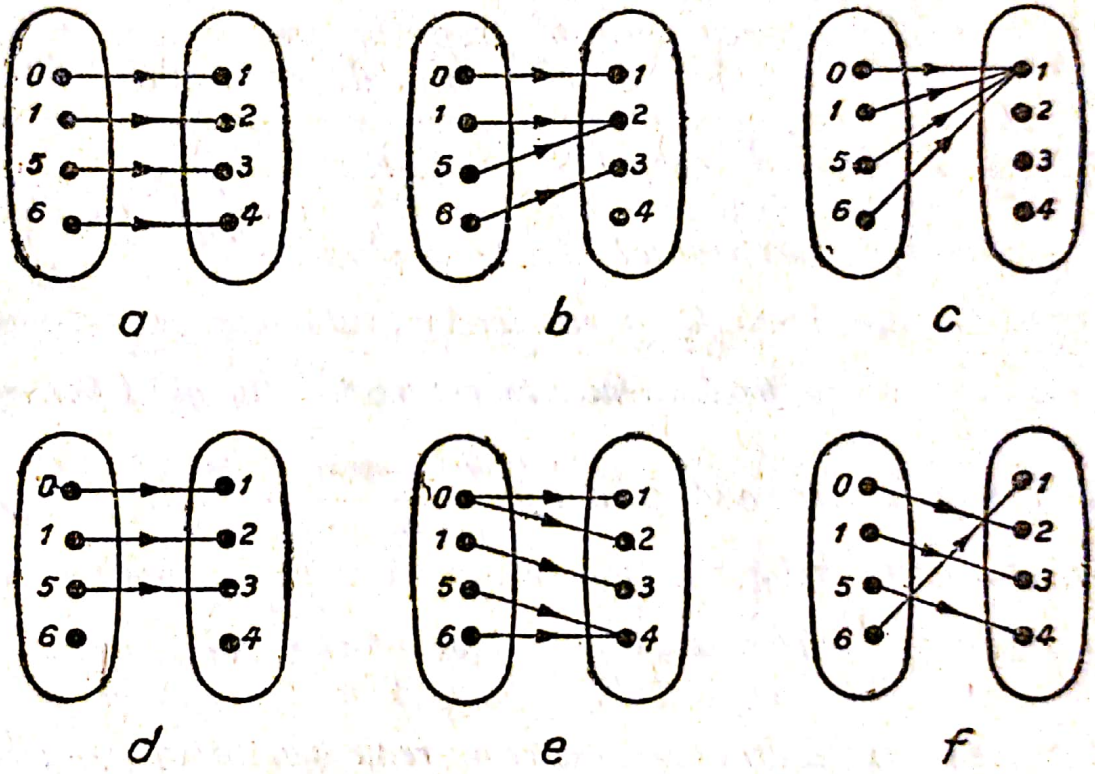


Fig. 82

430. *Fie mulțimile* $E = \{1, 3, 5, 6\}$, $F = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ *și* $x \in E$, $y \in F$. *Care dintre relațiile următoare reprezintă o funcție definită pe* E *cu valori în* F *? Dar o funcție definită pe* F *cu valori în* E *?*

a) $x + y = 6$;
b) $y = x + 1$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $x = y$;
d) $y = x^2$;
e) $y = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$;
f) $y^5 - 11y^4 + 41y^3 - 61y^2 + 30y - x + 1 = 0$.

431. *Fie mulțimile* $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{1, 2\}$.
Să se precizeze toate aplicațiile lui E *în* F, *indicîndu-se și diagramele respective.*

432. *Fie* $\mathcal{R}$ *o relație între elementele mulțimii* E. *În care din cazurile următoare* $\mathcal{R}$ *definește o aplicație a lui* E *în* E ?
a) E *este mulțimea tuturor dreptelor situate într-un plan dat și trecînd printr-un punct dat al planului;* $\mathcal{R}$ *este relația de perpendicularitate a dreptelor.*
b) E *este mulțimea tuturor dreptelor din spațiu trecînd printr-un punct dat, iar* $\mathcal{R}$ *este relația de perpendicularitate.*
c) E *este mulțimea planelor care trec printr-o dreaptă dată, iar* $\mathcal{R}$ *relația de perpendicularitate a planelor.*
d) E *este mulțimea planelor care trec printr-un punct dat. iar* $\mathcal{R}$ *relația de perpendicularitate a planelor.*

433. *În mulțimea* Q *a numerelor raționale se definește relația care face ca fiecărui număr rațional* $\frac{m}{n}$, m *și* n *întregi.* $n \neq 0$, *să-i corespundă numărul* $\frac{m^2 - mn + n^2}{m^2 + mn + n^2}$. *Este funcțională această relație ? Dar relația care face ca fiecărui număr rațional* $\frac{m}{n}$ *să-i corespundă numărul* $m - n$?

434. *Fie* M *mulțimea numerelor reale de forma* $x + y\sqrt{5}$, *unde* $x \in Q$, $y \in Q$.
Asociind fiecărui număr $x + y\sqrt{5}$ *din* M *numărul* $x - y\sqrt{5}$, *definim o funcție pe* M *cu valori în* M ?

435. *Fie* M *mulțimea numerelor întregi de forma* $5x + 7y$, x *și* y *fiind numere întregi.*
Asociind fiecărui număr $5x + 7y$ *din* M *numărul* $5x - 7y$, *definim o funcție pe* M *cu valori în* M ?

Scanned with OKEN Scanner

436. *Următoarele exprimări sînt greșite. Să se explice de ce și să se corecteze.*

a) „*Fie funcția* $f: (0, +\infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$“.

b) „*Se dă funcția* $f: [-2, +2] \to [0, 4]$, $f(x) = x^2 + 1$“.

437. *Fie relația* $\mathcal{R}$ *definită în mulțimea* $[0, 1)$ *astfel:*

$$x\mathcal{R}y: \sqrt{(1-x)(1-y)} - \sqrt{xy} = 1.$$

Este această relație o funcție?

438. *Asociind fiecărui număr* x *din* $\{0, 1, 2, 3\}$ *numărul* $x^2 - x$ *și fiecărui număr* x *din* $\{1, 3, 4, 5\}$ *numărul* $4x^2 - 13x + 9$, *definim o funcție pe* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *cu valori în* R?

Dar dacă se asociază fiecărui număr x *din* $\{0, 1, 2, 3\}$ *numărul* $2x - 1$ *și fiecărui* x *din* $\{1, 3, 4, 5\}$ *numărul* $x^3 + x - 1$, *se obține o aplicație a mulțimii* $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *în* R?

439. *Relația* $y = |x^2 - x|$, $x \in R$, $y \in R$ *definește o funcție* $f: R \to R$ *de argument* x? *Dar o funcție de argument* y?

440. *Să se găsească mulțimea valorilor pentru funcțiile următoare:*

a) $f: [0, 2] \to R$, $f(x) = 2x - 1$;
b) $f: R \to R$, $f(x) = x^2 - 3x + 3$;
c) $f: (0, +\infty) \to R$, $f(x) = -x^2 + x$;
d) $f: [-1, +1] \to R$, $f(x) = 2x^2 + 3$;
e) $f: R \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 2}$.

441. *În mulțimea* $[1, +\infty)$ *se dă relația* $y = \dfrac{[x]}{x}$, *unde prin* $[x]$ *s-a notat cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu* x (*partea întreagă a lui* x).

a) Este această relație o funcție $f: [1, +\infty) \to R$?

În caz afirmativ să se calculeze $f(1)$, $f(2)$, $f\left(\dfrac{8}{3}\right)$.

b) *Să se demonstreze că dacă* $x \geqslant 1$, *atunci* $\frac{1}{2} < \frac{[x]}{x} \leqslant 1$.

442. *Fie funcția* $f: R \to R$, *astfel încît* $f(2x+1) = x^2 + x - 2$, *oricare ar fi* x *real. Să se calculeze* $f(x)$.

443. *Fie funcția* $f: R \to R$. *Știind că* $f\left(m + \frac{2}{m}\right) = m^2 + \frac{4}{m^2}$ *oricare ar fi* $m \neq 0$, *să se calculeze:* $f(\sqrt{8})$; $f(3)$; $f(a)$ *cu* $|a| \geqslant 2\sqrt{2}$.

Să se scrie două funcții care să îndeplinească condițiile din enunț și să nu fie egale.

444. *Fie funcția* $f: R \to R$, $f(x) = ax + b$.

Să se verifice că egalitățile următoare sînt adevărate, oricare ar fi $x \in R$:

$$f(x) + f(5x) = 2f(3x);$$

$$f(x) + f(2x) + f(3x) + \ldots + f(nx) = \frac{n}{2}[f(x) + f(nx)].$$

445. *Fie funcțiile:*

$f: \{-1, 0, 1, 2\} \to R$, $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$;
$g: \{-1, 0, 1, 2\} \to R$, $g(x) = x^5 - x^4 - 3x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Să se arate că $f = g$.

446. *Sînt egale funcțiile următoare?*

$f: \{-1, 0, 1\} \to R$, $f(x) = x^3 - x$;
$g: \{-1, 0, 1\} \to R$, $g(x) = \sin \pi x$.

447. *Se dau funcțiile:*

$f: [1, 3] \to R$, $f(x) = \max\limits_{1 \leqslant t \leqslant x} (-t^2 + 4t - 3)$;

$g: [1, 3] \to R$, $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 3, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$

Să se arate că $f = g$.

Scanned with OKEN Scanner

448. *Se dau funcțiile:*

$$f:[-1,+1]\to R,\quad f(x)=\begin{cases}-x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x+1, & 0<x\leqslant 1;\end{cases}$$

$$g:[-1,+1]\to R,\quad g(x)=max(-x+1,\,x+1);$$

$$h:[-1,+1]\to R,\quad h(x)=\begin{cases}|x|+1, & -1\leqslant x\leqslant 1 \text{ și } x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Sînt adevărate egalitățile: $f=g$, $f=h$ *?*

449. *Fie funcțiile:*

$$f:[4,+\infty)\to R,\quad f(x)=\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}};$$

$$g:[4,+\infty)\to R,\quad g(x)=\begin{cases}4, & 4\leqslant x\leqslant 8,\\ 2\sqrt{x-4}, & x>8.\end{cases}$$

Sînt egale aceste funcții ?

450. *Fie mulțimea* $E=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ *și funcția* $f:E\to R$,

$$f(x)=\begin{cases}x, \text{ dacă } x\in E \text{ și } x\leqslant 0,\\ 1, \text{ dacă } x\in E \text{ și } x>0.\end{cases}$$

Să se determine restricțiile lui f *la mulțimile:*

$$A=\{-3,-2,-1,0\};$$
$$B=\{-3,-2,-1,1\};$$
$$C=\{1,2,3\}.$$

451. *Fie funcția* $f:R\to R$.

$$f(x)=\begin{cases}x, \text{ dacă } x \text{ este rațional},\\ -x, \text{ dacă } x \text{ este irațional}.\end{cases}$$

Să se determine restricțiile lui f *la mulțimile:*
N *(mulțimea numerelor naturale);*
Z *(mulțimea numerelor întregi);*
Q *(mulțimea numerelor raționale).*

452. *Fie funcția* $f:\{1,3,5\}\to R$ *pentru care* $f(1)=0$; $f(3)=2$; $f(5)=12$.

Să se construiască o prelungire $g:R\to R$ *a funcției* f, *de forma* $g(x)=ax^2+bx+c$.

453. *Fie funcția* $f: \{1, 2, 3, 4\} \to R$, $f(x) = x - 1$.
Să se scrie două prelungiri ale lui f la mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *și două prelungiri la mulțimea* $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

454. *Se dă funcția* $f: \{1, 2, 3\} \to R$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
Să se determine o prelungire f_1 *a lui f la R, astfel ca* $f_1(-1) = 1$, $f_1(4) = 2$.

455. *Fie mulțimile* $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{a, b\}$.
a) Să se scrie toate aplicațiile surjective ale lui E în F și să se facă diagramele respective.
b) Să se scrie toate aplicațiile nesurjective ale lui E în F și să se facă diagramele respective.

456. *Care dintre funcțiile următoare sînt surjective și care nu sînt surjective ?*

a) $f: \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1\}$, $f(x) = x^2$;

b) $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{3}$;

c) $f: R \to [1, +\infty)$, $f(x) = x^2 + 1$;

d) $f: R \to [-1, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

e) $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = 2x^2 - x - 1$;

f) $f: R - \{1\} \to R - \{1\}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;

g) $f: R \to \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;

h) $f: \left[0, 3\frac{\pi}{2}\right] \to [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$, $f(x) = \sin x + \cos x$;

i) $f: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \to [1, \sqrt{2}]$, $f(x) = \sin x - \cos x$;

j) $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \text{ este rațional,} \\ x^3, \text{ dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$

457. *Fie mulțimile:* $E = \{1, 2\}$, $F = \{a, b, c, d\}$.
a) Să se scrie toate aplicațiile injective ale mulțimii E în mulțimea F și să se facă diagramele acestor funcții.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se scrie toate aplicațiile neinjective ale lui E în F și să se facă diagramele respective.

c) Există aplicații injective ale lui F în E ?

458. *Care dintre funcțiile următoare sînt injective și care nu sînt injective ?*

a) $f: R \to R$, $f(x) = 3x + 8$;

b) $f: \{-1, 0, 1, 4\} \to R$, $f(x) = -x^2 + 6x$;

c) $f: (-\infty, 0] \to R$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$;

d) $f: R \to R$, $f(x) = \dfrac{3x}{2 + x^2}$;

e) $f: R \to R$, $f(x) = |x^2 - x - 6|$;

f) $f: (-1, +\infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$;

g) $f: [-3, +3] \to R$, $f(x) = \begin{cases} x - 2, & -3 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x, & 0 < x \leqslant 3; \end{cases}$

h) $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leqslant 0, \\ 1, & \\ x, & x > 0; \end{cases}$

i) $f: [0, +\infty) \to R$, $f(x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant x} (-t^2 + 5t + 6)$;

j) $f: (0, +\infty) \to R$, $f(x) = [x]$;

k) $f: \left(\dfrac{\pi}{2}, 3\dfrac{\pi}{4}\right) \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + tg\, x}$;

459. *Să se demonstreze că funcțiile următoare nu sînt injective :*

a) $f: \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \to (0, +\infty)$, $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 3}$;

b) $f: (-1, +\infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{|x - 1|}{|x + 1|}$;

c) $f: (-1, +\infty) \to R$, $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{(x + 1)^2}$;

d) $f: \left[0, \dfrac{5\pi}{4}\right] \to R$, $f(x) = \sin x + \cos x$;

e) $f:\left[0, 3\frac{\pi}{2}\right) \to R$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$;

f) $f: [0, 2\pi] \to R$, $f(x) = \cos^2 x + \cos x + 1$.

460. *Utilizînd reprezentarea grafică, să se precizeze cîte două restricţii injective ale funcţiilor următoare:*

a) $f: R \to R$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$;

b) $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \leqslant 1, \\ x, \text{ dacă } x > 1; \end{cases}$

c) $f: (-\infty, 0] \to R$, $f(x) = \min\limits_{x \leqslant t \leqslant 0} (t^2 + 3t + 2)$.

461. *Să se scrie toate aplicaţiile bijective ale mulţimii* $\{1, 2, 3\}$ *în mulţimea* $\{a, b, c\}$ *făcîndu-se diagramele respective.*

462. *Care dintre funcţiile următoare sînt bijective şi care nu sînt bijective ?*

a) $f: R \to R$, $f(x) = 7x + 1$;

b) $f: R \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$;

c) $f: (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 5x$;

d) $f: [2, +\infty) \to (-\infty, 0)$, $f(x) = -x^2 + 4x - 4$;

e) $f: [-1, 0] \cup (2, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = |x^2 - 1|$;

f) $f: [-2, +2] \to [0, 2]$, $f(x) = \begin{cases} x + 2, -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x + 2, 0 < x \leqslant 2; \end{cases}$

g) $f: [-3, 1] \to [-6, 3]$, $f(x) = max(2x, 3x)$;

h) $f: [-1, 1] \to [4, 5]$, $f(x) = \min\limits_{-1 \leqslant t \leqslant x} (t^2 + 4)$.

463. *Fie mulţimile:*

$E = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n \ldots\}$;
$F = \{2, 5, 8, \ldots, 3n - 1, \ldots\}$;

a) *Să se scrie o aplicaţie bijectivă* $f: E \to F$; *dacă* $x \in E$, *să se calculeze* $f(x)$.

b) *Să se determine o funcţie* $g: E \to F$ *care să fie injectivă, dar să nu fie surjectivă. În acest caz, dacă* $x \in E$, *să se calculeze* $g(x)$.

c) *Să se scrie o funcţie* $h: E \to F$ *care să fie surjectivă şi să nu fie injectivă.*

Scanned with OKEN Scanner

464. *Să se scrie cîte două restricții bijective pentru funcțiile următoare:*

a) $f: R \to R$, $f(x) = x^2 + x + 4$;
b) $f: R \to [-1, +1]$, $f(x) = \sin x$;
c) $f: [0, 2\pi] \to [-1, +1]$, $f(x) = \cos x$;
d) $f: R - \{0\} \to R$, $f(x) = \lg x^2$.

465. *Să se reprezinte grafic funcțiile următoare și să se spună care sînt bijective și care nu sînt bijective:*

a) $f: R \to [0, +\infty)$, $f(x) = |x - 1| + |x|$;

b) $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \leqslant 0, \\ 3x, \text{ dacă } x > 0; \end{cases}$

c) $f: R \to R$, $f(x) = max(x - 1, x + 1)$;
d) $f: R \to R$, $f(x) = min(-x + 2, x - 3)$;
e) $f: [-2, +2] \to [0, 2]$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;
f) $f: [-\pi, \pi] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = arcsin\ (\sin x)$;
g) $f: R \to [0, \pi]$, $f(x) = arccos\ (\cos x)$.

466. *Fie $\mathcal{D}$ mulțimea dreptelor din planul α și A un punct situat în α. În $\mathcal{D}$ se consideră relația $\mathcal{R}$ care face ca fiecărei drepte $d \in \mathcal{D}$ să-i corespundă perpendiculara d' dusă din A pe d.*

Este $\mathcal{R}$ o aplicație a lui $\mathcal{D}$ în $\mathcal{D}$? În caz afirmativ, este această aplicație surjectivă? Dar injectivă?

467. *Fie $\mathcal{C}$ mulțimea punctelor unui cerc dat avînd centrul O. Relația $\mathcal{R}$ definită în $\mathcal{C}$ care face ca oricărui punct M al cercului să-i corespundă simetricul său M', în raport cu O, este o funcție definită pe $\mathcal{C}$ cu valori în $\mathcal{C}$?*

În caz afirmativ este această funcție surjectivă? Dar injectivă? Dar bijectivă?

468. *Fie funcțiile numerice:*

$f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1, 3, 5, 6\}$, pentru care:

$$f(1) = 0,$$
$$f(2) = 1,$$
$$f(3) = 3,$$
$$f(4) = 6,$$

și $g : \{1, 2, 3, 5\} \to \{1, 3, 4, 5\}$ *pentru care:*

$$g(1) = 1,$$
$$g(2) = 4,$$
$$g(3) = 3,$$
$$g(5) = 4.$$

Să se determine funcțiile $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

469. *Fie funcțiile:*

$$f : R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{dacă } x \leqslant 3, \\ -x + 3, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

$$g : R \to R, \quad g(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dacă } x \leqslant 0, \\ x + 1, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Să se determine funcțiile $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

470. *Să se determine* $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ *în următoarele cazuri:*

a) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant -1, \\ -x, & -1 < x < 1, \\ 0, & x \geqslant 1; \end{cases}$

$g : R \to R$, $g(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$

b) $f : [0, +\infty) \to R$, $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

$g : (-\infty, 5] \to R$, $g(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 5. \end{cases}$

c) $f : R \to R$, $f(x) = max(x + 1, x^2)$,
$g : R \to R$, $g(x) = min(-x, x)$.

471. *Fie mulțimile* $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 3, 5, 6\}$, *părți ale lui* N.

a) Să se scrie toate aplicațiile strict crescătoare ale lui E *în* F.

b) Să se scrie toate aplicațiile strict descrescătoare ale lui E *în* F.

Scanned with OKEN Scanner

c) *Să se scrie toate aplicațiile crescătoare ale lui E în F.*
d) *Să se scrie toate aplicațiile descrescătoare ale lui E în F.*

472. *Fie funcția* $f: E \to R$, $1 \in E$, $2 \in E$ *și* $f(1) < f(2)$, $(E \subset R)$.
Care dintre proprietățile următoare sînt adevărate și care nu sînt adevărate ?
a) f *este strict crescătoare ;*
b) f *este strict descrescătoare ;*
c) f *nu este strict descrescătoare.*

473. *Să se găsească o funcție* $f: E \to R$ *care să nu fie strict crescătoare și să aibă proprietatea: există* $A \subset E$, $B \subset E$ $A \cup B = E$, *astfel ca restricțiile lui* $f: E \to R$ *la* A *și* B *să fie strict crescătoare,* $(E \subset R)$.

474. *Să se scrie o funcție care să fie injectivă și să nu fie strict monotonă.*

475. *Fie funcția* $f: R \to R$, $f(x) = x^2 - 5x + 2$.
Să se determine o restricție a lui f, *strict crescătoare și o restricție strict descrescătoare.*

476. *Care dintre funcțiile următoare sînt monotone și care nu sînt monotone ?*

a) $f: R \to R$, $\quad f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ dacă } x \leqslant 1, \\ x + 1, \text{ dacă } x > 1; \end{cases}$

b) $f: R \to R$, $\quad f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \text{ este rațional}, \\ -x, \text{ dacă } x \text{ este irațional}; \end{cases}$

c) $f: [0, +\infty) \to R$, $\quad f(x) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant x} (t^2 - t + 1)$;

d) $f: [-1, 1] \to R$, $\quad f(x) = \min\limits_{x \leqslant t \leqslant 1} |t - 2|$;

e) $f: R - \{1\} \to R$, $\quad f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$;

f) $f: (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to R$, $\quad f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x} - \arccos \dfrac{1}{x}$.

477. *Să se demonstreze că următoarele funcții sînt strict monotone :*

a) $f: [1, +\infty) \to R$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$;

b) $f: [-1, +1] \to R$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$;

c) $f: (1, +\infty) \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x}$;

d) $f: (-\infty, -1] \to R$, $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$;

f) $f: \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to R$, $f(x) = \frac{1}{\cos x}$;

f) $f: \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to R$, $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

g) $f: (0, 1) \to R$, $f(x) = \frac{x}{\lg x}$;

h) $f: (-1, 0) \to R$, $f(x) = \arcsin(x + \sqrt{1-x^2})$.

478. *Fie mulțimile* $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{0, 1, 3, 4\}$ *și funcțiile*:

$f: E \to F$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 3$;
$g: F \to E$, $g(0) = 2$, $g(1) = 1$, $g(3) = 4$, $g(5) = 1$;

Pot fi definite funcțiile $f \circ g$, $g \circ f$?
În caz afirmativ să se determine aceste funcții și să se alcătuiască diagramele lor.

479. *Fie funcțiile*:

$f: \{0, 1, 2\} \to \{1, 3, 6, 7\}$,
$f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 7$;
$g: \{3, 5, 6\} \to \{0, 2\}$,
$g(3) = 0$, $g(5) = 2$, $g(6) = 2$.

Se pot compune aceste funcții ? În caz afirmativ să se scrie funcția compusă și să se facă diagrama ei.

480. *Fie funcțiile*:

$f: \{1, 3, 5\} \to \{1, 2, 4\}$,
$f(1) = 1$, $f(3) = 2$, $f(5) = 4$;
$g: \{1, 4\} \to \{1, 3\}$,

Scanned with OKEN Scanner

$g(1) = 1,\ g(4) = 3;$
$h: \{1, 2, 5\} \to \{1, 4\},$
$h(1) = 1,\ h(2) = 1,\ h(5) = 4.$

Se pot compune aceste trei funcții ? În caz afirmativ să se scrie funcțiile compuse și să se facă diagramele lor.

481. *Să se scrie trei funcții:*

$$f: E \to F$$
$$g: F \to G$$
$$h: G \to E$$

E, F, G fiind mulțimi finite de numere și să se determine funcțiile compuse $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$.
Să se verifice că $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

482. *Fie funcțiile:*

$f: R \to R,$ $\quad f(x) = 2x + 1;$
$g: R \to R,$ $\quad g(x) = -x + 3.$

Să se scrie funcțiile compuse $f \circ g$, $g \circ f$. Sînt egale aceste funcții ?

483. *Se dau funcțiile:*

$f: R \to [0, +\infty),$ $\quad f(x) = x^2;$
$g: R \to [-1, +1],$ $\quad g(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2};$
$h: [1, +\infty) \to [0, +\infty),$ $\quad h(x) = \sqrt{x - 1}.$

În ce ordine se pot compune aceste trei funcții ?
Să se determine funcțiile compuse.

484. *Fie funcțiile:*

$$f: R \to R, \quad f(x) = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \leqslant 0, \\ x + 1, \text{ dacă } x > 0; \end{cases}$$
$$g: R \to [0, +\infty), \quad g(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x < 0, \\ x, \text{ dacă } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Există $f \circ g$? Dar $g \circ f$?
În caz afirmativ să se determine aceste funcții.

Scanned with OKEN Scanner

485. *Fie funcția* $f: \{1, 2, 3\} \to \{2, 4, 5, 6\}$.

$$f(1) = 5, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 2,$$

și $e: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ *funcția identică a mulțimii* $\{1, 2, 3\}$.

a) Să se determine toate funcțiile $g: \{1, 2, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3\}$ *pentru care este adevărată egalitatea* $g \circ f = e$ *și să se alcătuiască diagramele lor:*

b) Cîte dintre funcțiile găsite sînt surjective?

c) Există printre acestea și funcții bijective?

486. *Se dau funcțiile:*

$$f: [-1, +1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \arcsin x,$$

$$g: [-1, +1] \to F, \quad g(x) = 3x - 4x^3, \text{ unde } F = g([-1, 1]).$$

a) Să se arate că se pot compune funcțiile f *și* g *și să se determine* $f \circ g$.

b) Să se arate că există $x \in [-1, +1]$, *astfel ca*

$$(f \circ g)(x) = 3 \arcsin x.$$

Această egalitate este adevărată oricare ar fi $x \in [-1, +1]$?

487. *Fie funcțiile:*

$$f: [-1, +1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) = \arcsin x,$$

$$g: [-1, +1] \to E \quad g(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \quad E \text{ fiind } g([-1, +1]).$$

Există $f \circ g$? *În caz afirmativ să se determine această funcție.*

488. *Se notează cu* E *mulțimea punctelor unui plan dat. Fie* O_1, O_2 *puncte ale acestui plan. În mulțimea* E *se consideră următoarele relații:*

— simetria de centru O_1 *notată cu* f_1 (f_1 *asociază fiecărui punct* M *din plan simetricul său în raport cu* O_1);

— simetria de centru O_2 *notată cu* f_2:

— translația $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$, *relație prin care, date fiind punctele* A, B *în* E, *oricărui punct* M *din* E *îi corespunde* M' *în* E *astfel ca segmentele* MM', AB *să fie paralele, egale și situate de aceeași parte a dreptei* AB (*vectorii* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM'}$ *să fie egali*).

Scanned with OKEN Scanner

Aceste relații sînt aplicații ale lui E în F ?
Să se verifice că sînt adevărate egalitățile:

$$f_1 \circ f_2 = \mathcal{T}_{\overrightarrow{2O,O,}}; \quad f_2 \circ f_1 = \mathcal{T}_{\overrightarrow{2O,O,}}.$$

489. *Fie d, d' drepte ale planului π, E mulțimea punctelor acestui plan și următoarele aplicații ale lui E în E;*

$\mathcal{S}_d$ — *simetria în raport cu dreapta d;*
$\mathcal{S}_d$ — *simetria în raport cu dreapta d';*
$\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ — *translația de vector dat AB;*
$\mathcal{R}_{O,\alpha}$ — *rotația de centru O și unghi orientat α.*

Să se verifice pe un desen că următoarele egalități sînt adevărate:

$\mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{T}_{\overrightarrow{2DD'}}$; *dacă* $d \parallel d'$, $D \in d$, $D' \in d'$, $DD' \perp d$.

$\mathcal{S}_{d'} \circ \mathcal{S}_d = \mathcal{R}_{O\,2\alpha}$, *dacă d, d' sînt concurente în O și fac unghiul α (măsurat de la d la d' în planul orientat).*

490. *Pentru fiecare din funcțiile următoare să se alcătuiască o diagramă și să se spună dacă sînt inversabile. În caz afirmativ să se scrie reciprocele acestor funcții făcîndu-se și diagramele lor.*

a) $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$,
$f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 4,\ f(4) = 1$;
b) $f: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$,
$f(a) = 1,\ f(b) = 2,\ f(c) = 2$;
c) $f: \{1, 3, 5\} \to \{2, 4, 6, 8\}$,
$f(1) = 2,\ f(3) = 4,\ f(5) = 6$;
d) $f: \{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots\} \to \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$,
$f(2n - 1) = 2n,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$

491. *a) Să se arate că următoarele funcții sînt bijective și să se determine reciprocele lor;*
b) Pe același sistem de referință se vor reprezenta grafic funcțiile f și f^{-1}.

1) $f: R \to R$, $f(x) = 6x - 2$;
2) $f: [0, +\infty) \to [1, +\infty)$, $f(x) = 3x + 1$;
3) $f: [1, 4] \to [9, 24]$, $f(x) = 5x + 4$;
4) $f: [-1, 2) \to (-3, 6]$, $f(x) = -3x + 3$;

Scanned with OKEN Scanner

5) $f:[-3,4]\cup[5,6)\to$
$\to(-4,-3]\cup[-2,5]$, $f(x)=-x+2$;

6) $f:[0,+\infty)\to[-1,+\infty)$, $f(x)=x^2-1$;

7) $f:\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)\to(0,+\infty)$, $f(x)=4x^2-x-3$;

8) $f:(-\infty,0)\cup[2,4]\to$
$\to(-\infty,4]$, $f(x)=-x^2+4x$;

9) $f:R\to(-\infty,3]\cup$
$\cup(4,+\infty)$, $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\leqslant 0,\\ \frac{2}{3}x+4, & x>0;\end{cases}$

10) $f:[-1,3]\to[-1,9]$, $f(x)=\begin{cases}x, \text{ dacă } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2, \text{ dacă } 0<x\leqslant 3;\end{cases}$

11) $f:[0,\pi]\to[-1,+1]$, $f(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ dacă } 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \cos x, \text{ dacă } \frac{\pi}{2}<x\leqslant\pi;\end{cases}$

12) $f:\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]\to[-1,+1]$, $f(x)=\sin x$;

13) $f:[-\pi,0]\to[-1,+1]$, $f(x)=\cos x$;

14) $f:\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\to R$ $f(x)=\operatorname{tg} x$.

492. *Să se arate că funcția* $f:R\to R$, $f(x)=x^2-6x+2$ *admite restricții inversabile definite pe:*

a) $(-\infty,3]$;
b) $[3,+\infty)$;
c) $(-\infty,0]\to[3,6)$.

Să se determine inversele acestor funcții și să se reprezinte grafic.

493. *Să se spună care dintre funcțiile următoare sînt inversabile și, cînd este cazul, să se determine funcțiile inverse:*

a) $f:R\to[0,+\infty)$, $f(x)=|x^2-2|$;
b) $f:[-1,1]\to[0,4]$, $f(x)=x^3-3x+2$;
c) $f:[-1,0]\to[0,1]$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $f:(-\infty, 0)\to(0, +\infty)$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$;

e) $f:[-1, 0]\to\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $f(x)=arc\,tg(x+\sqrt{1-x^2})$;

f) $f:[0, \pi]\to[-1, +1]$, $f(x)=sin\ x-cos\ x$.

494. *Care dintre funcțiile următoare sînt pare, care sînt impare și care nu sînt nici pare, nici impare.*

a) $f:R\to R$, $f(x)=x^4+x^2+1$;

b) $f:R\to R$, $f(x)=x^3+x$;

c) $f:[-1, +1]\to R$, $f(x)=x^5+x$;

d) $f:R\to R$, $f(x)=x^2+x+3$;

e) $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$;

f) $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^4}$;

g) $f:[-\pi, +\pi]\to R$, $f(x)=sin\ 2x$;

h) $h:R\to R$, $f(x)=sin\ x+cos\ x$;

i) $f:R\to R$, $f(x)=x\ sin\ x$;

j) $f:\left[-\dfrac{\pi}{4}, +\dfrac{\pi}{4}\right]\to R$, $f(x)=\dfrac{sin\ x+cos\ x}{sin\ x-cos\ x}$;

k) $f:R\to R$, $f(x)=3^x+3^{-x}$;

l) $f:R\to R$, $f(x)=lg(\sqrt{9x^2+1}+3x)$;

m) $f:R\to R$, $f(x)=\begin{cases}-3x+3, \text{ dacă } x\leqslant 0,\\ 3x+3, \text{ dacă } x>0.\end{cases}$

495. *Să se scrie fiecare dintre funcțiile următoare ca sumă a două funcții, una pară iar cealaltă impară:*

a) $f:R\to R$, $f(x)=(x-1)^2+1$;

b) $f:R\to R$, $f(x)=x^3+x^2+x+2$;

c) $f:R\to R$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$;

d) $f:[-1, +1]\to R$, $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$;

e) $f:R\to R$, $f(x)=sin^2x-2\,cos^2x$;

f) $f: R \to R$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$;

g) $f: R \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{2 + \sin x}$;

h) $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leqslant 1, \\ -x, & x > 1. \end{cases}$

i) $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$

496. *Dacă f și g sînt funcții periodice definite pe R cu valori în R, suma lor este o funcție periodică ? Dar produsul ?*

497. *Care dintre funcțiile următoare sînt periodice ?*

a) $f: R \to R$, $f(x) = \sin x + \cos x$;
b) $f: R \to R$, $f(x) = \sin 5x + \cos 2x$;
c) $f: R \to R$, $f(x) = \sin^2 x$;
d) $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \text{ este rațional}, \\ +1, & \text{dacă } x \text{ este irațional}. \end{cases}$

498. *Folosind proprietățile funcției caracteristice atașate unei mulțimi, să se demonstreze că următoarele proprietăți sînt adevărate : (A, B, C, D fiind părți ale mulțimii E) :*

a) $A \cup A = A$;
b) $A \cap A = A$;
c) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$;
d) $A \cup B = A \Leftrightarrow A \supset B$;
e) $A \cup B \subset C \Leftrightarrow A \subset C$ și $B \subset C$;
f) $C \subset A \cap B \Leftrightarrow C \subset A$ și $C \subset B$;
g) $(A \cup B \cup C) \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D) \cup B \cup$
$\cup (B \cap D) \cup (B \cap C) \cup (C \cap D)$;
h) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$;
i) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;
j) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

499. *Folosind proprietățile funcției caracteristice să se rezolve următoarele ecuații și sisteme de ecuații cu mulțimi :*

a) $A \cup (B - X) = B \cup X$, *unde* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$;

Scanned with OKEN Scanner

$b)$ $\begin{cases} X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \\ X \cap Y = \{1, 2\}, \\ X - Y = \{5\}; \end{cases}$

$c)$ $\begin{cases} X \subset \{1, 2, 3\}, \\ \{1, 2, 3\} \cap X = \{1, 2\}; \end{cases}$

$d)$ $\{1, 2\} \Delta X = \{1, 2, 3\}$;

$e)$ $[\{1, 2\} \Delta X] \Delta \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 1. Legi de compoziție interne

Fie E o mulțime. O aplicație f a unei părți A a produsului cartezian $E \times E$ în E se numește lege de compoziție internă între elementele mulțimii E (se mai spune lege de compoziție internă în mulțimea E). Dacă $A = E \times E$, atunci legea de compoziție se spune că este peste tot definită în E.

Imaginea prin f a cuplului $(x, y) \in A$ se numește compusul lui x cu y și se notează de obicei prin succesiunea: x, un semn, y (exemplu: $x \top y$, $x * y$, $x \perp y$, $x \Delta y$).

O lege de compoziție, pentru care semnul despărțitor este „ $+$ “ respectiv „ $\cdot$ “ se spune că este dată în notație aditivă, respectiv multiplicativă.

O lege de compoziție, între elementele unei mulțimi E, peste tot definită, notată cu semnul $\top$, asociază oricărui cuplu (x, y) de elemente din E, un element $x \top y$ din E și numai unul.

$$\text{orice } (x, y) \to x \top y \begin{cases} \in E \\ \text{unic} \end{cases}$$

Faptul că $x \top y$ este unic poate fi exprimat și astfel:

$$x = x' \text{ și } y = y' \Rightarrow x \top y = x' \top y'.$$

Fie E o mulțime pe care este dată o lege de compoziție peste tot definită. Un element $a \in E$ se numește regulat dacă:

$$a \top x = a \top y \Rightarrow x = y \quad \text{și}$$
$$x \top a = y \top a \Rightarrow x = y.$$

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\top$ o lege de compoziție între elementele unei mulțimi E și $A \subset E$. Definim pe A o lege de compoziție $\overline{\top}$ în felul următor: $x \overline{\top} y$ este definit, ori de cîte ori $x \top y$ este definit și $x \top y \in A$ și $x \overline{\top} y = x \top y$. Legea de compoziție $\overline{\top}$ se numește legea indusă pe A de legea $\top$.

§ 2. Legi asociative. Legi comutative

O lege de compoziție $\top$ între elementele unei mulțimi E, peste tot definită, se numește asociativă dacă:

$(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$, oricare ar fi x, y, z din E.

În cazul unei legi de compoziție asociative, notată multiplicativ, elementul $\underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n \text{ factori}}$ se notează cu x^n $(n \in N, n \geqslant 1)$

O lege de compoziție $\top$ între elementele unei mulțimi E, peste tot definită, se numește comutativă dacă $x \top y = y \top x$), oricare ar fi x și y din E.

§ 3. Element neutru. Elemente simetrice

Fie $\top$ o lege de compoziție între elementele unei mulțimi E, peste tot definită. Un element $e \in E$ se numește element neutru față de legea $\top$, dacă:

(1) $x \top e = x$, oricare ar fi x din E și

(2) $e \top x = x$, oricare ar fi x din E.

Elementul neutru, dacă există, este unic.

Fie $\top$ o lege de compoziție între elementele unei mulțimi E, peste tot definită, față de care există element neutru e. Un element $x \in E$ se numește simetrizabil dacă există $x' \in E$, astfel încît:

$$x \top x' = e \quad (1)$$
$$x' \top x = e \quad (2)$$

Elementul x' care îndeplinește condițiile (1) și (2) se numește simetricul lui x. Simetricul lui x, în cazul cînd legea este notată aditiv, respectiv multiplicativ, se notează cu „$-x$“ respectiv „x^{-1}“.

Dacă legea $\top$ este asociativă, atunci un element x admite cel mult un simetric.

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. Legi distributive

Fie $\top$ și $\perp$ două legi de compoziție între elementele unei mulțimi E, peste tot definite. Se spune că legea $\top$ este distributivă față de legea $\perp$ dacă:

$x \top (y \perp z) = (x \top y) \perp (x \top z)$ (1), oricare ar fi x, y, z din E și $(y \perp z) \top x = (y \top x) \perp (z \top x)$ (2), oricare ar fi x, y, z din E.

§ 5. Grupuri

O lege de compoziție $\top$ între elementele unei mulțimi G, determină pe G o structură de grup dacă:

P. este peste tot definită;
A. este asociativă;
N. există element neutru față de legea $\top$;
S. oricare element admite un simetric.

Mulțimea G, înzestrată cu legea $\top$, poartă numele de grup. Grupul determinat pe G de legea $\top$ se mai notează cu $(G, \top)$.

Dacă legea $\top$ este și comutativă atunci grupul se spune că este comutativ sau abelian.

Fie H o parte nevidă a lui G. Dacă legea indusă pe H de legea G, determină pe H o structură de grup, se spune că H este un subgrup al lui G.

Fie G un grup notat multiplicativ și H o parte nevidă a sa. Următoarele propoziții sînt echivalente:

P. H este subgrup al lui G;

Q. Legea indusă pe H de legea lui G este peste tot definită și

$$(x \in H) \Rightarrow (x^{-1} \in H);$$

R. $(x \in H$ *și* $y \in H) \Rightarrow (xy^{-1} \in H)$.

Într-adevăr, dacă propoziția P este adevărată, atunci este adevărată, în mod evident, și propoziția Q.

Deci $P \Rightarrow Q$.

Să demonstrăm acum că $Q \Rightarrow R$.

Să presupunem că propoziția Q este adevărată. Fie $x \in H$ și $y \in H$. Din $y \in H$, în virtutea lui Q rezultă că $y^{-1} \in H$. Ținînd seama că $x \in H$ și $y^{-1} \in H$ și că legea pe H este

Scanned with OKEN Scanner

peste tot definită (propoziția Q), deducem că $xy^{-1} \in H$ și deci $Q \Rightarrow R$.

Să demonstrăm acum că $R \Rightarrow P$. În acest scop, presupunem că propoziția R este adevărată.

Fie $x \in H$. Pe baza lui R, deducem că $x \cdot x^{-1} \in H$ și deci $e \in H$. Din $e \in H$ și $y \in H$, rezultă pe baza lui R că $e \cdot y^{-1} \in H$ și deci $y^{-1} \in H$.

Din $x \in H$ și $y \in H$ rezultă $x \in H$ și $y^{-1} \in H$ și aplicînd R, obținem $x \cdot (y^{-1})^{-1} \in H$, adică $xy \in H$.

Așadar, legea indusă pe H este peste tot definită. Cum $e \in H$ și pentru orice $x \in H$, avem $x^{-1} \in H$, rezultă că H are o structură de grup față de legea indusă.

S-a demonstrat că $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow P$. Deci $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$.

Fie $(G, \top)$ și $(G', \bot)$ două grupuri. O aplicație $f : G \to G'$ se spune că este omomorfism dacă $f(x \top y) = f(x) \bot f(y)$. Dacă, în plus, aplicația f este bijectivă, atunci se numește izomorfism.

Un omomorfism $f : G \to G$ se numește endomorfism.

Un izomorfism $f : G \to G$ se numește automorfism.

§ 6. Inele, corpuri

Două legi de compoziție, prima notată aditiv și a doua notată multiplicativ, determină pe o mulțime A o structură de inel dacă:

P. ambele legi sînt peste tot definite;

A. A. $(x + y) + z = x + (y + z)$, oricare ar fi x, y, z din A;

A. C. $x + y = y + x$, oricare ar fi $x \in A$ și $y \in A$;

A. N. Există în A un element notat cu 0, astfel încît $x + 0 = x$, oricare ar fi x;

A. S. Pentru orice $x \in A$, există un element $-x \in A$, astfel încît $x + (-x) = 0$;

M. A. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, oricare ar fi x, y, z din A;

M. D. $x \cdot (y + z) = xy + xz$, oricare ar fi x, y, z din A;

$(y + z) \cdot x = yx + zx$, oricare ar fi x, y, z din A.

Mulțimea A înzestrată cu cele două legi de compoziție poartă numele de inel. Inelul determinat pe A de legile $+$, $\cdot$ se mai notează cu $(A, +, \cdot)$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă în A există un element notat cu 1 astfel încît $x \cdot 1 = x$ și $1 \cdot x = x$, oricare ar fi $x \in A$, atunci se spune că inelul A este *cu element unitate.*

Un inel A cu element unitate în care, pentru orice $x \neq 0$ există un element x^{-1}, astfel încît

$$x \cdot x^{-1} = 1 \qquad (1)$$

și

$$x^{-1} \cdot x = 1 \qquad (2)$$

poartă numele de *corp.*

Un inel, respectiv un corp, în care înmulțirea este comutativă poartă numele de inel, respectiv corp *comutativ.*

Se spune că un inel A este *inel cu divizori ai lui* 0, dacă există în A două elemente $a \neq 0$ și $b \neq 0$, astfel încît $a \cdot b = 0$. În acest caz, elementele a și b se numesc *divizori ai lui* 0.

Într-un corp nu există divizori ai lui 0.

Un inel comutativ, fără divizori ai lui 0, se numește *domeniu de integritate.*

Fie $(A, +, \cdot)$ un inel, respectiv corp și S o parte a lui A. Dacă legile induse pe A de „ $+$ “ și „ $\cdot$ “ determină pe S o structură de inel, respectiv corp, atunci inelul respectiv corpul $(S, +, \cdot)$ se numește subinel, respectiv subcorp al inelului, respectiv corpului $(A, +, \cdot)$.

Fie două inele $(A, +, \cdot)$ și $(A', \oplus, \odot)$. O aplicație $f: A \to A'$ se numește omomorfism dacă:

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y) \quad \text{și}$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y).$$

Dacă, în plus, aplicația f este bijectivă, atunci f se numește izomorfism.

Un omomorfism $f: A \to A$ se numește endomorfism.

Un izomorfism $f: A \to A$ se numește automorfism.

§ 7. Algebre Boole

Structura de algebră Boole este sugerată de structura determinată pe mulțimea părților unei mulțimi de reuniune, intersecție și complementară.

Scanned with OKEN Scanner

1. *Definiția algebrei Boole*

Două legi de compoziție interne, peste tot definite, prima notată cu semnul „ $\cup$ “ și numită reuniune, a doua notată cu semnul „ $\cap$ “ * și numită intersecție, determină pe o mulțime nevidă B o structură de algebră Boole ** dacă:

B_1. Reuniunea este asociativă, adică: $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$, oricare ar fi x, y, z din B.	B'_1. Intersecția este asociativă adică: $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$, oricare ar fi x, y, z din B.
B_2. Reuniunea este comutativă, adică: $x \cup y = y \cup x$, oricare ar fi x, y din B.	B_2'. Intersecția este comutativă, adică: $x \cap y = y \cap x$, oricare ar fi x, y din B.
B_3. Reuniunea are proprietatea de idempotență, adică: $x \cup x = x$, oricare ar fi $x \in B$.	B_3'. Intersecția are proprietatea de idempotență, adică: $x \cap x = x$, oricare ar fi $x \in B$.
B_4. Reuniunea are proprietatea de absorbție față de intersecție, adică: $x \cup (x \cap y) = x$, oricare ar fi x, y din B.	B_4'. Intersecția are proprietatea de absorbție față de reuniune, adică: $x \cap (x \cup y) = x$, oricare ar fi x, y din B.
B_5. Reuniunea este distributivă față de intersecție, adică: $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$, oricare ar fi x, y, z din B.	B_5' Intersecția este distributivă față de reuniune, adică: $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ oricare ar fi x, y, z, din B.

* Legile de compoziție „ $\cup$ “ și „ $\cap$ “ nu reprezintă, în general, reuniunea, respectiv intersecția, în sensul teoriei mulțimilor.

** În unele cărți, în locul denumirii de algebră Boole se folosește denumirea de *latice booleană*.

Scanned with OKEN Scanner

Există un element $o \in B$, numit cel mai mic element al mulțimii B, cu proprietatea că :	
B_6. $o \cup x = x$, oricare ar fi $x \in B$.	B_6'. $o \cap x = o$, oricare ar fi $x \in B$.
Există un element $i \in B$, numit cel mai mare element al mulțimii B, cu proprietatea că :	
B_7. $i \cup x = i$, oricare ar fi $x \in B$.	B_7'. $i \cap x = x$, oricare ar fi $x \in B$.
Pentru orice $x \in B$, există un element $\bar{x}$, numit complementul lui x, cu proprietatea că :	
B_8. $x \cup \bar{x} = i$.	B_8'. $x \cap x = o$.
B_9. $\overline{x \cup y} = \bar{x} \cap \bar{y}$, oricare ar fi x, y din B.	B_9'. $\overline{x \cap y} = \bar{x} \cup \bar{y}$, oricare ar fi x, y din B.
B_{10}. $\bar{\bar{x}} = x$, oricare ar fi $x \in B$.	

Reuniunea și intersecția, în sensul teoriei mulțimilor, determină, pe mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a părților mulțimii M, o structură de algebră Boole. Rolul elementului o îl joacă mulțimea $\varnothing$, rolul elementului i îl joacă mulțimea M, iar rolul complementului îl joacă complementara mulțimii respective.

Observație. Condițiile din definiția algebrei Boole, prezentată mai înainte, nu sînt independente. Vom demonstra acum că din condițiile B_1, B_1', B_2, B_2', B_4, B_4', B_5, B_6, B_7, B_8, B_8' rezultă condițiile B_3, B_3', B_5', B_6', B_7', B_9, B_9', B_{10}, adică :

$$(B_1 \wedge B_1' \wedge B_2 \wedge B_2' \wedge B_4 \wedge B_4' \wedge B_5 \wedge B_6 \wedge B_7 \wedge B_8 \wedge B_8') \Rightarrow (B_3 \wedge B_3' \wedge B_5' \wedge B_6' \wedge B_7' \wedge B_9 \wedge B_9' \wedge B_{10}).$$

a) Demonstrația proprietății B_3, respectiv B_3'

Calculăm în două moduri elementul $x \cup (x \cap (x \cup x))$. Ținînd seama de proprietatea B_4, avem $x \cup (x \cap (x \cup x)) = x$.

Scanned with OKEN Scanner

Cum din B'_4 rezultă că $x \cap (x \cup x) = x$, deducem că $x \cup (x \cap (x \cup x)) = x \cup x$.

Deci $x \cup x = x$. Pentru demonstrarea proprietății B'_3 se procedează la fel înlocuindu-se semnul „$\cup$" cu semnul „$\cap$" și semnul „$\cap$" cu semnul „$\cup$".

b) Demonstrația proprietății B'_5

Aplicînd proprietatea B_5, avem $(x \cap y) \cup (x \cap z) = [(x \cap y) \cup x] \cap [(x \cap y) \cup z]$. Ținînd seama că $(x \cap y) \cup x = x \cup (x \cap y)$ (proprietatea B_2) și că $x \cup (x \cap y) = x$ (proprietatea B_4) deducem că $(x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap [(x \cap y) \cup z]$. Avem $(x \cap y) \cup z = z \cup (x \cap y)$ (proprietatea B_2) și $z \cup (x \cap y) = (z \cup x) \cap (z \cup y)$ (proprietatea B_5). Deci,

$$(x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap [(z \cup x) \cap (z \cup y)].$$

Aplicînd B'_1, deducem că $(x \cap y) \cup (x \cap z) = [x \cap (z \cup x)] \cap (z \cup y)$.

Ținînd seama că $z \cup x = x \cup z$ (proprietatea B_2), deducem că $x \cap (z \cup x) = x \cap (x \cup z)$ și aplicînd proprietatea B'_4 rezultă $x \cap (z \cup x) = x$. Cum $z \cup y = y \cup z$ (proprietatea B_2), rezultă $(x \cap y) \cup (x \cap z) = x \cap (y \cup z)$, adică egalitatea B'_5.

c) Demonstrația proprietății B'_6

Din B_6, avem $x = o \cup x$ și deci $o \cap x = o \cap (o \cup x)$. Ținînd seama de B'_4, avem $o \cap (o \cup x) = o$. Deci $o \cap x = o$

d) Unicitatea elementului o

Să presupunem că mai există un element o' care verifică egalitatea B_6. Avem $o' \cup o = o$ și cum $o' \cup o = o \cup o'$ (proprietatea B_2) și $o \cup o' = o'$, rezultă $o = o'$.

e) Demonstrația proprietății B'_7

Din B_7, avem $i = i \cup x$ și deci $i \cap x = (i \cup x) \cap x$. Ținînd seama că $(i \cup x) \cap x = x \cap (i \cup x)$ (proprietatea B'_2) și că $i \cup x = x \cup i$ (proprietatea B_2), deducem că $i \cap x = x \cap (x \cup i)$.

Aplicînd B'_4, avem $x \cap (x \cup i) = x$ și deci $i \cap x = x$.

Scanned with OKEN Scanner

f) Unicitatea elementului i

Să presupunem că mai există un element i' care verifică egalitatea B_7. Avem $i' \cup i = i'$ și cum $i' \cup i = i \cup i'$ (proprietatea B_2) și $i \cup i' = i$ (proprietatea B_7) rezultă $i = i'$.

g). Unicitatea elementului x

Să presupunem că elementului x i se mai poate asocia un element $\tilde{x}$, astfel încît $x \cup \tilde{x} = i (B_8)$ și $x \cap \tilde{x} = o (B'_8)$. Ținînd seama că $\bar{x} \cup \tilde{x} = i$, rezultă $\bar{x} \cap (x \cup \tilde{x}) = \bar{x} \cap i$. Cum $\bar{x} \cap i = \bar{x}$ (proprietatea B'_7), deducem $\bar{x} \cap (x \cup \tilde{x}) = \bar{x}$. Utilizînd proprietatea B'_5 obținem:

$$\bar{x} \cap (x \cup \tilde{x}) = (\bar{x} \cap x) \cup (\bar{x} \cap \tilde{x}).$$

Folosind faptul că $\bar{x} \cap x = o$ rezultă $\bar{x} \cap (x \cup \tilde{x}) = o \cup (\bar{x} \cap \tilde{x})$. Cum $o \cup (\bar{x} \cap \tilde{x}) = \bar{x} \cap \tilde{x}$ (proprietatea B_6), rezultă $\bar{x} \cap (x \cup \tilde{x}) = \bar{x} \cap \tilde{x}$.

Așadar, $\bar{x} \cap (x \cup \tilde{x}) = \bar{x} = \bar{x} \cap \tilde{x}$.

În calculele precedente, înlocuind pe $\bar{x}$ cu $\tilde{x}$ și pe $\tilde{x}$ cu $\bar{x}$ obținem:

$$x \cap (x \cup \bar{x}) = \tilde{x} = \tilde{x} \cap \bar{x}.$$

Cum $\bar{x} \cap \tilde{x} = \tilde{x} \cap \bar{x}$ (proprietatea B'_2), rezultă că $\bar{x} = \tilde{x}$.

h). Demonstrația proprietății B_9, *respectiv* B'_9

Aplicînd succesiv proprietățile B_5, B_1, B_2, B_1, B_8, B_7, B'_7 obținem $(x \cup y) \cup (\bar{x} \cap \bar{y}) = [(x \cup y) \cup \bar{x}] \cap [(x \cup y) \cup \bar{y}] = [x \cup (y \cup \bar{x})] \cap [x \cup (y \cup \bar{y})] = [x \cup (\bar{x} \cup y)] \cap [(y \cap \bar{y}) \cup x] = [(x \cup \bar{x}) \cup y] \cap [(y \cup \bar{y}) \cup x] = (i \cup y) \cap (i \cup x) = i \cap i = i$.

Așadar, $(x \cup y) \cup (\bar{x} \cap \bar{y}) = i$. În mod analog se demonstrează că $(x \cup y) \cap (\bar{x} \cap \bar{y}) = o$. Cum complementul elementului $x \cup y$ este unic, rezultă că $\overline{x \cap y} = \bar{x} \cup \bar{y}$.

Demonstrația proprietății B'_9 se face în mod analog ca pentru proprietatea B_9.

i) Demonstrația proprietății B_{10}

Din B_8 și B'_8, aplicînd B_2 și B'_2, deducem $\bar{x} \cup x = i$ și $\bar{x} \cap x = o$. Cum complementul lui $\bar{x}$ este unic rezultă $\bar{\bar{x}} = x$.

Scanned with OKEN Scanner

II. Relația de ordine într-o algebră Boole

a) Într-o algebră Boole B este adevărată următoarea echivalență:

$$(x \cup y = y) \Leftrightarrow (x \cap y = x).$$

Într-adevăr, dacă $x \cup y = y$, atunci $x \cap y = x \cap (x \cup y)$ și aplicînd proprietatea B'_4, rezultă $x \cap y = x$ și deci $(x \cup y = y) \Rightarrow (x \cap y = x)$, iar dacă $x \cap y = x$, atunci $x \cup y = (x \cap y) \cup y$ și cum $(x \cap y) \cup y = y \cup (y \cap x)$ (proprietățile B_2 și B'_2) și $y \cup (y \cap x) = y$ (proprietatea B_4), rezultă $x \cup y = y$ și deci $(x \cap y = x) \Rightarrow (x \cup y = y)$.

b) Relația „$x \cup y = y$" pe care o notăm prin „$x \leqslant y$" este o relație de ordine în mulțimea B, numită relația de ordine atașată algebrei Boole B.

Într-adevăr, avem $x \leqslant x$, căci $x \cup x = x$ (proprietatea B_3), adică relația este reflexivă.

Dacă $x \leqslant y$ și $y \leqslant x$, adică $x \cup y = y$ și $y \cup x = x$, atunci aplicînd proprietatea B_2, rezultă $x = y$. Relația „$\leqslant$" este, deci, antisimetrică.

Dacă $x \leqslant y$ și $y \leqslant z$, adică $x \cup y = y$ și $y \cup z = z$, atunci $x \cup z = x \cup (y \cup z)$. Cum $x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$ (proprietatea B_1) și $x \cup y = y$, rezultă $x \cup z = y \cup z$. Ținînd seama că $y \cup z = z$, deducem $x \cup z = z$, adică $x \leqslant z$.

Relația „$\leqslant$" este deci tranzitivă.

Observații. 1. Ținînd seama de proprietatea demonstrată anterior, avem:

$$(x \leqslant y) \Leftrightarrow (x \cup y = y) \Leftrightarrow (x \cap y = x).$$

2. Avem $o \leqslant x$ și $x \leqslant i$, oricare ar fi $x \in B$, căci $o \cup x = x$ și $x \cup i = i$, oricare ar fi $x \in B$. Aceste relații justifică denumirea de cel mai mic element pentru o și denumirea de cel mai mare element pentru i.

3. În cazul algebrei Boole a mulțimii părților unei mulțimi, relația de ordine atașată coincide cu relația de incluziune.

III. Algebre Boole izomorfe

Fie $(B, \cup, \cap)$ și $(B', \cup, \cap)$ două algebre Boole. O aplicație $f: B \to B'$ se numește izomorfism dacă:

Scanned with OKEN Scanner

a) f *este bijectivă;*
b) $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$;
c) $f(x \cap y) = f(x) \cap f(y)$

Două algebre Boole între care există un izomorfism se numesc izomorfe.

Observații.

1) Dacă cel mai mic, respectiv cel mai mare, element al algebrei Boole B' este o', respectiv i', atunci $f(o) = o'$, respectiv $f(i) = i'$.

Într-adevăr, funcția f, fiind surjectivă, pentru orice x' din B' există x în B, astfel încît $x' = f(x)$ și avem:

$x' \cup f(o) = f(x) \cup f(o) = f(x \cup o) = f(x) = x'$, respectiv:
$x' \cup f(i) = f(x) \cup f(i) = f(x \cup i) = f(i)$.

Deci $f(o) = o'$, respectiv $f(i) = i'$.

2) Pentru orice $x \in B$, avem:

$$\overline{f(x)} = f(\bar{x})$$

Într-adevăr, $f(x) \cup f(\bar{x}) = f(x \cup \bar{x}) = f(i) = i'$ și $f(x) \cap f(\bar{x}) = f(x \cap \bar{x}) = f(o) = o'$. Deci $f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$

3) Menționăm, fără demonstrație, următoarea teoremă cunoscută sub numele de *teorema lui Stone*:

a) Orice algebră Boole este izomorfă cu o algebră Boole determinată pe o parte a mulțimii părților unei anumite mulțimi, de reuniune și intersecție (în sensul teoriei mulțimilor).

b) Orice algebră Boole $(B, \cup, \cap)$, unde B este o mulțime finită, este izomorfă cu algebra Boole determinată pe mulțimea părților unei anumite mulțimi de reuniune și intersecție (în sensul teoriei mulțimilor).

Scanned with OKEN Scanner

EXERCIȚII REZOLVATE

500. *a) Legea de compoziție* $x \top y = xy - 5x - 5y + 30$ *determină pe* R *o structură de grup ? b) Dar pe* $R - \{5\}$ *?*

Soluție.

a) 1) Legea $\top$ este, evident, peste tot definită în R.

2) Avem $(x \top y) \top z = (xy - 5x - 5y + 30) \top z = xyz - 5xz - 5yz + 30z - 5xy + 25x + 25y - 150 - 5z + 30 = xyz - 5xy - 5yz - 5xz + 25x + 25y + 25z - 120$ și $x \top (y \top z) = x \top (yz - 5y - 5z + 30) = xyz - 5xy - 5xz + 30x - 5x - 5yz + 25y + 25z - 150 + 30 = xyz - 5xy - 5xz - 5yz + 25x + 25y + 25z - 120.$

Deci $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$; legea $\top$ este asociativă.

3) Avem $x \top y = y \top x$.

4) Avem $x \top e = x \Leftrightarrow xe - 5x - 5e + 30 = x \Leftrightarrow e(x - 5) = 6x - 30$.

Dacă $x \neq 5$, $e = \dfrac{6x - 30}{x - 5} = 6$ și deci $x \top 6 = x$, oricare ar fi $x \neq 5$.

Calculînd $5 \top 6$, obținem:

$$5 \top 6 = 30 - 25 - 30 + 30 = 5.$$

Așadar, $x \top 6 = x$, oricare ar fi $x \in R$. Elementul $e = 6$ este element neutru pentru legea $\top$ definită pe R.

5) Avem $x \top x' = e \Leftrightarrow x \top x' = 6 \Leftrightarrow xx' - 5x - 5x' + 30 = 6 \Leftrightarrow x'(x - 5) = 5x - 24$.

Dacă $x \neq 5$, atunci el admite un simetric, pe $x' = \dfrac{5x - 24}{x - 5}$.

Dacă $x=5$, ecuația devine $0=1$. Așadar, $x=5$ nu admite simetric.

Legea $\top$ nu determină o structură de grup pe R, deoarece există un element ($x = 5$) care nu admite simetric.

b) 1) Fie $x \neq 5$ și $y \neq 5$ și să presupunem $x \top y = 5$, adică $xy - 5x - 5y + 30 = 5$. De unde $xy - 5x - 5y + 25 = 0$. Avem: $xy - 5x - 5y + 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5) \cdot (y - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ sau $y = 5$, în contrazicere cu condiția $x \neq 5$ și $y \neq 5$. Legea $\top$ este peste tot definită pe $R - \{5\}$.

2) Legea $\top$ este asociativă: vezi a), 2.

3) Legea $\top$ este comutativă.

4) Legea $\top$ admite un element neutru $e = 6$, vezi a), 4.

5) Orice $x \neq 5$ admite un simetric $x' = \dfrac{5x - 24}{x - 5}$; vezi a), 5.

Într-adevăr, dacă $\dfrac{5x - 24}{x - 5} = 5$, atunci $5x - 24 = 5x - 25$, adică $-24 = -25$.

Legea $\top$ determină pe $R - \{5\}$ o structură de grup comutativ.

501. *Legea de compoziție* $x \cdot y = xy + x + y$ *determină pe intervalul* $[-1, +\infty)$ *o structură de grup ? Dar pe* $(-1 +\infty)$?

Soluție

1) Avem: $x \geqslant -1$ și $y \geqslant -1 \Leftrightarrow x + 1 \geqslant 0$ și $y + 1 \geqslant 0$. Atunci produsul $(x + 1)(y + 1) \geqslant 0$, deci $xy + x + y + 1 \geqslant 0$ sau $xy + x + y \geqslant -1$, deci legea este peste tot definită, atît pe $[-1, +\infty)$ cît și pe $(-1, +\infty)$, căci în cazul al doilea se înlocuiesc peste tot inegalitățile nestricte cu cele stricte.

Legea este asociativă, căci

$$(x * y) * z = xyz + xy + yz + zx + x + y + z = x * (y * z).$$

Comutativitatea este evidentă, căci, în definiția legii „$*$“, s-au folosit doar legi comutative de compoziție (adunarea și înmulțirea).

Element neutru:

$x * e = x$ sau $xe + x + e = x$ sau $e(x + 1) = 0$, de unde $e = 0$ sau $x = -1$.

Se observă imediat că $e=0$ este element neutru pentru orice $x > -1$ și chiar pentru $x = -1$.

Pînă acum toate considerațiile sînt valabile pentru ambele intervale.

Elemente simetrizabile:

$$xx' + x + x' = 0, \text{ de unde}$$
$$x'(x + 1) = -x.$$

Dacă $x \neq -1$, $x' = \dfrac{-x}{x+1} \in (-1, +\infty)$.

Dacă $x = -1$, x' nu există.

Concluzii:

Pe intervalul $[-1, +\infty)$, legea „$*$“ nu definește o structură de grup.

Pe intervalul $(-1, +\infty)$ această lege definește o structură de grup.

502. *Să se demonstreze că pe mulțimea* $(0, +\infty) - \{1\}$ *legea de compoziție* $x \top y = x^{3\ln y}$ *determină o structură de grup comutativ.*

Soluție

1) Fie $x > 0$, $x \neq 1$ și $y > 0$, $y \neq 1$. Evident $x^{3\ln y} > 0$. Dacă $x^{3\ln y} = 1$ atunci $3\ln x \cdot \ln y = 0$, de unde $x = 1$ sau $y = 1$, în contradicție cu ipoteza $x \neq 1$, $y \neq 1$. Deci $x \top y > 0$ și $x \top y \neq 1$, ceea ce înseamnă că legea este peste tot definită.

2) Avem: $(x \top y) \top z = (x^{3\ln y}) \top z = x^{3\ln y \cdot 3\ln z} = x^{9\ln y \cdot \ln z}$ și $x \top (y \top z) = x \top (y^{3\ln z}) = x^{3\ln y \cdot 3\ln z} = x^{9\ln y \cdot \ln z}$. Legea $\top$ este asociativă.

3) Legea $\top$ este comutativă căci $\ln(x \top y) = \ln(x^{3\ln y}) = 3\ln y \cdot \ln x$ și $\ln(y \top x) = \ln(y^{3\ln x}) = 3\ln x \cdot \ln y$. Din $\ln(x \top y) = \ln(y \top x)$ rezultă $x \top y = y \top x$.

4) Avem: $x \top u = x \Leftrightarrow x^{3\ln u} = x \Leftrightarrow 3\ln u \cdot \ln x = \ln x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln x\,(3\ln u - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln u = \dfrac{1}{3}$ (deoarece $x \neq 1$ și deci $\ln x \neq 0$) $\Leftrightarrow u = e^{\frac{1}{3}}$.

Deci $u = e^{\frac{1}{3}}$ este element neutru ($e^{\frac{1}{3}} > 0$ și $e^{\frac{1}{3}} \neq 1$).

5) Avem: $x \top x' = u \Leftrightarrow x^{3\ln x'} = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 3\ln x' \cdot \ln x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x' = \frac{1}{9\ln x} \Leftrightarrow x' = e^{\frac{1}{9\ln x}}$. Este evident că $x' > 0$.

Fie $x' = 1$, adică $e^{\frac{1}{9\ln x}} = 1$, de unde, prin logaritmare, $\frac{1}{9\ln x} = 0$, ceea ce este imposibil. Așadar $x' > 0$ și $x' \neq 1$.

503. *Să se arate că legea de compoziție* $x * y = (x-1)^{\frac{1}{2}\ln(y-1)} + 1$ *determină pe mulțimea* $(1, +\infty) - \{2\}$ *o structură de grup comutativ.*

Soluție

1) Fie $x > 1$ și $x \neq 2$, $y > 1$ și $y \neq 2$. Compusul $x * y$ este evident > 1.

Fie $x * y = 2$, adică $(x-1)^{\frac{1}{2}\ln(y-1)} = 1$. Prin logaritmare obținem $\frac{1}{2}\ln(x-1) \cdot \ln(y-1) = 0$, de unde rezultă $x = 2$ sau $y = 2$, în contradicție cu ipoteza și deci legea $*$ este peste tot definită.

2) Avem:

$$(x * y) * z = [(x-1)^{\frac{1}{2}\ln(y-1)} + 1] * z = (x-1)^{\frac{1}{4}\ln(y-1)\cdot\ln(z-1)} +$$

$$+ 1 \text{ și } x * (y * z) = x * [(y-1)^{\frac{1}{2}\ln(z-1)} +$$

$$+ 1] = (x-1)^{\frac{1}{4}\ln(y-1)\cdot\ln(z-1)} + 1$$

Legea $*$ este asociativă.

3) Avem: $x * y = (x-1)^{\frac{1}{2}\ln(y-1)} + 1$ și $\ln(x * y - 1) =$

$$= \frac{1}{2}\ln(x-1)\ln(y-1),\ y * x = (y-1)^{\frac{1}{2}\ln(x-1)} + 1$$

$$\text{și } \ln(y * x - 1) = \frac{1}{2}\ln(x-1)\cdot\ln(y-1).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $x * y - 1 = y * x - 1$, de unde $x * y = y * x$. Legea este comutativă.

4) Fie $x > 1$ și $x \neq 2$.
Avem:

$$x * \varepsilon = x \Leftrightarrow (x-1)^{\ln(\varepsilon-1)} + 1 = x = \ln(\varepsilon-1) \cdot \ln(x-1) =$$

$= \ln(x-1)$. Deoarece $x \neq 2$, $\ln(x-1) \neq 0$ și obținem $\ln(\varepsilon-1) = 1$, de unde $\varepsilon - 1 = e$ adică $\varepsilon = 1 + e$. Cum $\varepsilon > 1$, $\varepsilon \neq 2$ și $x * \varepsilon = x$, oricare ar fi $x > 1$, și $x \neq 2$, înseamnă că ε este element neutru.
5) Fie $x > 1$ și $x \neq 2$.
Avem: $x * x' = \varepsilon \Leftrightarrow (x-1)^{\ln(x'-1)} + 1 = 1 + e \Leftrightarrow (x-1)^{\ln(x'-1)} =$

$= e \Leftrightarrow \ln(x'-1) = \dfrac{1}{\ln(x-1)} \Leftrightarrow x' - 1 = e^{\frac{1}{\ln(x-1)}} \Leftrightarrow x' = 1 +$

$+ e^{\frac{1}{\ln(x-1)}}$. Evident că $x' > 1$. Dacă $x' = 2$, atunci $1 + e^{\frac{1}{\ln(x-1)}} =$

$= 2$ și deci $e^{\frac{1}{\ln(x-1)}} = 1$, egalitate imposibilă.
Orice element x admite un simetric x'.

504. *Să se demonstreze că înmulțirea determină pe mulțimea M a matricelor de forma* $\begin{Vmatrix} x & 2y \\ y & x \end{Vmatrix}$ *unde* $x \in Q$, $y \in Q$, $x \neq 0$ *sau* $y \neq 0$, *o structură de grup comutativ.*

Soluție

1) Înmulțirea este peste tot definită. Într-adevăr, dacă $A = \begin{Vmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & \alpha \end{Vmatrix}$ și $B = \begin{Vmatrix} m & 2n \\ n & m \end{Vmatrix}$ unde $\alpha, \beta, m, n \in Q$, $\alpha \neq 0$ sau $\beta \neq 0$, $m \neq 0$ *sau* $n \neq 0$, atunci

$$A \cdot B = \begin{Vmatrix} \alpha m + 2\beta n & 2(\alpha n + \beta m) \\ \alpha n + \beta m & \alpha m + 2\beta n \end{Vmatrix}.$$

Punînd $x = \alpha m + 2\beta n$, $y = \alpha n + \beta m$, avem $A \cdot B = \begin{Vmatrix} x & 2y \\ y & x \end{Vmatrix}$.
Să presupunem $x = 0$ și $y = 0$, adică $\alpha m + 2\beta n = 0$ și $\alpha n + \beta m = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Sistemul $\begin{cases} \alpha m + 2\beta n = 0 \\ \beta m + \alpha n = 0 \end{cases}$, în care considerăm ca necunoscute pe m și n, este omogen.

Determinantul sistemului este $\alpha^2 - 2\beta^2 \neq 0$ (avem $\alpha - 2\beta^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta\sqrt{2})(\alpha - \beta\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ și $\beta = 0$) și admite numai soluția banală $m = 0$, $n = 0$.

Presupunerea făcută este în contradicție cu ipoteza $m \neq 0$ sau $n \neq 0$. Așadar $x \neq 0$ sau $y \neq 0$. Cum $x \in Q$ și $y \in Q$, rezultă că și matricea $A \cdot B$ aparține mulțimii M.

2) Înmulțirea este asociativă.

3) Înmulțirea este comutativă. Într-adevăr, folosind notațiile de la 1, se observă fără dificultate că $A \cdot B = B \cdot A$.

4) Matricea unitate $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \cdot 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ este un element al mulțimii M.

5) Matricea inversă a matricii $\begin{Vmatrix} x & 2y \\ y & x \end{Vmatrix}$ este matricea

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{x}{x^2 - 2y^2} & 2\dfrac{-y}{x^2 - 2y^2} \\ \dfrac{-y}{x^2 - 2y^2} & \dfrac{x}{x^2 - 2y^2} \end{Vmatrix}$$

care, evident, aparține lui M.

505. *Să se demonstreze că în mulțimea claselor de resturi modulo 12, înmulțirea determină pe* $\{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}\}$ *o structură de grup.*

Soluție

Trebuie arătat că înmulțirea este o lege de compoziție internă, peste tot definită în $M = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{11}\}$ și că orice element este inversabil.

Pentru asociativitate nu avem nimic de arătat.

Elementul neutru este $\hat{1}$.

Oricare element din M admite ca invers pe el însuși.

Pentru aceasta este suficient să facem tabelul înmulțirii în M.

Scanned with OKEN Scanner

	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$
$\hat{5}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$	$\hat{11}$	$\hat{7}$
$\hat{7}$	$\hat{7}$	$\hat{11}$	$\hat{1}$	$\hat{5}$
$\hat{11}$	$\hat{11}$	$\hat{7}$	$\hat{5}$	$\hat{1}$

506. *Se consideră funcțiile* : $f_i : R - \{0, 1\} \to R - \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, *definite astfel*:

$$f_1(x) = x;$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x};$$

$$f_3(x) = 1 - x;$$

$$f_4(x) = \frac{x-1}{x};$$

$$f_5(x) = \frac{x}{x-1};$$

$$f_6(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Să se verifice că pe mulțimea $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ *compunerea determină o structură de grup.*

Soluție

Tabelul legii de compoziție este:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_6	f_5	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2	f_6	f_5
f_4	f_4	f_3	f_5	f_6	f_2	f_1
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_5	f_2	f_1	f_3	f_4

deci legea este peste tot definită.

Scanned with OKEN Scanner

Folosind acest tabel se verifică toate proprietățile grupului.

507. *Se consideră funcțiile:*
$f_i : R - \{0\} \to R - \{0\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ *definite astfel:*

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{1}{x},\ f_3(x) = -x \text{ și } f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

Să se verifice că pe mulțimea $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, *compunerea determină o structură de grup comutativ.*

Soluție

Tabelul compunerii este:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

Se verifică fără dificultate, cu ajutorul tabelului, condițiile din definiția grupului.

508. a) *Să se verifice că pe intervalul* $(2, +\infty)$ *următoarea lege de compoziție determină o structură de grup comutativ:*

$$x \top y = xy - 2(x + y) + 6.$$

b) Să se rezolve ecuația $4 \top x = 8$.

c) Se notează cu $\overset{n}{\top} x$ *elementul* $\underbrace{x \top x \top \ldots \top x}_{n \text{ elemente}}$, $(n \in N^*)$.

Să se arate că:

$$\overset{n}{\top} x = (x - 2)^n + 2 \text{ și să se verifice că:}$$

$$(\overset{n}{\top} x) \top (\overset{m}{\top} x) = \overset{n+m}{\top} x \ (n \in N^*, m \in N^*).$$

Soluție

a) 1) Avem: $x \top y = (x - 2)(y - 2) + 2$ și deoarece $x > 2$, $y > 2$, rezultă $x \top y > 2$.

Așadar, legea $\top$ este peste tot definită.

2) Avem : $(x \top y) \top z = [xy - 2(x + y) + 6] \top z = [xy - 2(x + y) + 6] \cdot z - 2[xy - 2(x + y) + 6 + z] + 6 = xyz - 2xy - 2yz - 2zx + 4x + 4y + 4z - 6$ și

$x \top (y \top z) = x \top [yz - 2(y + z) + 6] = x[yz - 2(y + z) + 6] - 2(x + yz - 2(y + z) + 6] + 6 = xyz - 2xy - 2yz - 2zx + 4x + 4y + 4z - 6.$

Deci $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$, de unde reiese că legea este asociativă.

3) Este evident că $x \top y = y \top x$ și deci legea este comutativă.

4) Ecuația $x \top e = x$, adică $xe - 2(x + e) + 6 = x$ este echivalentă cu $e(x - 2) = 3(x - 2)$. Deoarece $x > 2$, rezultă $e = 3$. Așadar $x \top 3 = x$, oricare ar fi $x > 2$. Numărul 3, care aparține mulțimii $(2, +\infty)$ este element neutru.

5) Avem : $x \top x' = e \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow x'(x - 2) = 2x - 3 \Leftrightarrow x' = \frac{2x-3}{x-2}$ și $\frac{2x-3}{x-2} > 2 \Leftrightarrow 2x - 3 > 2x - 4 \Leftrightarrow -3 > -4.$

Deoarece ultima inegalitate este adevărată, rezultă $x' \in (2, +\infty)$. Așadar orice element $x \in (2, +\infty)$ admite un simetric $x' \in (2, +\infty)$.

b) Simetricul lui 4 este elementul $4' = \frac{2 \cdot 4 - 3}{2} = \frac{5}{2}$.

Avem : $4 \top x = 8 \Leftrightarrow 4' \top (4 \top x) = 4' \top 8 \Leftrightarrow x = 4' \top 8 \Leftrightarrow x = 5.$

c) Dacă $n = 1$, relația $\overset{n}{\top} x = (x - 2)^n + 2$; devine $\overset{1}{\top} x = x - 2 + 2 = x$ și este adevărată.

Să presupunem că egalitatea $\overset{n}{\top} x = (x - 2)^n + 2$ este adevărată.

Avem : $\overset{n+1}{\top} x = (\overset{n}{\top} x) \top x = [(x - 2)^n + 2] \top x = [(x-2)^n + 2] \cdot x - 2[(x - 2)^n + 2 + x] + 6 = (x - 2)^n x + 2x - 2(x - 2)^n - 4 - 2x + 6 = (x - 2)^n (x - 2) + 2 = (x - 2)^{n+1} + 2.$

Avem : $(\overset{n}{\top} x) \top (\overset{m}{\top} x) = [(x-2]^n + 2] \top [(x-2)^m + 2] =$
$= [(x-2)^n + 2] \cdot [(x-2)^m + 2] - 2[(x-2)^n + 2 +$
$+ (x-2)^m + 2] + 6 = (x-2)^{n+m} + 2 = \overset{n+m}{\top} x.$

509. *Fie P_4 grupul simetric de ordinul 4 și* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *un element al acestui grup.*
Să se calculeze π^{28}, π^{-38} (Se va observa că $\pi^3 = e$).

Soluție

Avem :

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\pi^3 = \pi^2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

$$\pi^{28} = \pi^{27} \cdot \pi = (\pi^3)^9 \cdot \pi = e^9 \cdot \pi = e \cdot \pi = \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\pi^{-38} = (\pi^{38})^{-1} = (\pi^{36} \cdot \pi^2)^{-1} = [(\pi^3)^{12} \cdot \pi^2]^{-1} = (e \cdot \pi^2)^{-1} =$$

$$= (\pi^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

510. *Să se demonstreze că în mulțimea $(1, +\infty) \times (2, +\infty)$ legea de compoziție $(x, y) \top (x', y') = (xx' - x - x' + 2,\ yy' - 2y - 2y' + 6)$ determină o structură de grup comutativ.*

Soluție

1) Fie $x > 1$, $y > 2$, $x' > 1$, $y' > 2$. Avem $xx' - x - x' + 2 = (x-1)(x'-1) + 1 > 1$ și $yy' - 2y - 2y' + 6 = (y-2)(y'-2) + 2 > 2$ și deci $(x, y) \top (x', y') \in (1, +\infty) \times (2, +\infty)$. Legea $\top$ este peste tot definită.

2) Avem :

$[(x, y) \top (x', y')] \top (x'', y'') = (xx' - x - x' + 2,\ yy' - 2y - 2y' + 6) \top (x'', y'') = (xx'x'' - xx'' - x'x'' + 2x'' - xx' + x + x' - 2 - x'' + 2,\ yy'y'' - 2yy'' - 2y'y'' + 6y'' - 2yy' + 4y + 4y' - 12 - 2y'' + 6) = (xx'x'' - xx' - xx'' - x'x'' + x + x' + x'',\ yy'y'' - 2yy' - 2yy'' - 2y'y'' + 4y + 4y' + 4y'' - 6)$ și $(x, y) \top [(x', y') \top (x'', y'')] = (x, y) \top (x'x'' - x' - x'' + 2,\ y'y'' - 2y' - 2y'' + 6) =$

$= (xx'x'' - xx' - xx'' + 2x - x - x'x'' + x' + x'' - 2 + 2,\ yy'y'' - 2yy' - 2yy'' + 6y - 2y - 2y'y'' + 4y' + 4y'' - 12 + 6) = (xx'x'' - xx' - xx'' - x'x'' + x + x' + x'',\ yy'y'' - 2yy' - 2yy'' - 2y'y'' + 4y + 4y' + 4y'' - 6)$.

Așadar legea $\top$ este asociativă.

3) Legea $\top$ este evident comutativă.

4) Avem:

$(x, y) \top (e, f) = (x, y) \Leftrightarrow (xe - x - e + 2,\ yf - 2y - 2f + 6) = (x, y) \Leftrightarrow xe - x - e + 2 = x$ și $yf - 2y - 2f + 6 = y \Leftrightarrow e(x - 1) = 2x - 2$ și $f(y - 2) = 3y - 6 \Leftrightarrow e = 2$ și $f = 3$.

Așadar, elementul $(2, 3) \in (1, +\infty) \times (2, +\infty)$ este neutru.

5) Avem:

$(x, y) \top (x', y') = (2, 3) \Leftrightarrow (xx' - x - x' + 2,\ yy' - 2y - 2y' + 6) = (2, 3) \Leftrightarrow (xx' - x - x' + 2 = 2$ și $yy' - 2y - 2y' + 6 = 3) \Leftrightarrow x' = \frac{x}{x - 1}$ și $y' = \frac{2y - 3}{y - 2}$. Deoarece $x > 1$ și $y > 2$, avem:

$\frac{x}{x - 1} > 1$ și $\frac{2y - 3}{y - 2} > 2 \Leftrightarrow x > x - 1$ și $2y - 3 > 2y - 4 \Leftrightarrow 0 > -1$ și $-3 > -4$. Ultimele inegalități fiind adevărate, rezultă $x' > 1$ și $y' > 2$.

Așadar, orice element (x, y) admite un simetric $(x', y') = \left(\frac{x}{x - 1}, \frac{2y - 3}{y - 2}\right)$.

511. a) *Dacă x este un element al unui grup multiplicativ G, atunci:*

$$x^2 = x \Leftrightarrow x = e;$$
$$x^5 = x^2 \Leftrightarrow x^3 = e;$$
$$x^n = x^k \Leftrightarrow x^{n-k} = e\ (n \in Z, k \in Z).$$

b) Să se transcrie rezultatele de la punctul a) în cazul unui grup notat aditiv.

Soluție

a) Avem: $x^2 = x \Leftrightarrow x \cdot x = x \cdot e \Leftrightarrow x = e$;

Scanned with OKEN Scanner

$$x^5 = x^2 \Leftrightarrow x^2 \cdot x^3 = x^2 \cdot e \Leftrightarrow x^3 = e;$$
$$x^n = x^k \Leftrightarrow x^n \cdot x^{-k} = x^k \cdot x^{-k} \Leftrightarrow x^{n-k} = e.$$

b) Relațiile scrise aditiv sînt următoarele:

$$2x = x \Leftrightarrow x = 0;$$
$$5x = 2x \Leftrightarrow 3x = 0;$$
$$nx = kx \Leftrightarrow (n - k)\, x = 0.$$

512. a) *În grupul aditiv al claselor de resturi modulo 12 să se rezolve ecuațiile:*

$$\hat{5} + x = \hat{8};\ x + \hat{7} = \hat{5}.$$

b) În grupul simetric de gradul 4 să se rezolve ecuația: $\pi^{29} \cdot X = \pi^{43}$, *unde* $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *(Se va observa că* $\pi^3 = e$*). Să se dea un exemplu din care să rezulte că ecuațiile de forma* $ax = b$ *și* $xa = b$, *au în general soluții diferite* (a, b, x: *permutări asupra mulțimii* $\{1, 2, 3, 4\}$).

Soluție

Avem:

a) $\hat{5} + x = \hat{8} \Leftrightarrow -\hat{5} + (\hat{5} + x) = -\hat{5} + \hat{8} \Leftrightarrow (-\hat{5} + \hat{5}) + x = -\hat{5} + \hat{8} \Leftrightarrow \hat{0} + x = \hat{7} + \hat{8} \Leftrightarrow x = \hat{3}.$

Ecuația $x + \hat{7} = \hat{5}$, se rezolvă în mod analog și se obține $x = \hat{10}$.

b) Avem:

$$\pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\pi^3 = \pi^2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e;$$

$$\pi^{29} = \pi^{27} \cdot \pi^2 = (\pi^3)^9 \cdot \pi^2 = e \cdot \pi^2 = \pi^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\pi^{43} = \pi^{42} \cdot \pi = (\pi^3)^{14} \cdot \pi = e \cdot \pi = \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

Scanned with OKEN Scanner

Avem :

$$\pi^{29}X = \pi^{43} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}X = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}^{-1} \cdot$$

$$\cdot\left[\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}X\right] = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}.$$

Avem :

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}X = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} \Leftrightarrow X =$$

$$= \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix} \text{ și}$$

$$X'\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix} \Leftrightarrow X' =$$

$$= \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}, \quad X \neq X'.$$

513. *Să se verifice că dacă între două elemente a și b ale unui grup, notat multiplicativ, există relațiile*

$$a^{-1}ba = b^{-1} \quad \text{și} \quad b^{-1}ab = a^{-1},$$

atunci : $a^2b^2 = b^2a^2 = e$, $a^2 = b^2$ *și* $a^4 = b^4 = e$.

Soluție

Condițiile din enunț se mai scriu :

$$(1)\ ba = ab^{-1} \text{ sau } (1')\ a^{-1}b = b^{-1}a^{-1},$$
$$(2)\ ab = ba^{-1}.$$

Atunci : $a^2b^2 = a(ab)\,b = (\text{din } (2)) = a(ba^{-1})\,b = ab(a^{-1}b) =$
$= (\text{din } (1')) = ab(b^{-1}a^{-1}) = e.$

Analog se arată că : $b^2a^2 = e$.

Apoi : $(2) \Leftrightarrow ab = ba^{-1} \Rightarrow aba = b \Rightarrow ba = a^{-1}b$ ori comparînd cu (1), rezultă : $a^{-1}b = ab^{-1} \Leftrightarrow b = a^2b^{-1} \Leftrightarrow b^2 = a^2$.

Din relațiile demonstrate mai sus rezultă :

$$a^4 = a^2 \cdot a^2 = a^2 \cdot b^2 = e.$$

Analog se arată că $b^4 = e$.

Scanned with OKEN Scanner

514. *Să se arate că un grup G multiplicativ este comutativ dacă și numai dacă*

$$(xy)^2 = x^2y^2, \text{ oricare ar fi } x \in G \text{ și } y \in G.$$

Soluție.

Dacă grupul este comutativ, atunci $(xy)^2 = (xy)(xy) = (x \cdot x) \cdot (y \cdot y) = x^2 \cdot y^2$.

Reciproc, dacă $(xy)^2 = x^2y^2$, oricare ar fi $x \in G$, $y \in G$, înmulțind la stînga cu x^{-1} și la dreapta cu y^{-1}, obținem $x^{-1}xyxyy^{-1} = x^{-1} \cdot xx \cdot yyy^{-1}$, de unde $yx = xy$.

515. *Fie G un grup abelian multiplicativ, x și y două elemente din G, m și n două numere naturale.*

Dacă $x^n = e$, $y^m = e$, atunci $(xy)^p = e$, unde p este cel mai mic multiplu comun al numerelor m și n.

Soluție

Există un număr natural k și un număr natural l astfel încît $p = kn$ și $p = lm$.

Avem : $(xy)^p = x^p \cdot y^p = x^{kn} \cdot x^{lm} = (x^n)^k \cdot (x^m)^k = e$.

516. *Numărul de elemente ale unui grup finit se numește ordinul grupului.*

a) Să se demonstreze că într-un grup G multiplicativ, finit, abelian, de ordinul n, avem $x^n = e$, oricare ar fi $x \in G^*$.
b) Se numește ordinul unui element $a \in G$, $a \neq e$, cel mai mic număr natural $k \neq 0$, astfel încît $a^k = e$. Să se demonstreze că ordinul oricărui element din G divide ordinul grupului.

Soluție

a) Fie $G = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ și $x \in G$. Elementele $xx_1, xx_2, \ldots, xx_n$ sînt distincte, căci din $xx_1 = xx_m$, rezultă $x_1 = x_m$. Așadar, elementele grupului G pot fi scrise și sub forma $xx_1, xx_2, \ldots, xx_n$.

---

* Se poate demonstra că în orice grup finit, multiplicativ, G, de ordinul n, avem $x^n = e$, oricare ar fi $x \in G$ (Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de teorema lui Lagrange). Demonstrația în cazul general este mai dificilă.

Scanned with OKEN Scanner

Avem : $(xx_1)(xx_2)\ldots(xx_n) = x_1x_2\ldots, x_n$, de unde ținînd seama de comutativitate, deducem :

$$x^n \cdot x_1x_2\ldots x_n = x_1x_2\ldots x_n \text{ și deci } x^n = e.$$

b) Avem : $n = kq + r$, unde $0 \leqslant r < k$ și deci $a^n = a^{kq+r}$.
Rezultă $e = (a^k)^q \cdot a^r$, și deci $a^r = e$.
Cum $r < k$ și k este cel mai mic număr natural diferit de 0, pentru care $x^k = e$, deducem $r = 0$.
Așadar $n = kq$; k este un divizor al lui n.

517. *Să se demonstreze că într-un grup multiplicativ de ordin par, există un element $x \neq e$, astfel încît $x^{-1} = x$.*

Soluție

Să presupunem că oricare ar fi $x \in G$, $x \neq e$, avem $x^{-1} \neq x$.
Fie G un grup de ordinul $2n$ unde $x_1 = e$.
Vom scrie elementele grupului G într-un șir de forma $x_1, x_2, x_2^{-1}, x_3, x_3^{-1}, \ldots, x_k, x_k^{-1}\ldots$ unde x_k este diferit de termenii precedenți. În acest caz și x_k^{-1} este diferit de termenii precedenți, căci $x_k^{-1} \neq x_k$ și dacă $x_k^{-1} = x_l (l < k)$, atunci $x_k = x_l^{-1} (l < k)$ și deci x_k ar fi egal cu un termen anterior. Dacă $x_k^{-1} = x_l^{-1}$ $(l < k)$ atunci $x_k = x_l$ și deci x_k ar fi egal cu un termen anterior.
Fragmentul $x_1, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}$ are $2n - 1$ termeni (toți distincți).
Cum grupul are $2n$ elemente mai există un element x_{n+1} distinct de precedentele și deci un element x_{n+1}^{-1}, distinct de precedentele, ceea ce ar însemna că grupul G are $2n + 1$ elemente distincte și deci n-ar fi de ordinul $2n$.

518. *Să se demonstreze că o lege de compoziție $\top$ între elementele unei mulțimi G, determină pe aceasta o structură de grup, dacă :*
1) este peste tot definită ;
2) este asociativă ;
3) oricare ar fi $a \in G$ și $b \in G$, ecuația $a \top x = b$ are cel puțin o soluție.
4) există $a \in G$, astfel încît ecuația $x \top a = b$, are cel puțin o soluție oricare ar fi $b \in G$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Fie $f(a)$ o soluție a ecuației $a \top x = a$, adică $a \top f(a) = a$ și m o soluție a ecuației $x \top a = b$, adică $b = m \top a$.

Avem : $b \top f(a) = (m \top a) \top f(a) = m \top (a \top f(a)) = m \top \top a = b$.

Fie $g(a)$ o soluție a ecuației $x \top a = a$, adică $g(a) \top a = a$ și n o soluție a ecuației $a \top x = b$, adică $b = a \top n$.

Avem : $g(a) \top b = g(a) \top (a \top n) = a \top n = b$.

Fie $f(a) = e'$ și $g(a) = e''$. S-a demonstrat că $x \top e' = x$, oricare ar fi x și $e'' \top x = x$, oricare ar fi x.

Așadar, $e' \top e'' = e' = e''$.

Deci $x \top e = e \top x = x$, oricare ar fi x, unde $e = e' = e''$.

Elementul e este element neutru.

Ecuația $b \top x = e$ are cel puțin o soluție b', altfel spus, există b' astfel încît $b \top b' = e$. Ecuația $b' \top x = e$ are cel puțin o soluție α , adică $b' \top \alpha = e$, de unde, înmulțind la stînga cu b, deducem $b \top b' \top \alpha = b \top e$, sau $\alpha = b$. Așadar, $b' \top b = e$.

Deoarece oricare ar fi x există x' astfel încît $x \top x' = x' \top x = e$, oricare element x este simetrizabil.

519. *O lege de compoziție* $\top$ *determină pe o mulțime* G *o structură de grup dacă :*

1) este peste tot definită ;
2) există $e \in G$, *astfel încît* $e \top x = x$, *oricare ar fi* $x \in G$;
3) este asociativă ;
4) pentru orice $x \in G$, *există* $x' \in G$, *astfel încît* $x' \top x = e$.

Soluție

Fie $x \top e = y$ și $x'' \top x' = e$. Compunînd la stînga în relația $x \top e = y$ cu x', obținem $x' \top (x \top e) = x' \top y$, de unde $e = x' \top y$ și deci $x' \top y = x' \top x$. Compunînd în ultima egalitate la stînga cu x'' obținem $x'' \top (x' \top y) = x'' \top \top (x' \top x)$ de unde $y = x$.

Așadar $e \top x = x \top e = x$, oricare ar fi $x \in G$. Elementul e este element neutru.

Fie $x \top x' = y$. Compunînd la stînga cu x' obținem $x' \top (x \top x') = x' \top y$, de unde $x' = x' \top y$. Compunînd

Scanned with OKEN Scanner

din nou la stînga cu x'', deducem $x'' \top x' = x'' \top (x' \top y)$ și deci $e = y$. Așadar, $x \top x' = e$.

Cum $x' \top x = x \top x' = e$, orice element x admite un simetric x'.

Legea $\top$ determină pe G o structură de grup.

520. *Fie G un grup multiplicativ. Un element $a \in G$ se numește element central dacă $ax = xa$, oricare ar fi $x \in G$.*

Să se demonstreze că mulțimea elementelor centrale ale lui G formează un subgrup al lui G.

Soluție

a) Fie a și b două elemente centrale.

a fiind element central, avem $(ab)x = a(bx) = bxa$.

Din ultima relație, ținînd seama că b este element central obținem : $(ab)x = x(ba)$.

b) Asociativitatea este evidentă.

c) e este element central căci $ex = xe = x$.

d) Dacă a este central, atunci din $ax = xa$, înmulțind la stînga și la dreapta cu a^{-1}, obținem : $a^{-1} axa^{-1} = a^{-1}xaa^{-1}$, de unde : $xa^{-1} = a^{-1}x$. Deci a^{-1} este element central.

521. *Fie Z mulțimea întregilor și $G \neq \{0\}$ un subgrup al grupului aditiv Z. Dacă a este cel mai mic număr natural diferit de 0 aparținînd lui G, atunci $G = \{x | x = a\alpha, \alpha \in Z\}$.*

Soluție

Se verifică fără dificultate că $\{x | x = a\alpha, \alpha \in Z\}$ este grup aditiv și $\{x | x = a\alpha, \alpha \in Z\} \subset G$.

Fie $x \in G$. Avem $x = a\alpha + r$ unde $0 \leqslant r < a$. Cum $x \in G$, $a\alpha \in G$ (căci dacă $\alpha > 0$, atunci $a\alpha = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{\alpha \text{ elemente}}$, iar dacă $\alpha < 0$, atunci $a\alpha = -\underbrace{(a + a + a + \ldots + a)}_{\alpha \text{ elemente}}$) rezultă $r = x - a\alpha \in G$; a fiind cel mai mic număr natural diferit de 0 din G, cum $r < a$, deducem $r = 0$. Așadar $x = a\alpha$, relație care demonstrează că $G \subset \{x | x = a\alpha, \alpha \in Z\}$. Deci $G = \{x | x = a\alpha, \alpha \in Z\}$.

522. *Fie A un grup aditiv abelian, iar B și C două subgrupuri ale lui A. Să se verifice că $D = \{b + c | b \in B, c \in C\}$ este un subgrup al lui A.*

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Dacă $z_1 = b_1 + c_1 \in D$ și
$z_2 = b_2 + c_2 \in D$

atunci $z_1 + z_2 = (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) = b_1 + c_1 + b_2 + c_2 = (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) \in D$, deci adunarea din A dă în D o lege de compoziție internă peste tot definită.

Asociativitatea în D este adevărată, căci este adevărată în A; $0 \in D$, căci $0 = 0 + 0$ cu $0 \in B$, $0 \in C$.

Dacă $z = b + c \in D$, atunci:

$b \in B \Rightarrow -b \in B$,
$c \in C \Rightarrow -c \in C$, deci
$(-b) + (-c) \in D$ și deci
$-(b + c) \in D$,

oricare element din D are invers în D.

Cu aceasta s-a arătat că se obține o structură de grup pe D.

523. *Fie G un grup multiplicativ astfel încît $(xy)^n = x^n y^n$, pentru un anumit întreg n oricare ar fi $x \in G$, $y \in G$, și $G^{(n)} = \{x^n | x \in G\}$ și $G_{(n)} = \{x \in G | x^n = e\}$.*

Să se demonstreze că $G^{(n)}$ și $G_{(n)}$ sînt grupuri ale lui G.

Soluție

a) Dacă $x^n \in G^{(n)}$ și $y^n \in G^{(n)}$, atunci $x^n \cdot y^n = (xy)^n \in G^{(n)}$.

Legea indusă pe $G^{(n)}$ este evident asociativă.

$e = e^n$ și deci $e \in G^{(n)}$;
$(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$ și deci $(x^n)^{-1} \in G^{(n)}$.

b) Dacă $x \in G_{(n)}$ și $y \in G_{(n)}$, atunci $x^n = e = y^n$ și deci $x^n \cdot y^n = (xy)^n = e \in G_{(n)}$.

Legea indusă pe $G_{(n)}$ este evident asociativă.

Deoarece $e^n = e$, avem $e \in G_{(n)}$.

Dacă $x \in G_{(n)}$, atunci $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = e^{-1} = e$ și deci $x^{-1} \in G_{(n)}$.

524. *Fie G un grup a cărui lege de compoziție se notează cu semnul $*$. Aplicațiile $\gamma_a : G \to G$ (respectiv $\delta_a : G \to G$) pentru care $\gamma_a(x) = a * x$ (respectiv $\delta_a(x) = x * a$) se numesc translații la stînga (respectiv la dreapta).*

Scanned with OKEN Scanner

Să se demonstreze că compunerea definește pe mulțimea translațiilor la stînga (respectiv la dreapta) o structură de grup.

Soluție.

1) Avem $: \gamma_a \circ \gamma_b : x \to \gamma_a(\gamma_b(x)) = \gamma_a(b * x) = (a * b) * x$ și deci $\gamma_a \circ \gamma_b = \gamma_{a*b}$. Legea „$\circ$" este peste tot definită în mulțimea translațiilor la stînga.

2) Avem: $(\gamma_a \circ \gamma_b) \circ \gamma_c = \gamma_a \circ (\gamma_b \circ \gamma_c)$, căci compunerea este asociativă.

3) Elementul γ_e, unde e este element neutru în G, este element neutru pentru legea „$\circ$". Într-adevăr,

$$\gamma_e \circ \gamma_a = \gamma_{e*a} = \gamma_a \text{ și}$$
$$\gamma_a \circ \gamma_e = \gamma_{a*e} = \gamma_a.$$

4) Elementul $\gamma_{a'}$, unde a' este simetricul lui a în G, este simetricul elementului γ_a pentru legea „$\circ$".

Într-adevăr, $\gamma_a \circ \gamma_{a'} = \gamma_{a*a'} = \gamma_e$ și
$\gamma_{a'} \circ \gamma_a = \gamma_{a'*a} = \gamma_e$.

525. *Fie H o parte a unui grup G, a cărui lege de compoziție este notată cu semnul $\top$. Dacă:*
1) *H este o mulțime finită;*
2) *Oricare ar fi $x \in H$ și $y \in H$, $x \top y \in H$ atunci H este un subgrup al lui G.*

Soluție

1) Legea indusă pe H este evident asociativă.
2) Fie $H = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Elementele $x_1 x_1, x_1 x_2, \ldots, x_1 x_n$ sînt din H în virtutea condiției 2 și sînt distincte, deoarece din $x_1 x_i = x_1 x_j$, rezultă înmulțind cu x_1^{-1} (element din G), $x_i = x_j$. Așadar, există $x_k \in H$, astfel încît $x_1 x_k = x_1$, de unde $x_k = e$ și deci $e \in H$.
3) Deoarece $e \in H$, există x_i astfel încît $x_1 x_i = e$, de unde rezultă că $x_i = x_1^{-1}$ și deci $x_1^{-1} \in H$. În mod analog se demonstrează că $x_2^{-1}, x_3^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$ sînt în H.

526. *a) Să se arate că pe mulțimea $G = (2, +\infty)$ legea $x \top y = xy - 2x - 2y + 6$ determină o structură de grup comutativ.*

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se arate că pe mulțimea $G' = (3, +\infty)$ *legea* $x * y = xy - 3x - 3y + 12$ *determină o structură de grup comutativ.*

c) Să se arate că între grupul de la punctul a) și grupul de la punctul b) există un izomorfism $f : (2, +\infty) \to (3, +\infty)$ *de forma* $f(x) = x + 1$ *și să se verifice că funcția f transformă elementul neutru al grupului G, în elementul neutru al grupului G'.*

Soluție

a) Fie $x \in (2, +\infty)$ și $y \in (2, +\infty)$. Avem $x \top y = (x - 2)(y - 2) + 2 > 2$ deci $x \top y \in (2, +\infty)$. Legea $\top$ este peste tot definită.

Avem $(x \top y) \top z = x \top (y \top z) = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y + 4z - 6$. Legea $\top$ este asociativă. Legea $\top$ este evident și comutativă.

Avem: $x \top e = x \Leftrightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x \Leftrightarrow e(x - 2) = 3(x - 2) \Leftrightarrow e = 3$. Elementul $e = 3$ este element neutru.

Avem: $x \top x' = e \Leftrightarrow xx' - 2x - 2x' + 6 = 3 \Leftrightarrow x'(x - 2) = 2x - 3 \Leftrightarrow x' = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$.

Dacă $x > 2$, atunci $\dfrac{2x - 3}{x - 2} > 2 \Leftrightarrow 2x - 3 > 2x - 4 \Leftrightarrow -3 > -4$.

Ultima inegalitate fiind adevărată, rezultă că $\dfrac{2x - 3}{x - 2} > 2$ și deci $x' \in (2, +\infty)$.

Deci legea $\top$ determină pe $(2, +\infty)$ o structură de grup.

b) Acest punct se rezolvă în mod analog ca în cazul punctului a).

Se obține elementul neutru $u = 4$.

c) Avem $f(x \top y) = (x \top y) + 1 = xy - 2x - 2y + 7$ și $f(x) * f(y) = (x + 1) * (y + 1) = (x + 1)(y + 1) - 3(x + 1) - 3(y + 1) + 12 = xy - 2x - 2y + 7$, deci $f(x \top y) = f(x) * f(y)$.

Funcția f este evident injectivă. Fie $y = x + 1$, adică $x = y - 1$. Dacă $y > 3$, atunci $x > 2$. Așadar, pentru orice $y > 3$, există $x > 2$ astfel încît $y = f(x)$ și anume $x = y - 1$. Funcția este deci surjectivă. Așadar, f este bijectivă. Avem $f(3) = 4$, adică $f(e) = u$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Faptul că funcția $f: (2, +\infty) \to (3, +\infty)$ este bijectivă se putea deduce și utilizînd reprezentarea grafică din figura 83.

Se observă că oricare paralelă la Ox dusă prin punctele mulțimii $(3, +\infty)$, reprezentată pe Oy, taie graficul într-un singur punct și deci funcția f este bijectivă.

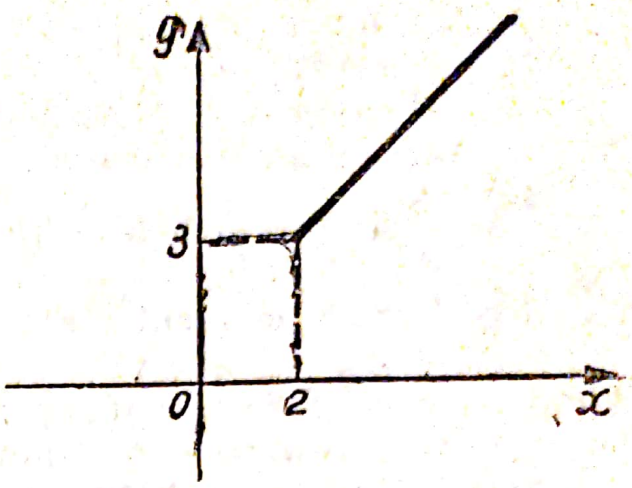


Fig. 83

527. *a) Să se arate că legea de compoziție* $x \top y = xy - 3x - 3y + 12$ *determină pe intervalul* $(3, +\infty)$ *o structură de grup comutativ.*

b) Să se arate că între grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive și grupul de la punctul a) există un izomorfism $f: R_+ \to (3, +\infty)$ *de forma* $f(x) = mx + n$.

c) Notăm cu $\overset{n}{\top} x = \underbrace{x \top x \top \ldots \top x}_{n \text{ elemente}}$. *Să se demonstreze că* $\overset{n}{\top} x = (x-3)^n + 3$ *folosindu-se rezultatul obținut la punctul b).*

Soluție

a) 1) Fie $x > 3$, $y > 3$. Din $x \top y = (x-3)(y-3) + 3$ rezultă $x \top y > 3$, adică legea $\top$ este peste tot definită.

2) Avem: $(x \top y) \top z = (xy - 3x - 3y + 12) \top z = xyz - 3xz - 3yz + 12z - 3xy + 9x + 9y - 36 - 3z + 12 = xyz - 3xy - 3yz - 3zx + 9x + 9y + 9z - 24$ și $x \top (y \top z) = x \top (yz - 3y - 3z + 12) = xyz - 3xy - 3xz + 12x - 3x - 3yz + 9y + 9z - 36 + 12 = xyz - 3xy - 3yz - 3zx + 9x + 9y + 9z - 24$.

Deci $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$ și legea este asociativă.

3) Este evident că $x \top y = y \top x$, adică legea este comutativă.

4) Avem: $x \top e = x \Leftrightarrow xe - 3x - 3e + 12 = x \Leftrightarrow e(x - 3) = 4(x - 3) \Leftrightarrow e = 4$. Așadar, $x \top 4 = x$, oricare ar fi $x > 3$. Elementul $4 \in (3, +\infty)$ este element neutru.

5) Avem: $x \top x' = e \Leftrightarrow xx' - 3x - 3x' + 12 = 4 \Leftrightarrow x' = \frac{3x - 8}{x - 3}$ și $\frac{3x - 8}{x - 3} > 3 \Leftrightarrow 3x - 8 > 3x - 9 \Leftrightarrow -8 > -9$.

Deci orice element $x \in (3, +\infty)$ admite un simetric $x' \in (3, +\infty)$.

b) Avem: $f(x \cdot y) = f(x) \top f(y) = mxy + n = (mx + n) \top (my + n) \Leftrightarrow mxy + n = m^2xy + (mn - 3m)x + (mn - 3m)y + n^2 - 6n + 12 \Leftrightarrow m^2 = m$ și $mn - 3m = 0$ și $n^2 - 6n + 12 = n$.

Soluția $m = 0$ nu este acceptabilă deoarece funcția $f(x) = n$ nu este bijectivă. Obținem $m = 1$ și $n = 3$.

Deci relația $f(xy) = f(x) \top f(y)$ este adevărată cînd $f(x) = x + 3$.

Să arătăm că această funcție este bijectivă.

Avem: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 3 = x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$ și deci f este injectivă.

Din $y = x + 3$ cu $y > 3$, rezultă $x = y - 3$ cu $x > 0$ și deci f este surjectivă.

c) Avem $f(x - 3) = x$. Cum $f(\alpha^n) = \overset{n}{\top} f(\alpha)$, punînd $\alpha = x - 3$ obținem $f((x - 3)^n) = \overset{n}{\top} f(x - 3)$, adică $(x - 3)^n + 3 = \overset{n}{\top} x$.

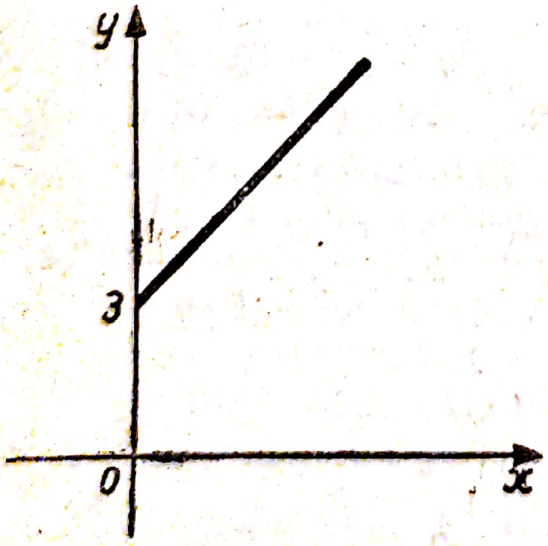


Fig. 84

Observație. Faptul că funcția $f: (0, +\infty) \to (3, +\infty)$, de forma $f(x) = x + 3$, este bijectivă se putea deduce și din reprezentarea grafică din figura 84.

Se observă că orice paralelă la Ox, prin punctele mulțimii $(3, +\infty)$, taie graficul într-un singur punct și deci funcția f este bijectivă.

Scanned with OKEN Scanner

528. *a) Să se demonstreze că pe mulțimea* $(-1, 1)$ *legea de compoziție* $x \top y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ *determină o structură de grup comutativ.*

b) Să se arate că între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive și grupul de la punctul a) există un izomorfism $f: (0, +\infty) \to (-1, 1)$ *de forma* $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

c) Să se verifice că prin izomorfismul f elementul neutru al grupului $(0, +\infty)$ *față de înmulțire se transformă în elementul neutru al grupului* $(-1, 1)$ *față de legea* $\top$.

Soluție

a) 1) Legea $\top$ este peste tot definită.

Fie $x \in (-1, 1)$ și $y \in (-1, 1)$, adică $-1 < x < 1$ și $-1 < x < 1$.

Avem:

$$\frac{x+y}{1+xy} < 1 \Leftrightarrow x + y < 1 + xy \Leftrightarrow xy - x - y + 1 > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(y-1) > 0.$$

Ultima inegalitate este adevărată, deoarece $x < 1$ și $y < 1$.

$$\frac{x+y}{1+xy} > -1 \Leftrightarrow x + y > -1 - xy \Leftrightarrow xy + x + y + 1 >$$
$$> 0 \Leftrightarrow (x+1)(y+1) > 0.$$

Ultima inegalitate este adevărată deoarece $x > -1$ și $y > -1$.

Așadar $-1 < \dfrac{x+y}{1+xy} < 1$, adică $x \top y \in (-1, 1)$.

Legea $\top$ este deci peste tot definită.

2) Legea $\top$ este asociativă, căci avem:

$$(x \top y) \top z = x \top (y \top z) = \frac{x + y + z + xyz}{xy + xz + yz + 1}.$$

3) Legea $\top$ este evident comutativă.

4) Există element neutru.

Într-adevăr,

$$x \top e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \Leftrightarrow x + e = x + x^2 e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e(x^2 - 1) = 0.$$

Deoarece $x \neq \pm 1$, rezultă $e = 0$.

5) Orice $x \in (-1, 1)$ admite un simetric x'.

Într-adevăr,

$$x \top x' = e \Leftrightarrow \frac{x + x'}{1 + xx'} = 0 \Leftrightarrow x' = -x.$$

Dacă $x \in (-1, 1)$ atunci $-x \in (-1,1)$ și deci $x' \in (-1, 1)$.

b) 1) Funcția $f : (0, +\infty) \to (-1, 1)$ este surjectivă. Într-adevăr, fie $y \in (-1, 1)$.

Avem :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow xy + y = x - 1 \Leftrightarrow x(y-1) =$$
$$= -1 - y \Leftrightarrow x = \frac{1+y}{1-y} > 0.$$

Deci pentru orice $y \in (-1, 1)$ există un $x \in (0, +\infty)$ și anume $x = \frac{1+y}{1-y}$, astfel încît $y = f(x)$.

2) Funcția f este injectivă. Într-adevăr,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} \Rightarrow x_1 x_2 + x_1 - x_2 - 1 =$$
$$= x_1 x_2 - x_1 + x_2 - 1 \Rightarrow 2(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

3) Avem : $f(x \cdot y) = f(x) \top f(y)$. Într-adevăr, $f(x \cdot y) =$

$$= \frac{xy - 1}{xy + 1} \text{ și } f(x) \top f(y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x) \cdot f(y)} =$$
$$= \frac{\frac{x-1}{x+1} + \frac{y-1}{y+1}}{1 + \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{y-1}{y+1}} = \frac{xy - 1}{xy + 1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Avem $f(1) = 0$.

O b s e r v a ț i e. Faptul că funcția f este bijectivă se putea deduce și din reprezentarea grafică din figura 85.

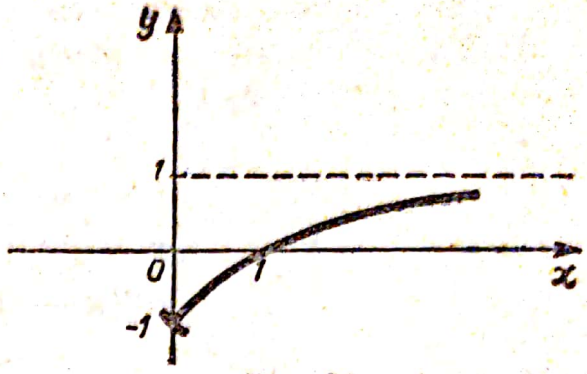


Fig. 85

Se observă că orice paralelă la Ox dusă prin punctele mulțimii $(-1, 1)$ reprezentate pe Oy, taie graficul într-un singur punct, deci f este bijectivă.

529. *a) Să se arate că legea de compoziție* $x * y = \dfrac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$ *determină pe intervalul* $(1, 2)$ *o lege de grup comutativ.*

b) Să se arate că între grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive și grupul de la punctul a) există un izomorfism $f: (0, +\infty) \to (1, 2)$ *de forma* $f(x) = \dfrac{x + m}{x + 1}$.

Soluție

a) 1) Fie $x \in (1, 2)$ și $y \in (1, 2)$. Relația $1 < x * y < 2$ este echivalentă cu $1 < \dfrac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5} < 2$.

Avem $2xy - 3x - 3y + 5 = xy - 2x - 2y + 4 + xy - x - y + 1 = (x - 2)(y - 2) + (x - 1)(y - 1) > 0$.

Inegalitățile $1 < x * y < 2$ sînt echivalente cu sistemul

$$\begin{cases} -xy + 2x + 2y - 4 < 0 \\ xy - x - y + 1 > 0 \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} -(x - 2)(y - 2) < 0 \\ (x - 1)(y - 1) > 0. \end{cases}$$

Ultimul sistem este verificat de orice $x \in (1, 2)$ și orice $y \in (1, 2)$. Legea $*$ este peste tot definită.

2) Avem: $(x * y) * z = x * (y * z) =$

$$* \frac{xyz - 2x - 2y - 2z + 6}{xy + xz + yz - 3x - 3y - 3z + 7}.$$

Legea $*$ este asociativă.

3) Este evident că : $x * y = y * x$.

Legea $*$ este comutativă.

4) Avem

$$x * e = x \Leftrightarrow \frac{3xe - 4x - 4e + 6}{2xe - 3x - 3e + 5} = x \Leftrightarrow 2e(x-1)(x-2) = 3(x-1)(x-2).$$

Cum $x \neq 1$ și $x \neq 2$, rezultă $e = \frac{3}{2}$. Relația $x * \frac{3}{2} = x$ este îndeplinită oricare ar fi $x \in (1, 2)$. Deoarece elementul $e = \frac{3}{2} \in (1, 2)$ rezultă că $\frac{3}{2}$ este element neutru.

5) Avem :

$$x * x' = e \Leftrightarrow \frac{3xx' - 4x - 4x' + 6}{2xx' - 3x - 3x' + 5} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x' = -x + 3$$ și

$1 < -x + 3 < 2 \Leftrightarrow 2 > x > 1$. Așadar orice element x admite un simetric.

b) Dacă există un izomorfism $f: (0, +\infty) \to (1, 2)$, de forma $f(x) = \frac{x + m}{x + 1}$, atunci $f(1) = e$, adică $\frac{1 + m}{2} = \frac{3}{2}$ și $m = 2$.

Deci $$f(x) = \frac{x + 2}{x + 1};$$

Funcția găsită este injectivă. Într-adevăr, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + 2}{x_1 + 1} = \frac{x_2 + 2}{x_2 + 1} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Funcția este și surjectivă, căci :

$$1 < \frac{x + 2}{x + 1} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-x}{x+1} < 0 \\ \\ \frac{1}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Avem : $f(x \cdot y) = \dfrac{xy+2}{xy+1}$ și

$$f(x) * f(y) = \frac{3f(x)\cdot f(y) - 4f(x) - 4f(y) + 6}{2f(x)\cdot f(y) - 3f(x) - 3f(y) + 5} = \frac{xy+2}{xy+1},$$

deci $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$.

Observație. Faptul că funcția $f : (0, +\infty) \to (1,2)$ de forma $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ este bijectivă, se putea deduce și din reprezentarea grafică din figura 86.

Se observă că orice paralelă dusă la Ox prin punctele mulțimii (1, 2) reprezentate pe Oy, taie graficul într-un singur punct și deci f este bijectivă.

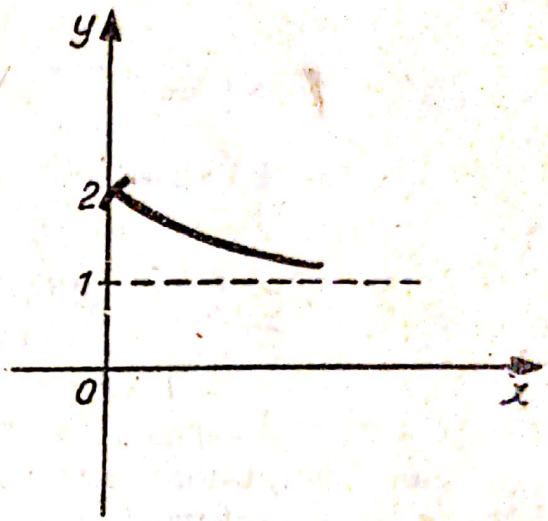


Fig. 86

530. *a) Să se demonstreze că pe intervalul* $(1, +\infty)$ *legea de compoziție* $x \top y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2}$ *determină o structură de grup comutativ, izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive. (Se va determina un izomorfism* $f : R_+ \to (1, +\infty)$ *de forma* $f(x) = \sqrt{mx + n}$*).*

b) Să se calculeze $\overset{\alpha}{\top} x$, *unde* $\alpha \in Z$ *și să se verifice relațiile:*

$$(\overset{\alpha}{\top} x) \top (\overset{\beta}{\top} x) = \overset{\alpha+\beta}{\top} x;$$

$$(\overset{\alpha}{\top} x)^\beta = \overset{\alpha\beta}{\top} x.$$

Soluție

a) 1) Legea $\top$ este peste tot definită. Într-adevăr, dacă $x > 1$ și $y > 1$, atunci $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1 > 1$ și deci $\sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2} > 1$.

2) Legea $\top$ este asociativă căci avem :

$$(x \top y) \top z = x \top (y \top z) =$$

$$= \sqrt{x^2y^2z^2 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

3) Legea $\top$ este evident comutativă.

4) Avem :

$$x \top e = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2e^2 - x^2 - e^2 + 2} = x \Leftrightarrow x^2e^2 - x^2 - e^2 + 2 = x^2 \Leftrightarrow e^2(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) \Leftrightarrow e^2 = 2 \Leftrightarrow e = \sqrt{2} > 1.$$

$e = \sqrt{2}$ este element neutru.

5) Avem :

$$x \top x' = e \Leftrightarrow \sqrt{x^2x'^2 - x^2 - x'^2 + 2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2x'^2 - x^2 - x'^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow x'^2 \cdot (x^2 - 1) = x^2 \Leftrightarrow x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Dacă $x > 1$, atunci $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 1$ căci, cu condiția $x > 1$; $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} > 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^2 > x^2 - 1 \Leftrightarrow 0 > -1$.

Să presupunem că există un izomorfism $f : (0, +\infty) \to (1, +\infty)$ de forma $f(x) = mx + n$. Atunci ar trebui să avem :

$$f(xy) = f(x) \top f(y), \text{ adică}$$

$$\sqrt{mxy + n} = (\sqrt{mx + n}) \top (\sqrt{my + n}), \text{ sau}$$

$$\sqrt{mxy + n} = \sqrt{(mx + n)(my + n) - (mx + n) - (my + n) + 2}.$$

Din egalitatea anterioară, deducem :

$$mxy + n = m^2xy + m(n - 1)x + m(n - 1)y + n^2 - 2n + 2.$$

Singurele valori convenabile pentru m și n sînt $m = 1$, și $n = 1$. Așadar, dacă există un izomorfism $f : (0, +\infty) \to (1, +\infty)$, de forma $f(x) = \sqrt{mx + n}$, atunci acesta nu poate fi decît $f(x) = \sqrt{x + 1}$.

Reprezentînd grafic funcția $f : (0, +\infty) (1, +\infty)$ de forma $f(x) = \sqrt{x + 1}$, observăm că orice paralelă la Ox prin punctele mulțimii $(1, +\infty)$, taie graficul într-un singur punct. Deci f este bijectivă. Se arată fără dificultate că $f(xy) = (x) \top f(y)$.

b) Avem :

$$x = f(x^2-1) \text{ căci } \sqrt{x^2-1+1} = x \ (x > 1),$$

$$\overset{n}{\top} x = \overset{n}{\top} [f(x^2-1)] = f((x^2-1)^n) = \sqrt{(x^2-1)^n+1} \ (n \in N^*),$$

$$\overset{-n}{\top} x = \overset{n}{\top} x' = \overset{n}{\top} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2-1}-1\right)^n+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+(x^2-1)^n}{(x^2-1)^n}} \ (n \in N^*),$$

$$\overset{0}{\top} x = e = \sqrt{2}.$$

531. *a) Să se demonstreze că pe mulțimea G a numerelor complexe de modul 1, înmulțirea determină o structură de grup.*

b) Să se demonstreze că pe mulțimea M a matricelor de forma $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$ *înmulțirea determină o structură de grup.*

c) Să se arate că grupurile G și M sînt izomorfe.

Soluție

a) Fie $z_1 \in G$ și $z_2 \in G$, adică $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$. Avem

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 1.$$

Așadar, înmulțirea este peste tot definită în G. Înmulțirea numerelor complexe este asociativă și comutativă. $1 \in G$, căci $|1| = 1$ (elementul neutru este 1). Dacă $z \in G$, atunci

$$|z| = 1 \text{ și deci } \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1 \text{ și deci } \frac{1}{z} \in G.$$

b) Avem:

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{Vmatrix}.$$

Așadar, înmulțirea este peste tot definită în M.
Înmulțirea este asociativă și evident comutativă.

Matricea unitate $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ poate fi reprezentată prin $\begin{Vmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ -\sin 0 & \cos 0 \end{Vmatrix}$ și face deci parte din M.

Avem : $\begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} \cos(-\alpha) & \sin(-\alpha) \\ -\sin(-\alpha) & \cos -\alpha) \end{Vmatrix}$ și deci inversa unei matrice din M, este o matrice din M.

c) Ținem seama că orice număr complex z, cu $|z| = 1$ poate fi scris sub forma $\cos\alpha + i\sin\alpha$.

Aplicația $f : G \to M$, pentru care $f(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$ este evident bijectivă. Avem : $f[(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)] = f[\cos(\alpha+\beta, + i\sin(\alpha+\beta)] = \begin{Vmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{Vmatrix} =$

$$= \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{Vmatrix} =$$

$$= f(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot f(\cos\beta + i\sin\beta).$$

532 *a) Să se demonstreze că pe mulțimea* $G = \{x + y\sqrt{5}, x \in Q, y \in Q, x^2 - 5y^2 = 1\}$ *înmulțirea determină o structură de grup.*

b) Să se demonstreze că pe mulțimea M a matricelor de forma

$$\begin{Vmatrix} x & 2y \\ \frac{5}{2}y & x \end{Vmatrix}$$

unde $x \in Q$, $y \in Q$ *și* $x - 5y^2 = 1$, *înmulțirea determină o structură de grup.*

c) Să se arate că între grupul G și grupul M există un izomorfism $f : G \to M$, *de forma*

$$f(x + y\sqrt{5}) = \begin{Vmatrix} x & 2y \\ \frac{5}{2}y & x \end{Vmatrix}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție.

a) Fie $z \in G$ și $z' \in G$. Aceasta înseamnă că z, respectiv z' sînt de forma $z = x + y\sqrt{5}$, $z' = x' + y'\sqrt{5}$, unde x, y, x', $y' \in Q$, $x^2 - 5y^2 = 1$ și $x'^2 - 5y'^2 = 1$.

Avem $z \cdot z' = (x + y\sqrt{5})(x' + y'\sqrt{5}) = xx' + 5yy' + (xy' + x'y)\sqrt{5} = X + Y\sqrt{5}$ unde $X = xx' + 5yy'$ și $Y = xy' + x'y$ și deci $X \in Q$, $Y \in Q$.

$$X^2 - 5Y^2 = (xx' + 5yy')^2 - 5(xy' + x'y)^2 = x^2x'^2 + 25y^2y'^2 - 5x^2y'^2 - 5x'^2y^2 = x^2(x'^2 - 5y'^2) - 5y^2(x'^2 - 5y'^2) = x^2 - 5y^2 = 1.$$

Așadar, $z \cdot z' \in G$. Înmulțirea este peste tot definită în G. Înmulțirea este asociativă și comutativă.

Deoarece $1 = 1 + 0\sqrt{5}$ și $1^2 - 5 \cdot 0^2 = 1$, rezultă $1 \in Q$.

Fie $z = x + y\sqrt{5}$ unde $x \in Q$, $y \in Q$ și $x^2 - 5y^2 = 1$.

Avem $\frac{1}{z} = \frac{1}{x + y\sqrt{5}} = \frac{x - y\sqrt{5}}{x^2 - 5y^2} = x - y\sqrt{5} = x + (-y)\sqrt{5}$.

Deoarece $x \in Q$, $-y \in Q$, $x^2 - 5(-y)^2 = x^2 - 5y^2 = 1$, rezultă că $\frac{1}{z} \in G$.

Deci înmulțirea determină pe G o structură de grup comutativ.

b) Dacă $x, y, x', y' \in Q$, $x^2 - 5y^2 = 1$, $x'^2 - 5y'^2 = 1$ atunci

$$\begin{Vmatrix} x & 2y \\ \frac{5}{2}y & x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' & 2y' \\ \frac{5}{2}y' & x' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} xx' + 5yy' & 2(xy' + yx') \\ \frac{5}{2}(x'y + xy') & xx' + 5yy' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} X & 2Y \\ \frac{5}{2}Y & X \end{Vmatrix},$$

unde $X = xx' + 5yy'$, $Y = xy' + x'y$ și evident $X \in Q$, $Y \in Q$.

Avem: $X^2 - 5Y^2 = (xx' + 5yy')^2 - 5(xy' + x'y)^2 = 1$ (vezi calculul la punctul a).

Scanned with OKEN Scanner

Înmulțirea este asociativă.

Matricea unitate $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ poate fi scrisă sub forma $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \cdot 0 \\ \frac{5}{2} \cdot 0 & 1 \end{Vmatrix}$

și avem

$1 - 5.0^2 = 1$, deci $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \in M$. Avem: $\begin{Vmatrix} x & 2y \\ \frac{5}{2}y & x \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} x & 2(-y) \\ \frac{5}{2}(-y) & x \end{Vmatrix}$,

unde $x^2 - 5(-y)^2 = 1$ și deci $\begin{Vmatrix} x & 2y \\ \frac{5}{2}y & x \end{Vmatrix}^{-1} \in M$.

Așadar, înmulțirea determină pe M o structură de grup.

c) Funcția f este surjectivă, căci orice matrice de forma $\begin{Vmatrix} x & 2y \\ \frac{5}{2}y & x \end{Vmatrix}$, $x \in Q$, $y \in Q$, $x^2 - 5y^2 = 1$, este imaginea elementului $x + y\sqrt{5}$, cu $x \in Q$, $y \in Q$, $x^2 - 5y^2 = 1$.

Funcția f este și injectivă, căci din $f(x + y\sqrt{5}) = f(x' + y'\sqrt{5})$, adică $\begin{Vmatrix} x & 2y \\ \frac{5}{2}y & x \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x' & 2y' \\ \frac{5}{2}y' & x' \end{Vmatrix}$ rezultă $x = x'$, $y = y'$ și deci $x + y\sqrt{5} = x' + y'\sqrt{5}$.

Așadar f este bijectivă.

Avem $f((x+y\sqrt{5})(x'+y'\sqrt{5})) = \begin{Vmatrix} xx'+5yy' & 2(xy'+x'y) \\ \frac{5}{2}(xy'+x'y) & xx'+5yy' \end{Vmatrix}$

și $f(x + y\sqrt{5}) \cdot f(x' + y'\sqrt{5}) = \begin{Vmatrix} x & 2y \\ \frac{5}{2}y & x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' & 2y' \\ \frac{5}{2}y' & x' \end{Vmatrix} =$

$$= \begin{Vmatrix} xx' + 5yy' & 2(xy' + x'y) \\ \frac{5}{2}(xy' + x'y) & xx' + 5yy' \end{Vmatrix}$$

și deci $f(z \cdot z') = f(z) \cdot f(z')$.

Scanned with OKEN Scanner

533. *a) Să se demonstreze că toate grupurile de ordinul 2 sînt izomorfe.*

b) Să se demonstreze că toate grupurile de ordinul 3 sînt izomorfe.

Soluție.

a) Să presupunem că legea $\top$ determină pe $\{a_0, a_1\}$ o structură de grup ($a_0 \neq a_1$) și fie a_0 elementul neutru. Deci $a_0 \top a_0 = a_0$, $a_0 \top a_1 = a_1 \top a_0 = a_1$. Dacă $a_1 \top a_1 = a_1$ atunci $a_1 \top a_1 = a_1 \top a_0$ și deci $a_1 = a_0$ în contradicție cu condiția $a_1 \neq a_0$. Așadar, $a_1 \top a_1 = a_0$. Tabelul legii de compoziție este următorul:

$\top$	a_0	a_1
a_0	a_0	a_1
a_1	a_1	a_0

Notînd pe a_0 cu $\hat{0}$ și pe a_1 cu $\hat{1}$ tabelul devine

$\top$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

și este identic cu tabelul corespunzător grupului aditiv al claselor de resturi modulo 2. Înseamnă că orice grup de ordinul 2 este izomorf cu grupul aditiv al claselor de resturi modulo 2 și deci toate grupurile de ordinul 2 sînt izomorfe.

b) Să presupunem că legea $\top$ determină pe mulțimea $\{a_0, a_1, a_2\}$ o structură de grup ($a_0 \neq a_1$, $a_0 \neq a_2$, $a_1 \neq a_2$) și fie a_0 elementul neutru. Trebuie să avem:

$$a_0 \top a_0 = a_0,$$
$$a_1 \top a_0 = a_0 \top a_1 = a_1,$$
$$a_2 \top a_0 = a_0 \top a_2 = a_2.$$

Dacă $a_1 \top a_2 = a_1$, atunci $a_1 \top a_2 = a_1 \top a_0$ și deci $a_2 = a_0$, în contradicție cu condiția $a_0 \neq a_2$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a_1 \top a_2 = a_2$, atunci $a_1 \top a_2 = a_0 \top a_2$ și deci $a_1 = a_0$, în contradicție cu condiția $a_0 \neq a_1$.

Singura posibilitate rămasă este $a_1 \top a_2 = a_0$.

În mod analog se deduce $a_2 \top a_1 = a_0$.

Dacă $a_1 \top a_1 = a_0$, atunci ținînd seama că avem și $a_1 \top a_2 = a_0$ rezultă $a_1 \top a_1 = a_1 \top a_2$ și deci $a_1 = a_2$, în contradicție cu $a_1 \neq a_2$.

Dacă $a_1 \top a_1 = a_1$, atunci $a_1 \top a_1 = a_1 \top a_0$ și deci $a_1 = a_0$.

Rezultă $a_1 \top a_1 = a_2$.

În mod analog se deduce $a_2 \top a_2 = a_1$.

Tabelul legii $\top$ este următorul:

$\top$	a_0	a_1	a_2
a_0	a_0	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2	a_0
a_2	a_2	a_0	a_1

Notînd pe a_0 cu $\hat{0}$, pe a_1 cu $\hat{1}$, pe a_2 cu $\hat{2}$, obținem următorul tabel:

$\top$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$

Acest tabel este identic cu cel corespunzător grupului aditiv al claselor de resturi modulo 3. Toate grupurile de ordinul 3 sînt izomorfe cu grupul aditiv al claselor de resturi modulo 3. Deci toate grupurile de ordinul 3 sînt izomorfe.

534. *Fie ABC un triunghi echilateral în planul P. Notăm cu e transformarea identică a planului, cu R_1 rotația în jurul centrului triunghiului de unghi $\frac{2\pi}{3}$, R_2 rotația în jurul*

centrului de unghi $\frac{4\pi}{3}$, *cu* S_A *simetria față de înălțimea din* A, *cu* S_B *simetria față de înălțimea din* B *și* S_C *simetria față de înălțimea din* C *(toate aceste transformări lasă triunghiul pe loc).*

Să se verifice că pe mulțimea $\{e, R_1, R_2, S_A, S_B, S_C\}$ *compunerea definește o structură de grup necomutativ și că acest grup este izomorf cu grupul permutărilor unei mulțimi de 3 elemente.*

Soluție

Observăm că orice transformare este complet determinată dacă se precizează imaginile vîrfurilor triunghiului.

Prin e, vîrfurile rămîn pe loc, deci e, realizează corespondențele: $A \to A$, $B \to B$, $C \to C$. Vom nota funcția e prin tabelul $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}$.

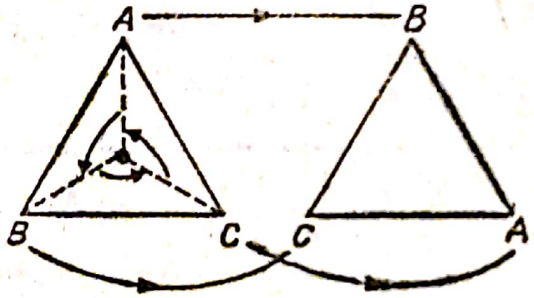


Fig. 87

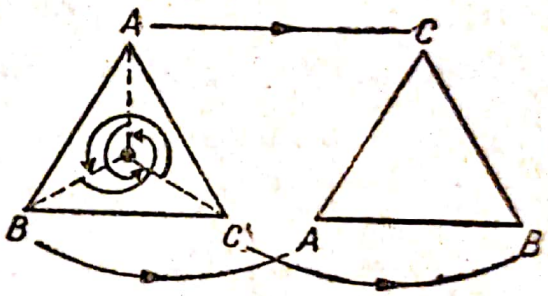


Fig. 88

Rotația R_1 realizează corespondențele $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$, figura 87, iar rotația R_2 realizează corespondențele $A \to C$, $B \to A$, $C \to B$, figura 88. Vom nota pe R_1, respectiv R_2, prin tabelul $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$, respectiv $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix}$.

Simetria S_A realizează corespondențele $A \to A$, $B \to C$, $C \to B$, figura 89.

Pentru acest motiv va fi notată prin tabelul $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}$.

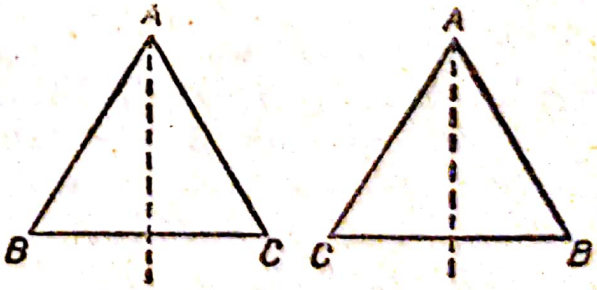


Fig. 89

Motive analoage ne determină să reprezentăm simetriile S_B, respectiv S_C, prin tabelele $\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}$ respectiv $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$.

Se constată că transformările date pot fi notate prin permutările mulțimii $\{A, B, C\}$.

Se mai observă că compunerea a două transformări este perfect determinată dacă se indică imaginile vîrfurilor, operație care se face utilizînd compunerea permutărilor prin care s-au notat acestea.

Avem de exemplu:

$$S_A \circ R_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix} =$$

$$= S_C \text{ și } R_1 \circ S_A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix} = S_B.$$

Se obține următorul tabel:

$\circ$	e	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
e	e	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
R_1	R_1	R_2	e	S_B	S_C	S_A
R_2	R_2	e	R_1	S_C	S_A	S_B
S_A	S_A	S_C	S_B	e	R_2	R_1
S_B	S_B	S_A	S_C	R_1	e	R_2
S_C	S_C	S_B	S_A	R_2	R_1	e

Acest tabel definește evident o structură de grup pe $\{e, R_1, R_2, S_A, S_B, S_C\}$. Acest grup este izomorf cu grupul permutărilor asupra mulțimii $\{A, B, C\}$, căci dacă notăm permutările cu transformările geometrice asociate, obținem pentru compunere același tabel ca mai înainte.

535. *Fie un poligon regulat cu n laturi. Notăm cu $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, rotațiile în jurul centrului care lasă poligonul pe loc*

Scanned with OKEN Scanner

$(r_0 = R(0°),\ r_1 = R\left(\frac{360°}{n}\right),\ r_2 = R\left(2 \cdot \frac{360°}{n}\right) \ldots, r_{n-1} =$

$= R\left[(n-1)\frac{360°}{n}\right]$.

a) Să se verifice că compunerea definește pe mulțimea $\{r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}\}$ *o structură de grup comutativ (grupul rotațiilor poligonului regulat cu n laturi).*

b) Să se scrie tabelul operației pentru cazul rotațiilor triunghiului echilateral, pătratului și hexagonului.

c) Fie $G_n = \{1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ *mulțimea rădăcinilor complexe de ordinul n ale unității. Să se verifice că înmulțirea determină pe* G_n *o structură de grup comutativ.*

d) Să se arate că grupul rotațiilor poligonului regulat cu n laturi, grupul multiplicativ al rădăcinilor complexe de ordinul n ale unității și grupul claselor de resturi modulo n sînt izomorfe.

Soluție.

a) 1) Avem : $r_k \circ r_l = R\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right) \circ R\left(l \cdot \frac{360°}{n}\right) =$

$= R\left((l+k)\frac{360°}{n}\right) = R\left(m \cdot \frac{360°}{n}\right) = r_m$, unde m este restul împărțirii lui $l + k$ la n.

Deci compunerea a două rotații ale poligonului regulat cu n laturi este tot o astfel de rotație.

2) Compunerea funcțiilor fiind asociativă, în particular compunerea funcțiilor $r_0, r_1, \ldots, r_n$ este asociativă.

3) Rotația $r_0 = R(0°)$ este, evident, elementul neutru.

4) Avem : $r_k^{-1} = r_{n-k}$. Într-adevăr,

$$r_k \cdot r_k^{-1} = r_k^{-1} \cdot r_k = R\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right) \circ R\left((n-k)\frac{360°}{n}\right) = R(360°) = r_0.$$

$\circ$	r_0	r_1	r_2
r_0	r_0	r_1	r_2
r_1	r_1	r_2	r_0
r_2	r_2	r_0	r_1

$\circ$	r_0	r_1	r_2	r_3
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3
r_1	r_1	r_2	r_3	r_0
r_2	r_2	r_3	r_0	r_1
r_3	r_3	r_0	r_1	r_3

Scanned with OKEN Scanner

$\circ$	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
r_1	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0
r_2	r_2	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1
r_3	r_3	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2
r_4	r_4	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3
r_5	r_5	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4

c) 1) Dacă $z_1 \in G_n$ și $z_2 \in G_n$, atunci $z_1^n = 1$ și $z_2^n = 1$ și deci $(z_1 z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n = 1$, relație din care rezultă că produsul a două rădăcini de ordinul n ale unității este o rădăcină de ordinul n a unității.

2) Asociativitatea este evidentă.

3) $1^n = 1$ și deci $1 \in G_n$.

4) Dacă $z \in G_n$, atunci $z^n = 1$ și deci $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1$.

Așadar, inversa unei rădăcini de ordinul n a unității este o rădăcină de ordinul n a unității.

Evident că grupul G_n este comutativ.

d) Aplicația $f: \{r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}\} \to \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\}$ de forma $f(r_k) = \hat{k}$ este izomorfism. Într-adevăr, ea este evident bijectivă și $f(r_k \circ r_l) = f(r_m) = \hat{m}$, unde m este restul împărțirii lui $k + l$ la n; $f(r_k) \circ f(r_l) = \hat{k} + \hat{l} = \hat{m}$, unde m este restul împărțirii lui $k + l$ la m.

Așadar, $f(r_k \circ r_l) = f(r_k) + f(r_l)$.

Se observă că rădăcinile de ordinul n ale unității sînt de forma

$$z_k = \cos k \cdot \frac{360^\circ}{n} + i \sin k \cdot \frac{360^\circ}{n} \quad (k = 0, \ldots, n-1).$$

Aplicația $\varphi: \{r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}\} \to G_n$, de forma

$$\varphi(r_k) = \cos k \cdot \frac{360^\circ}{n} + i \sin k \cdot \frac{360^\circ}{n}$$ este un izomorfism.

Într-adevăr, φ este evident bijectivă și $\varphi(r_k \circ r_l) = \varphi(r_m) = \cos m \cdot \frac{360^\circ}{n} + i \sin m \cdot \frac{360^\circ}{n}$, unde m este restul împărțirii lui $k + l$ la n;

$$\varphi(r_k) \cdot \varphi(r_l) = \left(\cos k \cdot \frac{360^\circ}{n} + i \sin k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) \cdot \left(\cos l \cdot \frac{360^\circ}{n} + i \sin l \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) = \cos m \cdot \frac{360^\circ}{n} + i \sin m \cdot \frac{360^\circ}{n},$$

unde m este restul împărțirii lui $k + l$ la n. Așadar, $\varphi(r_k \circ r_l) = \varphi(r_k) \cdot \varphi(r_l)$.

536. a) *Fie $\mathcal{P}(E)$ mulțimea părților unei mulțimi E. Să se demonstreze că diferența simetrică, notată cu $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$ determină pe mulțimea $\mathcal{P}(E)$ o structură de grup comutativ în care $X^2 = e$, oricare ar fi $X \in \mathcal{P}(E)$ ($X^2 = X \Delta X$ și e este elementul neutru).*

b) *În grupul determinat pe mulțimea părților mulțimii $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ de diferența simetrică, să se rezolve ecuația $\{1, 2, 3, 4\} \Delta X = \{1, 2\}$.*

Soluție

a) Legea Δ este evident peste tot definită în $\mathcal{P}(E)$.

Pentru a demonstra asociativitatea ținem seama de relația $f_{X \Delta Y} = f_X + f_Y - 2 f_X f_Y$, unde prin f_A s-a notat funcția caracteristică a mulțimii A (vezi capitolul III).

Avem $f_{(X \Delta Y) \Delta Z} = f_{X \Delta Y} + f_Z - 2 f_{X \Delta Y} \cdot f_Z = f_X + f_Y - 2 f_X \cdot f_Y + f_Z - 2 (f_X + f_Y - 2 f_X f_Y) f_Z = f_X + f_Y + f_Z - 2 f_X f_Y - 2 f_X f_Z - 2 f_Y f_Z + 4 f_X f_Y f_Z$; $f_{X \Delta (Y \Delta Z)} = f_X + f_{Y \Delta Z} - 2 f_X \cdot f_{Y \Delta Z} = f_X + f_Y + f_Z - 2 f_Y f_Z - 2 f_X (f_Y + f_Z - 2 f_Y \cdot f_Z) = f_X + f_Y + f_Z - 2 f_X f_Y - 2 f_X f_Z - 2 f_Y f_Z + 4 f_X f_Y f_Z$.

Din $f_{(X \Delta Y) \Delta Z} = f_{X \Delta (Y \Delta Z)}$, rezultă $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$.

Legea Δ este evident comutativă.

Avem: $X \Delta \varnothing = (X - \varnothing) \cup (\varnothing - X) = X \cup \varnothing = X$ și deci $\varnothing$ este elementul neutru.

Avem: $X \Delta X = (X - X) \Delta (X - X) = \varnothing$. Deci simetricul oricărui element X este el însuși.

Așadar, $X^2 = e$, oricare ar fi $X \in \mathcal{P}(E)$.

b) Simetricul elementului $\{1, 2, 3, 4\}$ este $\{1, 2, 3, 4\}$ și deci: $\{1,2,3,4\} \Delta X = \{1,2\} \Leftrightarrow (\{1,2,3,4\} \Delta \{1,2,3,4\}) \Delta X = \{1, 2, 3, 4\} \Delta \{1, 2\} \Leftrightarrow \varnothing \Delta X = \{1, 2, 3, 4\} \Delta \{1, 2\} \Leftrightarrow X = (\{1,2,3,4\} - \{1, 2\}) \cup (\{1, 2\} - \{1,2,3,4\}) \Leftrightarrow X = \{3, 4\}$.

537. *a) Fie Ox și Oy două axe perpendiculare în planul P. Notăm cu e transformarea identică a planului P, cu S_x simetria față de axa Ox, cu S_y simetria față de axa Oy și cu S_o simetria față de 0. Să se arate că compunerea definește pe mulțimea $\{e, S_x, S_y, S_o\}$ o structură de grup.*

b) Fie Ox, Oy, Oz trei axe perpendiculare în spațiul S. Notăm cu e transformarea identică a spațiului S, cu S_{ox} simetria față de axa Ox, cu S_{oy} simetria față de axa Oy și cu S_{oz} simetria față de axa Oz. Să se arate că compunerea definește pe mulțimea $\{e, S_{ox}, S_{oy}, S_{oz}\}$ o structură de grup.

c) Fie $E = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ și $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, A, B, E\}$. Diferența simetrică, Δ, $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$, definește pe mulțimea $\mathcal{P}(E)$ o structură de grup. (vezi ex. nr. 536).

d) Să se demonstreze că grupurile definite la a), b), c) sînt izomorfe. (Orice grup izomorf cu aceste grupuri se numește grup al lui Klein).

e) Există un grup de ordinul 4 care să nu fie izomorf cu grupurile de la a), b), c) ?

Soluție.

a) Compunerea definește pe mulțimea $(e, S_x, S_y, S_o\}$ o lege de compoziție dată în tabelul următor (vezi figura 90).

Se verifică fără dificultate că sînt satisfăcute axiomele grupului.

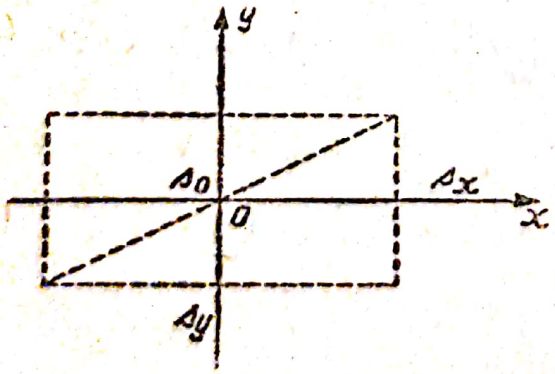


Fig. 90

o	e	S_x	S_y	S_o
e	e	S_x	S_y	S_o
S_x	S_x	e	S_o	S_y
S_y	S_y	S_o	e	S_x
S_o	S_o	S_y	S_x	e

Scanned with OKEN Scanner

b) Vom arăta că $S_{oy} \circ S_{oz} = S_{ox}$. Notăm cu M' simetricul lui M față de Oy și cu M'' simetricul lui M' față de Oz (fig. 91). AB este linie mijlocie în triunghiul $MM'M''$ și deci $AB \parallel MM''$. Dar $Ox \perp Oy$ și $Ox \perp Oz$ și deci $Ox \perp (yOz)$. Cum $AB \subset (xOy)$, rezultă $Ox \perp AB$. Ținînd seama că $AB \parallel MM''$, rezultă $MM'' \perp Ox$. Fie P mijlocul lui MM''. Deoarece $M'M''$ este perpendiculară pe Oz și Oz este perpendiculară pe planul (xOy), rezultă $M'M'' \parallel (xOy)$. Cum PA este linie mijlocie în triunghiul $MM'M''$ și deci este paralelă cu $M'M''$, rezultă $PA \subset (xOy)$ și deci $P \in (xOy)$.

În mod analog se deduce $P \in (xOz)$.

Deci punctul P se află pe Ox, dreapta de intersecție a planelor (xOy) și (xOz). Așadar, M'' este simetricul față de Ox al punctului M, ceea ce demonstrează că $S_{oy} \circ S_{oz} = S_{ox}$. Celelalte compuneri de acest tip se deduc analog. Obținem legea de compoziție din tabelul următor:

$\circ$	e	S_{ox}	S_{oy}	S_{oz}
e	e	S_{ox}	S_{oy}	S_{oz}
S_{ox}	S_{ox}	e	S_{oz}	S_{oy}
S_{oy}	S_{oy}	S_{oz}	e	S_{ox}
S_{oz}	S_{oz}	S_{oy}	S_{ox}	e

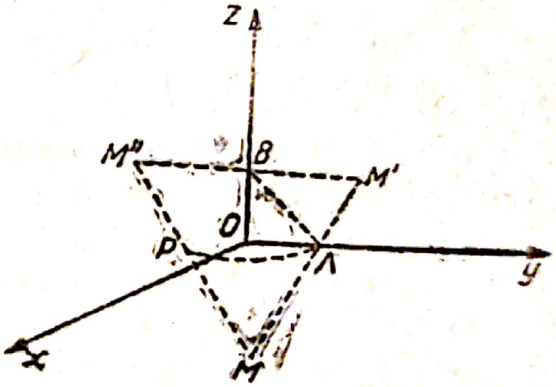


Fig. 91

Această lege de compoziție satisface evident axiomele grupului.

c) Legea de compoziție este redată în tabelul alăturat.

d) Notînd primul element din fiecare grup cu a, al doilea cu b, al treilea cu c și al patrulea cu d și transcriind tabelele legilor de compoziție ale grupurilor de la a), b), c), obținem același tabel:

$\circ$	$\varnothing$	A	B	E
$\varnothing$	$\varnothing$	A	B	E
A	A	$\varnothing$	E	B
B	B	E	$\varnothing$	A
E	E	B	A	$\varnothing$

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Scanned with OKEN Scanner

e) Grupul aditiv al claselor de resturi modulo 4 nu este izomorf cu grupurile de la a), b), c). Într-adevăr la grupurile de la a), b), c) avem $x \top x = e$, oricare ar fi x (s-a notat prin $\top$ legea de compoziție și prin e elementul neutru), iar în grupul claselor de resturi modulo 4 avem, de exemplu, $\hat{3} + \hat{3} = \hat{2}$ ($\hat{2}$ nu este element neutru).

538. *Fie G un grup multiplicativ, în care s-a notat cu e elementul neutru.*

a) Să se demonstreze că dacă oricare ar fi $x \in G$, avem $x^2 = e$, atunci G este un grup abelian.

b) Să se dea exemple de grupuri avînd această proprietate.

Soluție

a) Din $x^2 = e$, adică $x \cdot x = e$, rezultă $x = x^{-1}$, oricare ar fi x.

Avem: $xy = (xy)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} = yx$.

b) Pentru exemple vezi exercițiul precedent.

539. *a) Să se demonstreze că mulțimea automorfismelor $f: G \to G$ ale unui grup multiplicativ G, înzestrată cu operația de compunere, are o structură de grup (acest grup se numește grupul automorfismelor grupului G).*

b) Să se demonstreze că aplicațiile $f_a: G \to G$ unde $a \in G$, de forma $f(x) = axa^{-1}$ sînt automorfisme ale grupului G (aceste automorfisme se numesc automorfisme interioare ale grupului G). Să se arate că automorfismele interioare ale unui grup G formează un subgrup al grupului automorfismelor grupului G.

Soluție

a) 1) Fie f și g două automorfisme ale grupului G.

Funcția $h = f \circ g: G \to G$ se știe că este bijectivă.

Avem: $h(xy) = f(g(xy)) = f(g(x) \cdot g(y)) = f(g(x)) \cdot f(g(y)) = h(x) \cdot h(y)$.

2) Compunerea este asociativă.

3) Aplicația identică, e, a mulțimii G este evident un automorfism.

4) Dacă $f: G \to G$ este un automorfism, atunci aplicația $f^{-1}: G \to G$ este un automorfism. Într-adevăr, se știe că f^{-1} este bijectivă și dacă:

Scanned with OKEN Scanner

$f^{-1}(xy) = \alpha$, iar $\overset{-1}{f}(x) \cdot \overset{-1}{f}(y) = \beta$, atunci aplicînd f, obținem $xy = f(\alpha)$ și $\overset{-1}{f}(f(x) \cdot \overset{-1}{f}(y)) = f(f^{-1}(x)) \cdot f(f^{-1}(y)) = xy = f(\beta)$ și deci $\alpha = \beta$.

b) Funcția $f_a : G \to G$, pentru care $f_a(x) = axa^{-1}$ este bijectivă.

Într-adevăr, ecuația $axa^{-1} = b$, are soluția $x = a^{-1}ba$ și deci f_a este surjectivă. Dacă $f_a(x_1) = f_a(x_2)$, adică $ax_1a^{-1} = ax_2a^{-1}$, rezultă $x_1 = x_2$ și deci f_a este injectivă. În plus, $f_a(xy) = a \cdot xy \cdot a^{-1}$ și $f_a(x) \cdot f_a(y) = axa^{-1}\, aya^{-1} = axya^{-1}$ și deci $f_a(xy) = f_a(x) \cdot f_a(y)$, relație care dovedește că f este automorfism.

Să demonstrăm acum că automorfismele interioare formează grup.

1) $f_a(f_b(x)) = af_b(x)\, a^{-1} = abxb^{-1}a^{-1} = abx(ab)^{-1}$. Deci $f_a \circ f_b = f_{ab}$. Compunerea este peste tot definită.

2) Compunerea este asociativă.

3) Aplicația f_e este element neutru. Într-adevăr, $f_a \circ f_e = f_{a \cdot e} = f_a$ și $f_e \circ f_a = f_{ea} = f_a$.

4) Inversa lui f_a este f_a^{-1}. Într-adevăr, $f_a \circ f_a^{-1} = f_{aa^{-1}} = f_e$ și $f_{a^{-1}} \circ f_a = f_{a^{-1}a} = f_e$.

540. *a) Să se demonstreze că orice grup finit este izomorf cu un grup de permutări (teorema lui Cayley).*

b) Să se transpună rezultatul de la punctul a) în cazul grupului aditiv al claselor de resturi modulo 4, indicîndu-se efectiv grupul de permutări cu care acesta este izomorf.

Soluție

a) Fie G un grup finit, notat multiplicativ, de ordinul n. Putem nota elementele lui G cu $1, 2, 3, 4, \ldots, n$. Dacă $a \in G$, atunci notăm cu f aplicația $f_a : G \to G$ definită astfel : $f_a(k) = ak (k = 1, 2, \ldots, n)$. Aplicația $f_a : G \to G$ este o permutare a mulțimii $G = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Într-adevăr, din $f_a(k) = f_a(l)$ rezultă $ak = al$ și deci $k = l$. Funcția f este injectivă și cum G este finită, f este surjectivă, deci bijectivă.

Asociind fiecărui $a \in G$, aplicația f_a, definim o funcție $F : G \to G'$ $(F(a) = f_a)$, unde G' este mulțimea aplicațiilor $f_a : G \to G$.

Funcția F este bijectivă. Într-adevăr, dacă $F(a) = F(b)$, atunci $f_a = f_b$ și deci $ak = bk$, oricare ar fi k din G. Dacă k este elementul neutru, atunci obținem $a = b$. Funcția F fiind injectivă, este și surjectivă (G și G' sînt finite), deci este bijectivă.

Avem: $F(ab) = f_{ab}$. Dar $f_{ab}(x) = (ab)\,x = a(bx) = f_a(f_b(x))$ și deci $f_{ab} = f_a \circ f_b$. Așadar $F(ab) = f_a \circ f_b$.

b) Dacă $G = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$, notăm $\hat{0}$ cu 1, $\hat{1}$ cu 2, $\hat{2}$ cu 3 și $\hat{3}$ cu 4.

Avem: $f_1 : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $f_1(k) = 1 + k$*.

$f_1(1) = 1 + 1 = \hat{0} + \hat{0} = \hat{0} = 1$; $f_1(2) = 1 + 2 = \hat{0} + \hat{1} = \hat{1} = 2$.

Analog $f_1(3) = 3$, $f_1(4) = 4$.

$$\text{Așadar } f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$$

Avem:

$$f_2 : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\},\ f_2(k) = 2 + k;$$
$$f_2(1) = 2 + 1 = \hat{1} + \hat{0} = \hat{1} = 2,$$
$$f_2(2) = 2 + 2 = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2} = 3,$$
$$f_2(3) = 2 + 3 = \hat{1} + \hat{2} = \hat{3} = 4,$$
$$f_2(4) = 2 + 4 = \hat{1} + \hat{3} = \hat{0} = 1.$$

$$\text{Așadar } f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

În mod analog se deduce că:

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Așadar, pe mulțimea $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right\}$ compunerea definește o

* $+$, din scrierea $1 + k$, nu reprezintă adunarea uzuală, ci legea din grupul G, adică adunarea claselor de resturi notate cu simbolurile 1 și k.

Scanned with OKEN Scanner

structură de grup, izomorf cu grupul claselor de resturi modulo 4.

541. *a) Fie G și G' două grupuri, legile de compoziție fiind notate cu semnele $\top$ și $\perp$. Să se demonstreze că pe mulțimea $G \times G'$ legea de compoziție $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 \top y_1, x_2 \perp y_2)$ determină o structură de grup (acest grup se numește produsul grupurilor G și G').*

b) Fie $G = \{\hat{0}, \hat{1}\}$ grupul aditiv al claselor de resturi modulo 2 și $G' = \{-1, 1\}$ grupul multiplicativ al rădăcinilor complexe de ordinul doi ale unității. Să se întocmească tabelul legii de compoziție a grupului $G \times G'$ (Se va pune $e = (\hat{0}, 1)$, $a = (\hat{0}, -1)$, $b = (\hat{1}, -1)$, $c = (\hat{1}, 1)$).

Soluție

a) 1) Legea $*$ este evident peste tot definită.

2) Fie $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ și $z = (z_1, z_2)$.

Avem : $(x * y) * z = [(x_1, x_2) * (y_1, y_2)] * (z_1, z_2) = (x_1 \top y_1, x_2 \perp y_2) * (z_1, z_2) = [(x_1 \top y_1) \top z_1, (x_2 \perp y_2) \perp z_2]$ și $x * (y * z) = (x_1, x_2) * [(y_1, y_2) * (z_1, z_2)] = (x_1, x_2) * (y_1 \top z_1, y_2 \perp z_2) = [x_1 \top (y_1 \top z_1), x_2 \perp (y_2 \perp z_2)]$.

Deoarece legile $\top$ și $\perp$ sînt asociative, fiind legi de grup rezultă că $(x * y) * z = x * (y * z)$.

3) Fie e_1 elementul neutru pentru legea $\top$ și e_2 elementul neutru pentru legea $\perp$. Elementul $e = (e_1, e_2)$ este element neutru pentru legea $*$. Într-adevăr,

$$x * e = (x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1 \top e_1, x_2 \perp e_2) = (x_1, x_2) = x \text{ și}$$
$$e * x = (e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (e_1 \top x_1, e_2 \perp x_2) = (x_1, x_2) = x.$$

4) Fie x_1' simetricul lui x_1 pentru legea $\top$, iar x_2' simetricul lui x_2 pentru legea $\perp$. Elementul $x' = (x_1', x_2')$ este simetricul elementului $x = (x_1, x_2)$. Într-adevăr, avem :

$$x * x' = (x_1, x_2) * (x_1', x_2') = x_1 \top x_1', x_2 \perp x_2') = (e_1, e_2) = e \text{ și}$$
$$x' * x = (x_1', x_2') * (x_1, x_2) = (x_1' \top x_1, x_2' \perp x_2) = (e_1, e_2) = e.$$

Observație. Dacă grupurile G și G' sînt comutative, atunci grupul $G \times G'$ este comutativ.

Scanned with OKEN Scanner

b) Avem $e * e = e$, $e * a = a * e = a$, $e * b = b * e = b$, $e * c = c * e = c$, deoarece $e = (\hat{0}, 1)$ este elementul neutru.

Avem :

$$a * b = (\hat{0}, -1) * (\hat{1}, -1) = (\hat{0} + \hat{1}, (-1) : (-1)) = (\hat{1}, 1) = c = b * a;$$

$$a * c = (\hat{0}, -1) * (\hat{1}, 1) = (\hat{0} + \hat{1}, (-1) \cdot 1) = (\hat{1}, -1) = b = c * a;$$

$$b * c = (\hat{1} - 1) * (\hat{1}, 1) = (\hat{1} + \hat{1}, (-1) \cdot 1) = (\hat{0}, -1) = a = c * b;$$

$$a * a = (\hat{0}, -1) * (\hat{0}, -1) = (\hat{0} + \hat{0}, (-1) \cdot (-1)) = (\hat{0}, 1) = e;$$

$$b * b = (\hat{1}, -1) * (\hat{1}, -1) = (\hat{1} + \hat{1}, (-1) \cdot (-1)) = (\hat{0}, 1) = e;$$

$$c * c = (\hat{1}, 1) * (\hat{1}, 1) = (\hat{1} + \hat{1}, 1 \cdot 1) = (0, \hat{1}) = e.$$

Tabelul legii de compoziție este următorul :

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

542. *Să se demonstreze că în mulțimea Z a numerelor întregi, următoarele legi de compoziție*

$$x \oplus y = x + y + 2,$$
$$x \odot y = xy + 2x + 2y + 2,$$

determină o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

Soluție

Adunarea $\oplus$ este asociativă, căci $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x + y + z + 4$.

Adunarea $\oplus$ este evident comutativă.

Din $x + \bar{0} = x$, deducem $x + \bar{0} + 2 = x$, de unde $\bar{0} = -2$ (elementul neutru la adunare).

Avem $x + x' = \bar{0} \Leftrightarrow x + x' + 2 = -2 \Leftrightarrow x' = -4 - x$.

Deci fiecare x admite un opus.

Înmulțirea este asociativă. Într-adevăr, $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z) = xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4x + 4y + 4z + 6$.

Înmulțirea $\odot$ este evident comutativă.

Înmulțirea este distributivă față de adunare, căci $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) = xy + xz + 4x + 2y + 2z + 6$.

Avem:

$$x \odot \bar{1} = x \Leftrightarrow x\bar{1} + 2x + 2\bar{1} + 2 = x \Leftrightarrow \bar{1}(x + 2) = -x - 2 \Leftrightarrow \bar{1} = -1,$$

dacă

$$x \neq -2 \text{ și } (-2) \odot \bar{1} = (-2) \odot (-1) = 2 - 4 - 2 + 2 = -2.$$

Deci $x \odot (-1) = x$, oricare ar fi $x \in Z$.

Avem: $x \odot y = \bar{0} \Rightarrow xy + 2x + 2y + 2 = -2 \Rightarrow xy + 2x + 2y + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)(y + 2) = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$ sau $y + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ sau $y = -2 \Rightarrow x = \bar{0}$ sau $y = 0$.

543. *a) Pe mulțimea I a numerelor întregi impare adunarea și înmulțirea uzuală determină o structură de inel ?*

b) Pe mulțimea I a numerelor întregi impare legile $x \oplus y = x + y - 1$, $x \odot y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$ determină o structură de inel ? În cazul răspunsului afirmativ să se cerceteze dacă există element unitate și divizori ai lui 0.

Soluție.

a) Răspunsul este negativ căci adunarea nu este peste tot definită (de exemplu $3 \in I$, $5 \in I$ și $3 + 5 = 8 \in I$).

b) Fie $x \in I$ și $y \in I$. Aceasta înseamnă că x și y sînt de forma $x = 2k + 1$, $y = 2k' + 1$, unde $k \in Z$, $k' \in Z$.

Avem: $x \oplus y = x + y - 1 = 2k + 1 + 2k' + 1 - 1 = 2(k + k') + 1 = 2k'' + 1$, unde $k'' = k + k'$ și deci $k'' \in Z$. Rezultă $x \oplus y \in I$.

$$x \odot y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3) = \frac{1}{2}[(2k+1)(2k'+1) - 2k - 1 - 2k' - 1 + 3] = \frac{1}{2}(4kk' + 2) = 2kk' + 1 = 2k'' + 1,$$

unde $k'' = k \cdot k'$ și deci $k'' \in Z$.

Rezultă $x \odot y \in I$.

Legile $\oplus$ și $\odot$ sînt peste tot definite în I.

Se verifică fără dificultate că legea $\oplus$ este asociativă și comutativă.

Avem: $x \oplus \bar{0} = x \Leftrightarrow x + 0 - 1 = x \Leftrightarrow \bar{0} = 1$.

Elementul neutru față de adunare este $\bar{0} = 1$.

Avem: $x \oplus x' = \bar{0} \Leftrightarrow x + x' - 1 = 1 \Leftrightarrow x' = 2 - x$.

Dacă $x \in I$, adică $x = 2k + 1$, unde $k \in Z$, atunci $x' = 2 - 2k - 1 = 2(-k) + 1$. Orice element x din I admite un simetric față de legea $\oplus$.

Se verifică fără dificultate că legea $\odot$ este asociativă, comutativă și distributivă față de legea $\oplus$.

Deci, legile $\oplus$, $\odot$ determină pe I o structură de inel comutativ.

Avem: $x \odot \bar{1} = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x\bar{1} - x - \bar{1} + 3) = x \Leftrightarrow x\bar{1} - x - \bar{1} + 3 = 2x \Leftrightarrow \bar{1}(x - 1) = 3(x - 1)$.

Dacă punem $\bar{1} = 3$ atunci $x \odot \bar{1} = x$, oricare ar fi $x \neq 1$.

Se verifică și relația $1 \odot \bar{1} = 1$. Deci $x \odot \bar{1} = x$, oricare ar fi $x \in I$. Așadar inelul I este cu element unitate $\bar{1} = 3$.

Avem:

$$x \odot y = \bar{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(xy - x - y + 3) = 1 \Leftrightarrow xy - x - y + 3 = 2 \Leftrightarrow xy - x - y + 1 = 0.$$

$x - 1 = 0$ sau $y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $y = 1 \Leftrightarrow x = 0$ sau $y = 0$.

Inelul I nu are divizori ai lui 0.

Scanned with OKEN Scanner

544. *Fie A un inel ale cărui legi de compoziție se notează cu „+“ și „ $\cdot$ “.*

a) Să se demonstreze că pe A următoarele două legi de compoziție $x \oplus y = x + y - \alpha$, $x \odot y = xy - x\alpha - \alpha y + \alpha^2 + \alpha$ determină o structură de incl.

b) Să se arate că dacă inelul $(A, +, \cdot)$ are element unitate atunci și inelul $(A, \oplus, \odot)$ are element unitate.

c) Să se arate că dacă inelul $(A, +, \cdot)$ nu are divizori ai lui 0, atunci și inelul $(A, \oplus, \odot)$ nu are divizori ai lui 0.

Soluție

a) Avem:

$(x \oplus y) \oplus z = (x + y - \alpha) \oplus z = x + y + z - 2\alpha$ și
$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y + z - \alpha) = x + y + z - 2\alpha$.

Legea $\oplus$ este asociativă.

Legea $\oplus$ este evident comutativă.

Avem: $x \oplus \bar{0} = x \Leftrightarrow x + \bar{0} - \alpha = x \Leftrightarrow \bar{0} = \alpha$. Există element neutru pentru legea $\oplus$.

Avem: $x \oplus x' = \bar{0} \Leftrightarrow x + x' - \alpha = \alpha \Leftrightarrow x' = 2\alpha - x$. Orice x admite un opus $x' = 2\alpha - x$.

Avem: $(x \odot y) \odot z = (xy - x\alpha - \alpha y + \alpha^2 + \alpha) \odot z = xyz - x\alpha z - \alpha yz + \alpha^2 z + \alpha z - xy\alpha + x\alpha^2 + \alpha y \alpha - \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha z + \alpha^2 + \alpha = xyz - xy\alpha - x\alpha z - \alpha yz + x\alpha^2 + \alpha y \alpha + \alpha^2 z - \alpha^3 + \alpha$ și $x \odot (y \odot z) = x \odot (yz - y\alpha - \alpha z + \alpha^2 + \alpha) = xyz - xy\alpha - x\alpha z + x\alpha^2 + x\alpha - x\alpha - \alpha yz + \alpha y \alpha + \alpha^2 z - \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha = xyz - xy\alpha - x\alpha z - \alpha yz + x\alpha^2 + \alpha y \alpha + \alpha^2 z - \alpha^3 + \alpha$.

Legea $\odot$ este asociativă.

Avem: $x \odot (y \oplus z) = x \odot (y + z - \alpha) = xy + xz - x\alpha - x\alpha - \alpha y - \alpha z + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha = xy + xz - 2x\alpha - \alpha y - \alpha z + 2\alpha^2 + \alpha$.

$(x \odot y) \oplus (x \odot z) = (xy - x\alpha - \alpha y + \alpha^2 + \alpha) \oplus (xz - x\alpha - z\alpha - \alpha^2 + \alpha) = xy + xz - 2x\alpha - \alpha y - \alpha z + 2\alpha^2 + \alpha$. Deci $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$.

Scanned with OKEN Scanner

în mod analog se verifică egalitatea $(y \oplus z) \odot x = (y \odot x) \oplus (z \odot x)$. Legea $\odot$ este distributivă față de legea $\oplus$. Așadar legile $\oplus$, $\odot$ determină pe A o structură de inel.

b) Să presupunem că față de legea „$\cdot$" în A există element unitate, pe care îl notăm cu 1. Aceasta înseamnă că $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, oricare ar fi $x \in A$. Avem: $x \odot \bar{1} = x \Leftrightarrow x \cdot \bar{1} - x\alpha - \alpha\bar{1} + \alpha^2 + \alpha = x \Leftrightarrow (x - \alpha)\bar{1} - x\alpha + \alpha^2 + \alpha - x = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)\bar{1} - (x - \alpha)\alpha - (x - \alpha) = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)(\bar{1} - \alpha) - (x - \alpha)1 = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)(\bar{1} - \alpha - 1) = 0$.

Deoarece nu se precizează dacă inelul are sau nu divizori ai lui 0, nu putem trage nici o concluzie din $(x - \alpha)(\bar{1} - \alpha - 1) = 0$. Ni se sugerează totuși alegerea: $\bar{1} = \alpha + 1$ (din $\bar{1} - \alpha - 1 = 0$).

Avem: $x \odot 1 = x \odot (\alpha + 1) = x\alpha + x - x\alpha - \alpha^2 - \alpha + \alpha^2 + \alpha = x$.

Deci $x \odot \bar{1} = x$, oricare ar fi $x \in A$.

$\bar{1} \odot x = (\alpha + 1) \odot x = \alpha x + x - \alpha^2 - \alpha - \alpha x + \alpha^2 + \alpha = x$.

Așadar, dacă $\bar{1} = \alpha + 1$, atunci $x \odot 1 = \bar{1} \odot x = x$, oricare ar fi $x \in A$.

c) Avem:

$x \odot y = \bar{0} \Leftrightarrow xy - x\alpha - \alpha y + \alpha^2 + \alpha = \alpha \Rightarrow xy - x\alpha - \alpha y + \alpha^2 = 0 \Rightarrow (x - \alpha)(y - \alpha) = 0 \Rightarrow x - \alpha = 0$ sau $y - \alpha = 0 \Rightarrow x = \alpha$ sau $y = \alpha \Rightarrow x = \bar{0}$ sau $y = \bar{0}$.

545. Fie A un inel. Pe mulțimea $Z \times A$ definim două legi de compoziție în modul următor:

$$(m, x) + (n, y) = (m + n, x + y),$$
$$(m, x)(n, y) = (mn, my + nx + xy).$$

Să se arate că aceste legi de compoziție definesc pe $Z \times A$ o structură de inel comutativ cu element unitate.

Soluție

a) Legile $+$ și $\cdot$ sînt evident peste tot definite.

b) Avem:

$[(m, x) + (n, y)] + (p, z) = (m + n, x + y) + (p, z) = [(m + n) + p, (x + y) + z], (m, x) + [(n, y + (p, z)] = (m, x) + (n + p, y + z) = [m + (n + p), x + (y + z)]$.

Adunarea în Z, respectiv A, fiind asociativă, rezultă asociativitatea adunării în $Z \times A$.

c) Legea + este evident comutativă.

d) Elementul neutru pentru adunare este $(0, 0)$.

e) Opusul elementului (m, x) este elementul $(-m, -x)$.

f) Înmulțirea este asociativă căci:

$[(m, x)(n, y)](p, z) = (mn, my + nx + xy)(p, z) = (mnp, mnz + mpy + npx + pxy + myz + nxz + xyz)$ și $(m, x)[(n, y) \cdot (p, z)] = (m, x)(np, nz + py + yz) = (mnp, mnz + mpy + myz + npx + nxz + pxy + xyz)$.

g) Înmulțirea este evident comutativă.

h) Înmulțirea este distributivă față de adunare căci $(m, x) \cdot [(n, y) + (p, z)] = (m, x) \cdot (n + p, y + z) = (mn + mp, my + mz + nx + px + xy + xz)$ și $(m, x) \cdot (n, y) + (m, x) \cdot (p, z) = (mn, my + nx + xy) + (mp, mz + px + xz) = (mn + mp, my + nx + xy + mz + px + xz)$.

i) Elementul neutru pentru înmulțire este $(1, 0)$. Într-adevăr, $(m, x) \cdot (1, 0) = (m, x)$.

546. *a) Să se arate că formula binomului la pătrat este adevărată în orice inel comutativ. Să se precizeze care dintre proprietățile inelului intervin în demonstrație.*

b) Să se demonstreze că formula binomului la cub este adevărată în orice inel comutativ și să se precizeze care dintre proprietățile inelului intervin în demonstrație.

c) Cum se calculează $(A + B)^2$ și $(A + B)^3$ în inelul matricelor pătrate de ordinul n?

Soluție.

Avem: a) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (unde $2ab = ab + ab$).

Au intervenit: asociativitatea adunării, comutativitatea înmulțirii, distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Scanned with OKEN Scanner

b) $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, unde $3a^2b = a^2b+a^2b+a^2b$ și $3ab^2 = ab^2+ab^2+ab^2$.

Au intervenit: asociativitatea adunării și înmulțirii, comutativitatea adunării și înmulțirii și distributivitatea înmulțirii față de adunare.

c) $(A+B)^2 = A^2+AB+BA+B^2$;

$(A+B)^3 = (A^2+AB+BA+B^2)(A+B) = A^3+A^2B+ABA+AB^2+BA^2+BAB+B^2A+B^3$.

547. *Să se demonstreze că într-un inel comutativ egalitatea* $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1})$ *este o identitate* $(n \geqslant 2)$.

Soluție.

Avem: $(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1}) = x^n+x^{n-1}a+x^{n-2}a^2+\ldots+xa^{n-1}-x^{n-1}a-x^{n-2}a^2-\ldots-xa^{n-1}-a^n = x^n-a^n$.

548. *Să se demonstreze că dacă un polinom* $P(x)$ *are coeficienți într-un inel* A *comutativ cu element unitate, atunci* $P(x)$ *se divide la* $x-a$, *dacă și numai dacă* $P(a)=0$.

Soluție.

Dacă $P(x)$ se divide la $x-a$, atunci există un polinom $Q(x)$ cu coeficienți în A, astfel încît $P(x) = (x-a)\cdot Q(x)$ și deci $P(a)=0$.

Fie $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_n$.

Dacă $P(a)=0$, atunci $a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1a + a_0 = 0$.

Se știe că $x^k - a^k = (x-a)(x^{k-1}+x^{k-2}a+\ldots+a^{k-1})$.

Notînd polinomul $x^{k-1}+x^{k-2}a+\ldots+a^{k-1}$ cu $P_k(x)$, obținem: $x^k - a^k = (x-a)P_k(x)$ $(P_1(x)=1)$.

$$P(x) = P(x) - P(a) = a_n(x^n-a^n) + a_{n-1}(x^{n-1}-a^{n-1}) + \ldots + a_1\cdot(x-a) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x^k-a^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x-a)P_k(x) = (x-a)\sum_{k=1}^{n} a_kP_k(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Egalitatea $P(x) = (x - a) \sum_{k=1}^{n} a_k P_k(x)$ dovedește că $P(x)$ se divide la $x - a$.

549. *Cîte elemente are inelul M al matricelor pătrate de ordinul doi avînd elementele în inelul claselor de resturi modulo 2 ? Este acest inel comutativ ?*

Soluție

Numărul elementelor inelului M este egal cu numărul aplicațiilor mulțimii $\{\hat{0}, \hat{1}\}$ în mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ adică $2^4 = 16$.

Avem : $\begin{Vmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{Vmatrix}$ și $\begin{Vmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} \end{Vmatrix}$.

Inelul M este necomutativ.
Inelul M este un exemplu de inel finit necomutativ.

550. *Care sînt elementele inversabile ale inelului claselor de resturi modulo 8 ? Are divizori ai lui 0 acest inel?*

Soluție.

Elementele inversabile sînt $\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{7}$ și avem $\hat{1}^{-1} = \hat{1}, \hat{3}^{-1} = \hat{3}, \hat{5}^{-1} = \hat{5}, \hat{7}^{-1} = \hat{7}$.

Egalitatea $\hat{2} \cdot \hat{4} = \hat{0}$, dovedește că inelul este cu divizori ai lui 0.

551. *Să se demonstreze că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea M a matricelor $\|a_{ij}\|$, pătrate de ordinul n, unde $a_{ij} \in R$ și $a_{ij} = 0$ dacă $i \neq j$, o structură de inel comutativ. Are divizori ai lui 0 acest inel ?*

Soluție.

Fie $\|a_{ij}\|$ și $\|b_{ij}\|$ două matrice din M. În cazul $i \neq j$, $a_{ij} + b_{ij} = 0$ și deci $\|a_{ij}\| + \|b_{ij}\|$ este în M. Dacă $\|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\| = \|c_{ij}\|$, atunci $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$.
Dintre elementele $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ toate sînt 0, eventual cu excepția lui a_{ii}, iar dintre elementele $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$ toate sînt 0, eventual cu excepția lui b_{jj}.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, dacă $i \neq j$, atunci $c_{ij} = a_{ii}b_{ij} + a_{ij}b_{jj} = 0$. Dacă $i = j$, atunci $c_{ij} = c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$. Putem deci scrie $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$.

Deci $\|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\| = \|a_{ij} \cdot b_{ij}\|$ și avem evident $\|a_{ij}b_{ij}\| \in M$.

Adunarea și înmulțirea determină pe M o structură de inel. Deoarece $a_{ij}b_{ij} = b_{ij}a_{ij}$, inelul M este comutativ.

Dacă $\|a_{ij}\| \cdot \|b_{ij}\| = \|0\|$, atunci $a_{ij}b_{ij} = 0$ și deci $a_{ii} = 0$ sau $b_{ii} = 0$. Inelul M nu are divizori ai lui 0.

552. *Fie A un inel. Mulțimea elementelor a cu proprietatea $ax = xa$, oricare ar fi $x \in A$, este un subinel al lui A.*

Soluție

Fie $M = \{a \in A \mid ax = xa$, orice $x \in A\}$.

a) Adunarea, indusă pe M, este peste tot definită. Într-adevăr, dacă $a \in M$ și $b \in M$, atunci $(a + b)x = ax + bx = xa + xb = x(a + b)$ și deci $a + b \in M$.

b) Adunarea în M este evident asociativă și comutativă.

c) $0 \in M$ căci $0x = x0 = 0$.

d) Înmulțirea este peste tot definită căci dacă $a \in M$, $b \in M$, atunci $(ab)x = a(bx) = (bx)a = b(xa) = b(ax) = (ba)x$ și deci $ab \in M$.

e) Înmulțirea este evident asociativă și distributivă față de adunare.

553. *Fie A un inel cu element unitate.*

Să se arate că relația $\mathcal{R}(x, y)$: „există în A un element inversabil ε, astfel încît $x = \varepsilon y$" este o relație de echivalență (această relație de echivalență se numește relație de asociere).

Soluție

Propoziția $\mathcal{R}(x, x)$ este adevărată căci $x = 1 \cdot x$. Relația $\mathcal{R}(x, y)$ este deci reflexivă.

Să presupunem că $\mathcal{R}(x, y)$ este adevărată. Din $x = \varepsilon y$ rezultă $y = \varepsilon^{-1}x$.

Deci $\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow \mathcal{R}(y, x)$. Relația $\mathcal{R}(x, y)$ este simetrică.

Fie $\mathcal{R}(x, y)$ și $\mathcal{R}(y, z)$ adevărate. În acest caz există două elemente inversabile ε_1 și ε_2 astfel încît $x = \varepsilon_1 y$ și $y = \varepsilon_2 z$. Deducem $x = \varepsilon_1\varepsilon_2 z$. Elementul $\varepsilon_1\varepsilon_2$ este inversabil (avem $(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)^{-1} = \varepsilon_2^{-1} \cdot \varepsilon_1^{-1}$).

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\mathcal{R}(x, y)$ și $\mathcal{R}(y, z) \Rightarrow \mathcal{R}(x, z)$. Relația $\mathcal{R}(x, y)$ este tranzitivă.

554. *Elementele inversabile ale unui inel A comutativ cu element unitate formează grup abelian, G, multiplicativ.*

Soluție

Fie x și y două elemente inversabile din A.

Există x' și y', astfel încît $xx' = 1$ și $yy' = 1$.

Avem : $(xy) \cdot (x'y') = (xx')(yy') = 1$. Deci $xy \in G$; înmulțirea este peste tot definită în G. Ea este evident asociativă și comutativă, $1 \in G$.

Dacă $x \in G$, atunci și inversul său x' este un element din G.

555. *Fie A un inel cu element unitate. Să se arate că dacă pentru un element a există un element a' și numai unul, astfel încît $aa' = 1$, atunci a este inversabil și a' este inversul lui a.*

Soluție

$$ax = 0 \Rightarrow ax + aa' = 0 + 1 = 1 \Rightarrow a(x + a') = 1 \Rightarrow x + a' = a' \Rightarrow x = 0.$$

Așadar, $ax = 0 \Rightarrow x = 0$.

Avem : $a(a'a - 1) = aa'a - a = a - a = 0$. Deci $a'a - 1 = 0$, de unde $a'a = 1$.

556. *Fie A un inel comutativ cu element unitate și a și b două elemente idempotente ($a^2 = a$ și $b^2 = b$).*

a) Să se demonstreze că elementele ab, $1-a$, $1-b$ sînt de asemenea idempotente.

b) Să se demonstreze că avem: $ab(1 - a) = ab(1 - b) = 0$.

Soluție

a) Avem : $(ab)^2 = a^2b^2 = ab$;

$(1 - a)^2 = 1 - 2a + a^2 = 1 - 2a + a = 1 - a$;

$(1 - b)^2 = 1 - 2b + b^2 = 1 - 2b + b = 1 - b$.

b) Avem : $ab(1 - a) = ab - a^2b = ab - ab = 0$;

$ab(1 - b) = ab - ab^2 = ab - ab = 0$.

557. *a) Să se demonstreze că în mulțimea matricelor pătrate de ordinul n, următoarele propoziții sînt echivalente.*

Scanned with OKEN Scanner

1) A este o matrice nesingulară;
2) A nu este divizor al lui 0.

b) În mulțimea matricelor pătrate de ordinul 2, să se rezolve ecuația:

$$\begin{Vmatrix} 1 & m \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

Soluție

a) Fie A nesingulară și $AX = 0$, respectiv $XA = 0$. Atunci înmulțind la stînga, respectiv la dreapta, cu A^{-1}, obținem $X = 0$.

Deci A nu este divizor al lui 0.

Dacă A este singulară atunci $\det(A) = 0$. Fie $A = \| a_{ij} \|$ și $X = \| x_{ij} \|$.

Matricea AX va fi formată din elemente c_{ij} de forma

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj}.$$

Ecuația $AX = 0$ are o soluție nenulă, atunci cînd există $x_{kj} \neq 0$ astfel încît $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Scriind că elementele situate pe coloana 1 a matricei $AX = 0$, sînt 0, obținem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1} &= 0, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + \ldots + a_{2n}x_{n1} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\

b) Determinantul asociat matricei $\begin{Vmatrix} 1 & m \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$ este $-2m$.

Cazul 1. Dacă $m \neq 0$ atunci matricea $\begin{Vmatrix} 1 & m \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$ nu este singulară și admite o inversă.

Avem: $\begin{Vmatrix} 1 & m \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2m}\begin{Vmatrix} 0 & -m \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$.

În acest caz ecuația admite o singură soluție

$X = -\frac{1}{2m}\begin{Vmatrix} 0 & -m \\ -2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$, adică $X = -\frac{1}{2m}\begin{Vmatrix} -m & -3m \\ -3 & 1 \end{Vmatrix}$.

Cazul 2. Dacă $m = 0$, atunci matricea $\begin{Vmatrix} 1 & m \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$ devine $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$ și este singulară, deci este divizor al lui 0.

Fie $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$ și $B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. Există $C \neq \|0\|$ astfel încît $CA = \|0\|$. Așadar $AX = B \Leftrightarrow CAX = CB \Leftrightarrow 0 = CB$. Ultima egalitate nu poate avea loc căci B nu este singulară. În acest caz ecuația nu are soluții.

558. *Fie A un inel fără divizori ai lui 0, avînd element unitate, în care este dată o lege de compoziție $\top$, peste tot definită, avînd proprietățile: $(x + y) \top z = (x \top z) + (y \top z)$ și $x \top (y \cdot z) = (x \top y) \cdot (x \top z)$, oricare ar fi x, y, z din A.*

a) Dacă există $a \in A$, astfel încît $a + a \neq 0$, atunci $x \top y = 0$, oricare ar fi x și y din A.

b) Dacă $a + a = 0$, oricare ar fi $a \in A$ și dacă există x și y astfel încît $x \top y \neq 0$, mulțimea G a elementelor $u \in A$, pentru care $u \top 1 = 0$ este un subgrup aditiv al lui A.

Soluție.

a) Deoarece $a + a \neq 0$, rezultă $a \neq 0$. Din $a + a \neq 0$ deducem $a(1 + 1) \neq 0$ și deci $1 + 1 \neq 0$.

Avem: $x \top (1 \cdot 1) = (x \top 1)(x \top 1)$ și deci $x \top 1 = (x \top 1) \cdot (x \top 1)$.

Rezultă $(x \top 1)[(x \top 1) - 1] = 0$ și deci $x \top 1 = 0$ sau $x \top 1 = 1$.

Dacă $x \top 1 = 1$, atunci din $(x + x) \top 1 = (x \top 1) + (x \top 1)$, rezultă $2x \top 1 = 2$, iar din $2x \top (1 \cdot 1) = (2x \top 1)(2x \top 1)$ rezultă $2 = 2 \cdot 2$ ceea ce este absurd. Aceasta înseamnă că $x \top 1 = 0$ oricare ar fi x.

Din $x \top (y \cdot 1) = (x \top y)(x \top 1)$, rezultă $x \top y = (x \top y) \cdot (x \top 1)$ și deci $(x \top y)[(x \top 1) - 1] = 0$. Așadar, $(x \top y)(0 - 1) = 0$, de unde $-(x \top y) = 0$ și deci $x \top y = 0$.

b) Fie $u \top 1 = 0$ și $v \top 1 = 0$. Avem $(u \top 1) + (v \top 1) = (u + v) \top 1$. Deci $(u + v) \top 1 = 0$. Adunarea este peste tot definită în G.

Avem $(0 + 0) \top 1 = (0 \top 1) + (0 \top 1)$ și deci $0 \top 1 = (0 \top 1) + (0 \top 1)$.

Rezultă $0 \top 1 = 0$, ceea ce înseamnă că $0 \in G$.

Dacă $u \top 1 = 0$, atunci din $(u\text{-}u) \top 1 = (u \top 1) + (-u) \top 1$ rezultă $0 \top 1 = (u \top 1) + ((-u) \top 1)$ și deci $(-u) \top 1 = 0$, ceea ce înseamnă că $-u \in G$.

559. *Fie G un grup abelian notat aditiv. În mulțimea E a endomorfismelor grupului G, legile $f + g$ și $f \circ g$ ($f + g: x \to f(x) + g(x)$ și $f \circ g: x \to f(g(x))$ determină o structură de inel (inelul endomorfismelor grupului G).*

Soluție

Dacă $f: G \to G$ și $g: G \to G$ sînt endomorfisme, notăm $h = f + g$. Avem: $h(x) = f(x) + g(x)$. Deci $h(x + y) = f(x + y) + g(x + y)$. Ținînd seama că f și g sînt endomorfisme, deducem $h(x + y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y)$, de unde ținînd seama de comutativitatea legii grupului G, obținem $h(x + y) = f(x) + g(x) + f(y) + g(y)$ și deci $h(x + y) = h(x) + h(y)$. Deci $f + g$ este un endomorfism al grupului G.

Fie $t = f \circ g$, deci $t(x) = f(g(x))$. Avem $t(x + y) = f(g(x + y)) = f(g(x) + g(y)) = f(g(x)) + f(g(y)) = t(x) + t(y)$. Deci $f \circ g$ este un endomorfism al grupului G.

Legea $f + g$ este evident asociativă și comutativă. Ea admite element neutru, aplicația identică $0: G \to G$ pentru care $0(x) = 0$ care este un endomorfism al lui G.

Dacă f este un endomorfism, atunci aplicația $-f: x \to -f(x)$ este un endomorfism și avem $f + (-f) = 0$. Într-adevăr, $-f(x + y) = -f(x) - f(y)$ și $f(x) + (-f(x)) = 0$ de unde $f + (-f) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Legea „$\circ$" este asociativă. Dacă f, g, h sînt endomorfisme ale lui G, avem $f \circ (g + h) : x \to f((g + h)(x)) = f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x))$.

Deci $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

Avem : $(g + h) \circ f : x \to (g + h)(f(x)) = g(f(x)) + h(f(x))$. Deci $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

Acest inel este, în general, necomutativ.

560. *Fie A un inel și legea $x \top y = xy + yx$. a) Să se arate că legea $\top$ este comutativă, distributivă față de adunare, dar neasociativă, în general. b) Dacă punem $[x, y, z] = (x \top y) \top z - x \top (y \top z)$ să se verifice identitățile :*

$$[x, y, z] + [z, y, x] = 0;$$
$$[x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0;$$
$$[x \top y, u, z] + [y \top z, u, x] + [z \top x, u, y] = 0.$$

Soluție

a) Avem : $x \top y = xy + yx = yx + xy = y \top x$, deci legea $\top$ este comutativă.

$x \top (y + z) = xy + xz + yz + zx = xy + yx + xz + zx = (x \top y) + (x \top z)$.

Legea $\top$ este distributivă față de adunare.

Legea $\top$ este în general neasociativă. De exemplu, în inelul matricelor pătrate de ordinul 3, avînd elementele din R, dacă luăm

$X = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}$, $Y = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$, $Z = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$ avem : $(X \top Y) \top Z = (XY + YX) \top Z = XYZ + YXZ + ZXY + ZYX$ (1) și $X \top (Y \top Z) = X \top (YZ + ZY) = XYZ + XZY + YZX + ZYX$ (2).

În dezvoltările (1) și (2) primii și ultimii termeni sînt respectiv egali. Vom verifica deci că $YXZ + ZXY \neq XZY + YZX$. Se obține $YXZ + ZXY = \begin{Vmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 20 \end{Vmatrix}$ și $XZY + YZX = \begin{Vmatrix} 10 & 15 \\ 29 & 15 \end{Vmatrix}$.

b) Avem : $[x, y, z] + [z, y, x] = (x \perp y) \top z - x \top (y \top z) + (z \top y) \top x - z \top (y \top x) = (x \top y) \top z - (x \top y) \top z + (z \top y) \top x - (z \top y) \top x = 0$.

Celelalte două identități se verifică în mod analog.

Scanned with OKEN Scanner

561. *Fie A un inel.*

a) Să se demonstreze că legea $x \circ y = xy - yx$ este distributivă față de adunare.

b) Să se demonstreze că avem: $xy = yx \Leftrightarrow x \circ y = 0$.

c) Să se verifice identitatea: $x \circ y = -\, y \circ x$.

d) Să se verifice identitatea $x \circ (y \circ z) + y \circ (z \circ x) + z \circ (x \circ y) = 0$ (identitatea lui Jacobi).

Soluție.

a) Avem: $x \circ (y + z) = x(y + z) - (y + z)\, x = xy + xz - yx - zx$,

$(x \circ y) + (x \circ z) = xy - yx + xz - zx = xy + xz - yx - zx$.

Deci $x \circ (y + z) = (x \circ y) + (x \circ z)$. În mod analog se verifică egalitatea $(y + z) \circ x = y \circ x + z \circ x$;

b) $xy = yx \Leftrightarrow xy - yx = 0 \Leftrightarrow x \circ y = 0$;

c) Avem: $x \circ y = xy - yx = -\,(yx - xy) = -\, y \circ x$;

d) $x \circ (y \circ z) + y \circ (z \circ x) + z \circ (x \circ y) = xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy + zxy - zyx - xyz + yxz = 0$.

562. *a) Să se arate că pe mulțimea numerelor întregi legile $x \oplus y = x + y + 1$, $x \odot y = xy + x + y$ determină o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0.*

b) Să se arate că pe mulțimea numerelor întregi legile $x \boxplus y = x + y - 1$, $x \boxdot y = xy - x - y + 2$ determină o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

c) Să se arate că între inelul de la punctul a) și inelul de la punctul b) există un izomorfism $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ de forma $f(x) = x + 2$.

Soluție.

Punctele a) și b) se rezolvă fără dificultate (după modelul exercițiilor precedente).

c) Aplicația $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ de forma $f(x) = x + 2$ este evident bijectivă.

Avem: $f(x \oplus y) = (x \oplus y) + 2 = x + y + 3$;

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x) \boxplus f(y) = f(x) + f(y) - 1 = x + 2 + y + 2 - 1 = x + y + 3.$$

Deci $f(x \oplus y) = f(x) \boxplus f(y)$.

Avem: $f(x \odot y) = x \odot y + 2 = xy + x + y + 2$,

$$f(x) \boxdot f(y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + 2 = (x + 2)(y + 2) - (x + 2) - (y + 2) + 2 = xy + x + y + 2.$$

Deci $f(x \odot y) = f(x) \boxdot f(y)$.

563. *a) Să se verifice că pe mulțimea A a numerelor complexe de forma $x + yi$ unde $x \in Z$, $y \in Z$ (inelul întregilor lui Gauss) adunarea și înmulțirea determină o structură de inel cu element unitate.*

b) Să se verifice că pe mulțimea M a matricelor de forma $\begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}$ *unde $x \in Z$, $y \in Z$ adunarea și înmulțirea determină o structură de inel.*

c) Să se arate că inelul de la punctul a) este izomorf cu inelul de la punctul b).

d) Să se arate că singurele elemente inversabile ale inelului A sînt $1, -1, i, -i$.

Soluție

a) Fie $z = x + yi$ și $z' = x' + y'i$ două elemente din A. Avem: $z + z' = (x + x') + (y + y')i$ și $zz' = xx' - yy' + (xy' + x'y)i$

Egalitățile scrise dovedesc că $z + z'$ și zz' fac parte din A.

Adunarea și înmulțirea determină, în mod evident, pe A, o structură de inel cu element unitate $(1 = 1 + 0i)$.

b) Fie $A = \begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}$ și $B = \begin{Vmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{Vmatrix}$ două matrice din M.

Avem: $A + B = \begin{Vmatrix} x + x' & y + y' \\ -(y + y') & x + x' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{Vmatrix}$ unde $X = x + x'$ și $Y = y + y'$.

$A \cdot B = \begin{Vmatrix} xx' - yy' & xy' + x'y \\ -(x'y + xy') & xx' - yy' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} X_1 & Y_1 \\ -Y_1 & X_1 \end{Vmatrix}$ unde $X_1 = xx' - yy'$ și $Y_1 = xy' + x'y$.

Evident $A + B$ și $A \cdot B$ sînt matrice din M.

Adunarea și înmulțirea determină pe M o structură de inel cu element unitate $\left(\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\right)$.

c) Fie aplicația $f : A \to M$ de forma $f(x + yi) = \begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix}$

Această aplicație este evident bijectivă.

Avem : $f((x + yi) + (x' + y'i)) = f(x + x' + (y + y')i) =$

$$= \begin{Vmatrix} x + x' & y + y' \\ -(y + y') & x + x' \end{Vmatrix}; f(x + yi) + f(x' + y'i) = \begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x + x' & y + y' \\ -(y + y') & x + x' \end{Vmatrix}.$$

Deci $f((x + yi) + (x' + y'i)) = f(x + yi) + f(x' + y'i)$.

Avem $f((x + yi)(x' + y'i)) = f((xx' - yy') + (xy' +$

$$+ x'y)i) = \begin{Vmatrix} xx' - yy' & xy' + x'y \\ -(xy' + x'y & xx' - yy' \end{Vmatrix}, \quad f(x + yi) \cdot f(x' +$$

$$+ y'i) = \begin{Vmatrix} x & y \\ -y & x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} xx' - yy' & xy' + x'y \\ -(xy' + x'y) & xx' - yy' \end{Vmatrix}.$$

Deci $f((x + yi)(x' + y'i)) = f(x + yi) \cdot f((x' + y'i)$.

Aplicația $f : A \to M$ este, așadar, un izomorfism.

d) Inversul elementului $x + yi$ din A, unde $x \neq 0$ sau $y \neq 0$, este elementul $\dfrac{1}{x + yi} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} -$

$$- \frac{y}{x^2 + y^2} i.$$

Pentru ca acesta să fie în A, $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ și $\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ trebuie să fie întregi.

Dacă $x \neq 0$ și $y \neq 0$, atunci $x < x^2 + y^2$ și numărul $\dfrac{x}{x^2 + y^2}$ nu este întreg.

Dacă $x = 0$, atunci $\dfrac{1}{x + yi} = \dfrac{-y}{y^2} i = -\dfrac{1}{y} i$. Numărul $\dfrac{1}{y}$ este întreg cînd $y = \pm 1$; obținem deci numerele i, $-i$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $y = 0$, atunci $\frac{1}{x + yi} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Numărul $\frac{1}{x}$ este întreg cînd $x = \pm 1$. Obținem numerele $1, -1$.

Avem: $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$, $i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$, $(-i)^{-1} = \frac{1}{-i} = i$

564. *Să se demonstreze că dacă a este un element inversabil al unui inel A, atunci aplicația $x \to axa^{-1}$ este un automorfism al lui A.*

Soluție

Fie $f(x) = axa^{-1}$.

Avem: $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1a^{-1} = ax_2a^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}ax_1a^{-1}a = a^{-1}ax_2a^{-1}a \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Aplicația f este injectivă.

Fie $y \in A$: $y = f(x) \Leftrightarrow y = axa^{-1} \Leftrightarrow x = a^{-1}ya$.

Aplicația f este surjectivă.

Avem: $f(x + y) = a(x + y)a^{-1} = axa^{-1} + aya^{-1} = f(x) + f(y)$;

$f(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = f(x) \cdot f(y)$.

Așadar f este un automorfism.

565. *Fie A un inel. Dacă există un număr întreg pozitiv k astfel încît $kx = 0$, oricare ar fi $x \in A$, atunci notînd cu n cel mai mic număr întreg cu această proprietate, se spune că inelul A este de caracteristică n. Dacă nu există un întreg pozitiv k cu proprietatea menționată, se spune că inelul este de caracteristică 0.*

a) Să se precizeze caracteristica inelului Z și a inelului claselor de resturi modulo n.

b) Să se demonstreze că într-un inel comutativ A de caracteristică p, unde p este prim, avem:

$$(a + b)^p = a^p + b^p;$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^p = \sum_{i=1}^{m} a^p \quad (m = 2, 3, 4, \ldots)$$

c) Să se transpună rezultatul de la punctul (b) în cazul claselor de resturi modulo 5.

Soluție

a) Inelul Z este de caracteristică 0. Inelul claselor de resturi modulo n este de caracteristică n.

b) Avem : $(a+b)^p = a^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^{p-k} b^k + b^p$,

$$C_p^k = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}.$$

Deoarece numărul C_p^k este întreg și p este prim, rezultă că $1.2.3.\ldots k$ divide pe $(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)$. Așadar există un număr întreg l și un număr întreg $m = 1.2.3\ldots k$, astfel încît $(p-1)\ldots(p-k+1) = ml$. Deci $C_p^k = p \cdot l$ și $C_p^k a^{p-k} b^k = p \cdot l \cdot a^{p-k} b^k = (pb) \cdot (la^{p-k} b^{k-1}) = 0$. Rezultă că $(a+b)^p = a^p + b^p$.

Egalitatea $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^p = \sum_{i=1}^{m} a_i^p$ se demonstrează raționînd prin recurență asupra lui m.

c) În cazul corpului claselor de resturi modulo 5, relațiile de la (b) devin :

$$(a+b)^5 = a^5 + b^5$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^5 = \sum_{i=1}^{m} a_i^5.$$

Observație.

În corpul claselor de resturi modulo 5 avem $x^5 = x$ oricare ar fi x și deci $(a+b)^5 = a + b = a^5 + b^5$.

566. *Să se demonstreze că legile* $x \oplus y = x + y + 2$, $x \odot y = x \cdot y = xy + 2x + 2y + 2$ *determină pe mulțimea* Q *a numerelor raționale o structură de corp comutativ.*

Soluție

Se verifică, fără dificultate, axiomele corpului (vezi soluția ex. 543). Obținem $\bar{0} = -2$ și $\bar{1} = -1$.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul elementelor simetrice pentru legea $\odot$ poate fi redactat astfel:

fie $x \neq \bar{0}$, adică $x \neq -2$; avem: $x \odot x' = \bar{1} \Leftrightarrow xx' + 2x + 2x' + 2 = -1 \Leftrightarrow x'(x+2) = -3 - 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{-3-2x}{x+2}.$$

Evident că dacă $x \in Q$, avem și $x' \in Q$.

567. *Să se demonstreze că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea M a numerelor complexe de forma $a + b\alpha$, unde $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $a \in R$, $b \in R$, o structură de corp.*

Soluție.

Observăm că α este o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ și deci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, de unde rezultă $\alpha^2 = -1 - \alpha$.

Fie $x = a + b\alpha$ și $y = a' + b'\alpha$ două elemente din M.

Avem: $x + y = (a + a') + (b + b')\alpha$.

$$x \cdot y = aa' + bb'\alpha^2 + (ab' + a'b)\alpha = aa' + bb'(-1 - \alpha) + (ab' + a'b)\alpha = (aa' - bb') + (ab' + a'b - bb')\alpha.$$

Așadar, $x + y \in M$ și $x \cdot y \in M$. Adunarea și înmulțirea sînt peste tot definite în M.

Fie $x = a + b\alpha$ și $\bar{x} = a - b - b\alpha$. Avem:

$$x\bar{x} = a^2 - ab - ab\alpha + ab\alpha - b^2\alpha - b^2\alpha^2 = a^2 - ab - b^2\alpha - b^2(-1-\alpha) = a^2 + b^2 - ab.$$

Observăm că din $a + b\alpha = 0$, adică $a + \frac{b(-1+i\sqrt{3})}{2} = 0$, respectiv $2a - b + bi\sqrt{3} = 0$ rezultă $2a - b = 0$ și $b = 0$.

Așadar, $a + b\alpha = 0 \Leftrightarrow a = 0$ și $b = 0$.

Fie $x = a + b\alpha \neq 0$. În acest caz $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ și atunci

$$a^2 + b^2 - ab = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + a^2 + b^2] \neq 0.$$

Calculul elementelor simetrice pentru legea $\odot$ poate fi redactat astfel:

fie $x \neq \bar{0}$, adică $x \neq -2$; avem: $x \odot x' = \bar{1} \Leftrightarrow xx' + 2x + 2x' + 2 = -1 \Leftrightarrow x'(x+2) = -3 - 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{-3-2x}{x+2}.$$

Evident că dacă $x \in Q$, avem și $x' \in Q$.

567. *Să se demonstreze că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea M a numerelor complexe de forma $a + b\alpha$, unde $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $a \in R$, $b \in R$, o structură de corp.*

Soluție.

Observăm că α este o rădăcină a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ și deci $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, de unde rezultă $\alpha^2 = -1 - \alpha$.

Fie $x = a + b\alpha$ și $y = a' + b'\alpha$ două elemente din M.

Avem: $x + y = (a + a') + (b + b')\alpha$.

$$x \cdot y = aa' + bb'\alpha^2 + (ab' + a'b)\alpha = aa' + bb'(-1-\alpha) + (ab' + a'b)\alpha = (aa' - bb') + (ab' + a'b - bb')\alpha.$$

Așadar, $x + y \in M$ și $x \cdot y \in M$. Adunarea și înmulțirea sînt peste tot definite în M.

Fie $x = a + b\alpha$ și $\bar{x} = a - b - b\alpha$. Avem:

$$x\bar{x} = a^2 - ab - ab\alpha + ab\alpha - b^2\alpha - b^2\alpha^2 = a^2 - ab - b^2\alpha - b^2(-1-\alpha) = a^2 + b^2 - ab.$$

Observăm că din $a + b\alpha = 0$, adică $a + \frac{b(-1+i\sqrt{3})}{2} = 0$, respectiv $2a - b + bi\sqrt{3} = 0$ rezultă $2a - b = 0$ și $b = 0$.

Așadar, $a + b\alpha = 0 \Leftrightarrow a = 0$ și $b = 0$.

Fie $x = a + b\alpha \neq 0$. În acest caz $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ și atunci

$$a^2 + b^2 - ab = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + a^2 + b^2] \neq 0.$$

Din $x\bar{x} = a^2 + b^2 - ab$ rezultă $\frac{1}{x} = \frac{1}{a^2 + b^2 - ab}\,\bar{x}$ și deci $\frac{1}{x} \in M$. Celelalte axiome se verifică fără dificultate.

568. *Fie mulțimea M a matricelor m pătrate de ordinul doi de forma $m = a\bar{1} + b\bar{i} + c\bar{j} + d\bar{k}$, unde $a \in R$, $b \in R$, $c \in R$, $d \in R$ și* $\bar{1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\bar{i} = \begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix}$, $\bar{j} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, $\bar{k} = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{Vmatrix}$.

a) Să se demonstreze că adunarea este peste tot definită în M.

b) Să se completeze tabelul.

$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{1}$				
$\bar{i}$				
$\bar{j}$				
$\bar{k}$				

și apoi să se verifice că înmulțirea este peste tot definită.

Să se calculeze $m \cdot \bar{m}$ și $\bar{m} \cdot m$ unde $\bar{m} = a\bar{1} - b\bar{i} - c\bar{j} - d\bar{k}$.

c) Să se demonstreze că adunarea și înmulțirea determină pe M o structură de corp necomutativ (corpul cuaternionilor).

d) Să se verifice că proprietatea: „Un polinom de gradul n are cel mult n rădăcini" (adevărată cînd coeficienții sînt într-un corp comutativ), nu mai este adevărată în corpul M. Se va trata cazul polinomului $x^2 + \bar{1}$ ($\bar{1}$ aici reprezintă elementul unitate al lui M).

Soluție

a) Dacă $m = a1 + bi + cj + dk$, $m' = a'1 + b'i + c'j + d'k$, atunci $m + m' = (a + a')\bar{1} + (b + b')\bar{i} + (c + c')\bar{j} + (d + d')\bar{k}$. Deci $(m + m') \in M$.

b) Tabelul cerut este următorul:

$\cdot$	$\bar{l}$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{l}$	$\bar{l}$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{i}$	$-\bar{l}$	$-\bar{k}$	$-\bar{j}$
$\bar{j}$	$\bar{j}$	$-\bar{k}$	$-\bar{l}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{k}$	$\bar{j}$	$-\bar{i}$	$-\bar{l}$

Făcînd calculele și ținînd seama de tabel obținem:
$mm' = (aa' - bb' - cc' - dd')\bar{l} + (ab' + ba' + cd' - dc')\bar{i} +$
$+ (ac' - bd' + ca' + db')\bar{j} + (ad' + bc' - cb' + da')\bar{k}$.
Deci $mm' \in M$.

Avem: $m\bar{m} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\bar{l} = \bar{m} \cdot m$.

c) Adunarea și înmulțirea determină, în mod evident pe M o structură de inel cu element unitate ($\bar{l} \in M$ căci $\bar{l} = 1 \cdot \bar{l} +$ $+ 0\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k}$). Dacă $m \neq 0$, adică cel puțin unul dintre coeficienții a, b, c, d este diferit de 0, atunci $a^2 + b^2 + c^2 +$ $+ d^2 \neq 0$ și

$$m \cdot \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\bar{m} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\bar{m} \cdot m = \bar{l}.$$

Așadar, $m^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\bar{m}$ (evident $m^{-1} \in M$).

Deci adunarea și înmulțirea determină pe M o structură de corp. Acest corp este necomutativ, căci de exemplu $\bar{i} \cdot \bar{j} \neq \bar{j} \cdot \bar{i}$ ($\bar{i}$, $\bar{j}$ sînt elemente din M, căci $\bar{i} = 0 \cdot \bar{1} + 1 \cdot \bar{i} +$ $+ 0 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$, $\bar{j} = 0 \cdot \bar{1} + 0 \cdot \bar{i} + 1 \cdot \bar{j} + 0 \cdot \bar{k}$).

Polinomul $x^2 + \bar{l}$ admite în mod evident rădăcinile $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, $-\bar{i}$, $-\bar{j}$, $-\bar{k}$, deci are cel puțin 6 rădăcini.

569. *a) Să se demonstreze că legile* $x \oplus y = x + y - 4$ *și* $x \odot y = xy - 4x - 4y + 20$ *determină pe mulțimea numerelor reale o structură de corp comutativ.*

b) Să se verifice că între corpul numerelor reale și corpul de la a) există un izomorfism $f: R \to R$, de forma $f(x) = ax + b$.

Soluție.

a) Se verifică, fără dificultate, axiomele corpului. Se obține $\bar{0} = 4$ și $\bar{1} = 5$.

b) Dacă aplicația $f: R \to R$ este izomorfism, atunci $f(0) = \bar{0}$ și $f(1) = \bar{1}$.

Deducem $b = 4$ și $a = 1$. Așadar, $f(x) = x + 4$.

Aplicația $f: R \to R$ determinată mai sus, este evident bijectivă.

Avem: $f(x \oplus y) = x + y + 4$

$f(x) \oplus f(y) = f(x) + f(y) - 4 = x + 4 + y + 4 - 4 = x + y + 4$, deci $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$.

Avem: $f(xy) = xy + 4$,

$f(x) \odot f(y) = f(x) \cdot f(y) - 4 \cdot f(x) - 4f(y) + 20 = (x + 4)(y + 4) - 4(x + 4) - 4(y + 4) + 20 = xy + 4$.

570. *a) Să se arate că legile de compoziție* $x \oplus y = xy$ *și* $x \odot y = x^{\ln y}$ *determină pe mulțimea* $(0, +\infty)$ *o structură de corp comutativ.*

b) Să se arate că între corpul numerelor reale R *și corpul de la punctul a) există un izomorfism* $f: R \to (0, +\infty)$ *de forma* $f(x) = \alpha e^{\beta x}$.

Soluție.

a) Legile $\oplus$ și $\odot$ sînt evident peste tot definite. Avem $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = xyz$. Legea $\oplus$ este asociativă; ea este evident și comutativă.

Elementul neutru pentru adunare este $0 = 1$.

Opusul elementului x este elementul $\frac{1}{x}$.

Legea $\odot$ este asociativă căci:

$$\ln[(x \odot y) \odot z] = \ln[x^{\ln y \cdot \ln z}] = \ln y \cdot \ln z \cdot \ln x \text{ și}$$

$$\ln[(x \odot (y \odot z)] = \ln [x^{\ln (x \odot z)}] = \ln[x^{\ln}(y^{\ln z})] = \ln(x^{\ln z \ \ln y}) = \ln z \cdot \ln y \cdot \ln x.$$

Scanned with OKEN Scanner

Legea $\odot$ este comutativă căci:

$$\ln(x \odot y) = \ln(x^{\ln y}) = \ln y \cdot \ln x \text{ și}$$
$$\ln(y \odot x) = \ln(y^{\ln x}) = \ln x \cdot \ln y.$$

Legea $\odot$ este distributivă față de legea $\oplus$. Într-adevăr, $x \odot (y \oplus z) = x^{\ln(yz)} = x^{\ln y + \ln z} = x^{\ln y} x^{\ln z} = (x \odot y) + (x \odot z)$. Avem: $x \odot \bar{1} = x \Leftrightarrow x^{\ln \bar{1}} = x \Leftrightarrow \ln \bar{1} \cdot \ln x = \ln x \Leftrightarrow \ln \bar{1} = \bar{1} \Leftrightarrow e = \bar{1}$.

Elementul neutru pentru înmulțire este numărul e.

Fie $x \neq \bar{0}$, adică $x \neq 1$.

Avem: $x \odot x' = \bar{1} \Leftrightarrow x^{\ln x'} = e \Leftrightarrow \ln x' \cdot \ln x = \ln e \Leftrightarrow \ln x' = \frac{1}{\ln x} \Leftrightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$.

Inversul elementului x este elementul $e^{\frac{1}{\ln x}}$.

b) Dacă există un izomorfism f, atunci $f(0) = \bar{0}$ și $f(1) = \bar{1}$, adică $\alpha = 1$ și $1 \cdot e^{\beta} = e$, $\beta = 1$.

Deci $f(x) = e^x$.

Funcția $f: R \to (0, +\infty)$ definită prin $f(x) = e^x$ este bijectivă și $f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \oplus f(y)$; (1)

$$f(xy) = e^{xy} = (e^x)^y;$$

$f(x) \odot f(y) = f(x)^{\ln f(y)} = f(x)^{\ln e^y} = f(x)^y = (e^x)^y$.

Deci $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$.

571. a) *Să se arate că legile de compoziție* $x \oplus y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ *și* $x \odot y = xy$ *determină, pe mulțimea* R *a numerelor reale, o structură de corp comutativ.*

b) Să se demonstreze că între corpul numerelor reale și corpul de la punctul a) există un izomorfism $f: R \to R$ *de forma* $f(x) = \sqrt[3]{\alpha x + \beta}$.

Soluție.

a) Legile $\oplus$ și $\odot$ sînt evident peste tot definite.

Avem: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$. Legea $\oplus$ este asociativă. Ea este evident comutativă.

$x \oplus \bar{0} = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + \bar{0}^3} = x \Leftrightarrow x^3 + 0^3 = x^3 \Leftrightarrow \bar{0} = 0$.

$\bar{0} = 0$ este element neutru pentru legea $\oplus$.

$x \oplus x' = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + x'^3} = 0 \Leftrightarrow x' = -x$. Orice element x admite un opus, $x' = -x$.

Legea $\odot$ este evident asociativă și comutativă.

Avem: $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) = x\sqrt[3]{y^3 + z^3}$. Legea $\odot$ este distributivă față de legea $\oplus$.

Avem: $x \odot 1 = x$; 1 este element neutru pentru înmulțire.

Inversul lui $x \neq 0$ este $\frac{1}{x}$.

b) Trebuie să avem $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, deci $\sqrt[3]{\beta} = 0$ și $\sqrt[3]{\alpha + \beta} = 1$. Deducem $\beta = 0$ și $\alpha = 1$, deci $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Verificare: funcția $f: R \to R$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, este bijectivă și $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$ căci $f(x + y) = \sqrt[3]{x+y}$, $f(x) \oplus f(y) = \sqrt[3]{x + y}$.

$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = \sqrt[3]{xy}$.

572. *Fie C un corp comutativ. Notăm cu $\frac{a}{b}$ elementul ab^{-1} $(b \neq 0)$.*

a) Să se arate că:

$$\frac{a}{1} = a,\ \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}(b \neq 0, c \neq 0),\ a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}\ (c \neq 0),$$

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}\ (c \neq 0),\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}\ (b \neq 0, d \neq 0),$$

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a + b}{d}\ (d \neq 0),\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}\ (b \neq 0, d \neq 0).$$

b) Să se calculeze în corpul claselor de resturi modulo 11.

$$\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}} + \hat{5} + \frac{\hat{8}}{\hat{3}} \cdot \frac{\hat{7}}{\hat{6}}\right) \cdot \frac{\hat{9}}{\hat{2}}.$$

Soluție.

a) Vom verifica numai egalitățile $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ $(b \neq$

$\neq 0$, $d \neq 0$) și $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ($b \neq 0$, $d \neq 0$), celelalte egalități tratîndu-se în mod analog.

Avem:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1} \text{ și } \frac{ad + bc}{bd} = (ad + bc)(bd)^{-1} =$$

$$= (ad + bc)b^{-1}d^{-1} = ab^{-1} + cd^{-1}. \text{ Deci } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = ab^{-1} \cdot cd^{-1} = acb^{-1}d^{-1} \text{ și } \frac{ac}{bd} = ac(bd)^{-1} =$$

$$= acd^{-1}b^{-1} = ab^{-1}cd^{-1}, \text{ deci } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

b) Elementul $\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}} + \hat{5} + \frac{\hat{8}}{\hat{3}} \cdot \frac{\hat{7}}{\hat{6}}\right) \cdot \frac{\hat{9}}{\hat{2}}$ se poate calcula prin două metode:

1) prin aplicarea definiției elementului $\frac{a}{b}$;

2) prin aplicarea regulilor demonstrate la a).

1) Avem: $\frac{\hat{3}}{\hat{4}} = \hat{3} \cdot \hat{4}^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{3} = \hat{9}$,

$$\frac{\hat{8}}{\hat{3}} = \hat{8} \cdot \hat{3}^{-1} = \hat{8} \cdot \hat{4} = \hat{10},$$

$$\frac{\hat{7}}{\hat{6}} = \hat{7} \cdot \hat{6}^{-1} = \hat{7} \cdot \hat{2} = \hat{3},$$

$$\frac{\hat{9}}{\hat{2}} = \hat{9} \cdot \hat{2}^{-1} = \hat{9} \cdot \hat{6} = \hat{10}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}}+\hat{5}+\frac{\hat{8}}{\hat{3}}\cdot\frac{\hat{7}}{\hat{6}}\right)\cdot\frac{\hat{9}}{\hat{2}}=(\hat{9}+\hat{5}+\hat{10}\cdot\hat{3})\cdot\hat{10}=$

$=(\hat{3}+\hat{8})\cdot\hat{10}=\hat{0}\cdot\hat{10}=\hat{0}.$

2) Avem: $\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}}+\hat{5}+\frac{\hat{8}}{\hat{3}}\cdot\frac{\hat{7}}{\hat{6}}\right)\cdot\frac{\hat{9}}{\hat{2}}=\left(\frac{\hat{3}+\hat{4}\cdot\hat{5}}{\hat{4}}+\right.$

$\left.+\frac{\hat{8}\cdot\hat{7}}{\hat{3}\cdot\hat{6}}\right)\cdot\frac{\hat{9}}{\hat{2}}=\frac{\hat{1}\cdot\hat{7}+\hat{1}\cdot\hat{4}}{\hat{4}\cdot\hat{7}}\cdot\frac{\hat{9}}{\hat{2}}=\frac{\hat{0}}{\hat{4}\cdot\hat{7}}\cdot\frac{\hat{9}}{\hat{2}}=\hat{0}.$

573. *Să se arate că orice corp finit cu $p+1$ elemente, unde p este număr prim, este comutativ*.*

Soluție

Fie $x\neq 0$ și $x\neq 1$. În șirul $x,x^2,\ldots,x^p$ nu există două elemente egale căci dacă $x^m=x^n$, cu $m>n$ și $m\leqslant p$, $n\leqslant p$, atunci $x^{m-n}=1$. Dacă $m-n=1$, atunci $x=1$ și se contrazice ipoteza. Dacă $m-n=k$, unde $k>1$ și evident $k<p$, atunci înmulțirea ar determina pe mulțimea $\{x,x^2,\ldots,x^k\}$ o structură de subgrup al grupului multiplicativ și k ar divide pe p, ceea ce contrazice ipoteza că p este prim.

Deci orice element $a\neq 0$ al corpului dat poate fi scris sub forma x^m, unde m este un număr natural $\leqslant p$, și $x\neq 0$, $x\neq 1$.

Fie $a\neq 0$ și $b\neq 0$. Există două numere naturale m și n $m\leqslant p$, $n\leqslant p$ astfel încît $a=x^m$ și $b=x^n$.

Avem:

$$a\cdot b=x^m\cdot x^n=x^{m+n};$$

$$b\cdot a=x^n\cdot x^m=x^{n+m}=x^{m+n},$$

deci $ab=ba$.

Dacă $a=0$ sau $b=0$, atunci $ab=ba=0$.

* Se poate demonstra că orice corp finit este comutativ (teorema lui Wedderburn). Demonstrația în cazul general este mai dificilă.

Scanned with OKEN Scanner

574. Să se demonstreze că în corpul claselor de resturi modulo numărul natural prim p avem $x^{p-1} = \hat{1}$, oricare ar fi $x \neq \hat{0}$. Să se deducă de aici că $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ (modulo p) unde p este prim și a este prim cu p (teorema lui Fermat). Să se arate că în corpul claselor de resturi modulo numărul natural prim p, egalitatea $x^p = x$ este o indentitate.

Soluție.

Se știe că înmulțirea determină pe mulțimea $G = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, ..., \widehat{p-1}\}$ o structură de grup multiplicativ de ordinul $p-1$ și deci $x^{p-1} = \hat{1}$ oricare ar fi $x \in G$, adică $x \neq \hat{0}$. Dacă a este prim cu p atunci a nu este multiplu de p, ceea ce înseamnă că $a \notin \hat{0}$, adică $\hat{a} \neq \hat{0}$ și deci $\hat{a}^{p-1} = \hat{1}$. Din ultima egalitate deducem $\hat{a}^{p-1} - \hat{1} = 0$ și deci $\widehat{a^{p-1} - 1} = \hat{0}$, adică $a^{p-1} - 1 \equiv 0$ (modulo p).

Egalitatea $x^p = x$ este o identitate căci dacă $x = \hat{0}$, ea este adevărată, iar dacă $x \neq \hat{0}$, simplificînd prin x obținem egalitatea demonstrată mai înainte $x^{p-1} = \hat{1}$.

575. Să se demonstreze că un inel A, finit, fără divizori ai lui 0, este un corp.

Soluție.

Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ elementele inelului A și $a \in A$, cu $a \neq 0$.

Elementele $ax_1, ax_2, ..., ax_n$ sînt distincte căci din $ax_k = ax_l$ ($k \neq l$ și $k, l = 1, 2, ..., n$) rezultă $x_k = x_l$ (inelul neavînd divizori ai lui 0) și deci elementele lui A se pot scrie sub forma $ax_1, ax_2, ..., ax_n$).

Există deci $x_k = e' \in A$, astfel încît $ae' = a$.

Raționînd ca mai înainte, deducem că elementele $x_1a; x_2a; ..., x_na$ sînt distincte.

Fie $b \in A$. Există $x_l = e''$, astfel încît $e''a = a$. Există $x_m \in A$ și $x_r \in A$, astfel încît $b = x_ma$ și $b = ax_r$. Avem $be' = x_mae' = x_ma = b$ și $e''b = e'' \cdot ax_r = ax_r = b$.

Deoarece $be' = e''b = b$, oricare ar fi b, deducem $e''e' = e'' = e'$.

Punem $e' = e = 1$.

Deoarece $b \cdot 1 = 1 \cdot b = b$, oricare ar fi b, 1 este element unitate.

Există un element $x_r = a' \in A$ și un element $x_s = a''$ astfel încît $aa' = 1$ și $a''a = 1$.

Avem:

$a''aa' = (a''a)a' = a''(aa') = a' = a''$. Deci orice $a \neq 0$, admite un invers.

576. *Să se calculeze următorii determinanți avînd elementele în corpul claselor de resturi modulo 7.*

a)
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \hat{2} & \hat{4} & \hat{0} \\ \hat{1} & \hat{5} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix}$$

b)
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{4} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{6} & \hat{5} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{6} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{3} \end{vmatrix}$$

Soluție

a) Aplicînd regula lui Sarrus, obținem $\Delta_1 = 0$.

b) Înmulțind prima coloană cu $-\hat{4}(-\hat{4} = \hat{3})$ și adunînd-o la coloana a treia obținem:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{1} & \hat{5} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{6} & \hat{0} & \hat{6} & \hat{3} \end{vmatrix}$$

Scăzînd coloana 1-a din coloana a 4-a, obținem:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{2} & \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{5} & \hat{1} \\ \hat{6} & \hat{0} & \hat{6} & \hat{4} \end{vmatrix}$$

Dezvoltînd după elementele primei linii obținem $\Delta_2 = \hat{1}$.

577. *Să se rezolve sistemul următor în corpul claselor de resturi modulo 11.*

$$\begin{cases} \hat{2}x + \hat{10}y + z = \hat{4}, \\ x + \hat{3}z = \hat{2}, \\ \hat{10}x + \hat{2}y + \hat{2}z = \hat{1}. \end{cases}$$

Soluție

Avem: $\Delta = \hat{6}$, $\Delta_x = \hat{3}$, $\Delta_y = \hat{7}$, $\Delta_z = \hat{3}$.

Deci: $x = \Delta_x \cdot \Delta^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{2} = \hat{6}$;

$y = \Delta_y \cdot \Delta^{-1} = \hat{7} \cdot \hat{2} = \hat{3}$;

$z = \Delta_z \cdot \Delta^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{2} = \hat{6}$.

578. *Să se rezolve sistemul următoru în corpul claselor de resturi modulo 11.*

$$\begin{cases} x + y + z + u = \hat{6}, \\ x + \hat{6}y + \hat{2}z + \hat{10}u = \hat{2}, \\ \hat{2}x + y + \hat{10}z + u = \hat{3}, \\ x + y + \hat{3}z + \hat{10}u = \hat{2}. \end{cases}$$

Soluție.

Notăm cu Δ determinantul sistemului, cu Δ_x, respectiv Δ_y, Δ_z, Δ_u determinantul necunoscutei x, respectiv y, z, u.

Avem: $\Delta = \hat{9}$, $\Delta_x = \hat{3}$, $\Delta_y = \hat{3}$, $\Delta_z = \hat{4}$, $\Delta_u = \hat{0}$.

Deci $x = \Delta_x \cdot \Delta^{-1} = \hat{4}$, $y = \Delta_y \cdot \Delta^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{5} = \hat{4}$,

$z = \Delta_z \cdot \Delta^{-1} = \hat{9}$, $u = \Delta_u \cdot \Delta^{-1} = \hat{0} \cdot \hat{5} = \hat{0}$.

Scanned with OKEN Scanner

579. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y + z + u = \hat{6}, \\ x - y + \hat{2}z - u = \hat{2}, \\ \hat{2}x + y - z + u = \hat{3}, \\ x + y + \hat{3}z - u = \hat{2}. \end{cases}$$

a) În corpul claselor de resturi modulo 11.
b) În corpul claselor de resturi modulo 7.

Soluție.

a) Făcînd calculele obținem $\Delta = \hat{8}$, $\Delta_x = \hat{8}$, $\Delta_y = \hat{3}$, $\Delta_z = \hat{5}$, $\Delta_u = \hat{10}$.

Deci $x = \Delta_x \cdot \Delta^{-1} = \hat{8} \cdot \hat{7} = \hat{1}$,

$y = \Delta_y \cdot \Delta^{-1} = \hat{3} \cdot \hat{7} = \hat{10}$,

$z = \Delta_z \cdot \Delta^{-1} = \hat{5} \cdot \hat{7} = \hat{2}$,

$u = \Delta_u \cdot \Delta^{-1} = \hat{10} \cdot \hat{7} = \hat{4}$.

b) În corpul claselor de resturi modulo 7, determinatul Δ al sistemului este $\hat{0}$. Determinantul format din coeficienții necunoscutelor x, y, z din ultimele trei ecuații este:

$$\begin{vmatrix} \hat{1} & -\hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} & -\hat{1} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{6}$$

Determinantul caracteristic este:

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} & \hat{6} \\ \hat{1} & -\hat{1} & \hat{2} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} & -\hat{1} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{1} & \hat{3} & \hat{2} \end{vmatrix} = \hat{0}.$$

Deoarece $\Delta_c = \hat{0}$ sistemul este compatibil, simplu nedeterminat. Soluția sistemului este $x = 2u$, $y = 1 + 3u$, $z = 5 + u$.

Scanned with OKEN Scanner

580. *a) Fie C_p corpul claselor de resturi modulo numărul natural prim p. Să se demonstreze că dacă polinomul cu coeficienți în C_p de forma $a_0x^n+a_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + a_n$, unde $n < p$, este identic nul, atunci $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \hat{0}$.*

b) Să se precizeze toate polinoamele cu coeficienți în C_5, de forma $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 (a_0 \neq 0)$ care sînt identic nule. (Se va ține seama că în C_5, egalitatea $x^5 = x$ este o identitate).

Soluție.

a) Dacă $n < p$, atunci C_p există $n + 1$ elemente distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Avem:

$$\begin{cases} a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \\ a_0x_2^n + a_1x_2^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0x_{n+1}^n + a_1x_{n+1}^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \end{cases}$$

S-a obținut un sistem liniar și omogen în $a_0, \ldots, a_n$. Determinantul sistemului este:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} \ldots & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} \ldots & 1 \end{vmatrix}$$ și este de tip Vandermonde.

Determinantul Δ este, deci, egal cu un produs de factori de forma $x_i - x_j$, unde $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n + 1)$. Deoarece $x_i \neq x_j$, pentru $i \neq j$, rezultă $x_i - x_j \neq 0$ și deci $\Delta \neq \hat{0}$. Sistemul omogen nu admite decît soluția banală $a_0 = \hat{0}$. $a_1 = \hat{0}, \ldots, a_n = \hat{0}$.

b) Deoarece $x^5 = x$, avem:

$$\begin{aligned} &a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = \\ &= a_0x + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^3 + a_4x + a_5 = \\ &= a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + (a_0 + a_4)x + a_5. \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Polinomul $a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + (a_0 + a_4)x + a_5$ este identic nul, conform cu a), dacă $a_1 = \hat{0}$, $a_2 = \hat{0}$, $a_0 + a_4 = \hat{0}$ și $a_5 = \hat{0}$. Ecuația $a_0 + a_4 = \hat{0} (a_0 \neq 0)$ are următoarele soluții:

$$\begin{aligned} a_0 &= \hat{1}, & a_4 &= \hat{4}; \\ a_0 &= \hat{2}, & a_4 &= \hat{3}; \\ a_0 &= \hat{3}, & a_4 &= \hat{2}; \\ a_0 &= \hat{4}, & a_4 &= \hat{1}. \end{aligned}$$

Obținem următoarele polinoame identic nule, de forma cerută:

$$x^5 + \hat{4}x, \quad \hat{2}x^5 + \hat{3}x, \quad \hat{3}x^5 + \hat{2}x, \quad \hat{4}x^5 + x.$$

581. a) *Fie C_p corpul claselor de resturi modulo numărul prim p. Să se demonstreze că dacă polinoamele $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, unde $n < p$ și $a_0 \neq 0$, și $b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_n$ unde $m < p$ și $b_0 \neq 0$ sînt identice, atunci $n = m$ și $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.*

b) Să se precizeze toate polinoamele de forma $a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x + a_5$ cu coeficienții în C_5, identice cu polinomul $x^4 + \hat{2}x^3 + x^2 + \hat{4}x + \hat{3}$.

Soluție.

a) Fie $n > m$. În acest caz există un număr întreg $k > 0$ astfel încît $n = m + k$.

Polinomul $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ se poate scrie sub forma $a_0x^{m+k} + a_1x^{m+k-1} + \ldots + a_{n-m-1}x^{m+1} + a_{n-m}x^m + \ldots + a_n$.

Avem:

$a_0x^{m+k} + a_1x^{m+k-1} + \ldots + a_{n-m-1}x^{m+1} + a_{n-m}x^m + \ldots + a_n = b_0x^m + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n \Leftrightarrow a_0x^{m+k} + a_1x^{m+k-1} + \ldots + a_{n-m-1}x^{m+1} + (a_{n-m} - b_0)x^m + (a_{n-m-1} - b_1)x^{m-1} + \ldots + a_n - b_m = 0$. Rezultă, conform exercițiului precedent, $a_0 = 0$, ceea ce contrazice ipoteza $a_0 \neq 0$.

În mod analog se arată că nu putem avea $m > n$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci $n = m$ și polinoamele date se pot reprezenta sub forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$.

Avem:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \ldots + a_n - b_n = 0.$

Rezultă: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

b) Avem:

$$a_0x^6 + a_1x^5 + a_2x^4 + a_3x^3 + a_4x^2 + a_5x + a_6 = a_2x^4 + a_3x^3 + (a_0 + a_4)x^2 + (a_1 + a_5)x + a_6.$$

Polinomul $a_2x^4 + a_3x^3 + (a_0 + a_4)x^2 + (a_1 + a_5)x + a_6$ este, conform cu a), identic cu polinomul $x^4 + \hat{2}x^3 + x^2 + \hat{4}x + \hat{3}$, dacă $a_2 = \hat{1}$, $a_3 = \hat{2}$, $a_0 + a_4 = \hat{1}$, $a_1 + a_5 = \hat{4}$, $a_6 = \hat{3}$. Ecuația $a_0 + a_4 = \hat{1}$ $(a_0 \neq \hat{0})$ are următoarele soluții: $a_0 = \hat{1}$, $a_4 = \hat{0}$; $a_0 = \hat{2}$, $a_4 = \hat{4}$; $a_0 = \hat{3}$, $a_4 = \hat{3}$; $a_0 = \hat{4}$, $a_4 = \hat{2}$, iar ecuația $a_1 + a_5 = \hat{4}$ are următoarele soluții: $a_1 = \hat{0}$, $a_5 = \hat{4}$; $a_1 = \hat{1}$, $a_5 = \hat{3}$; $a_1 = \hat{2}$, $a_5 = \hat{2}$; $a_1 = \hat{3}$, $a_5 = \hat{1}$; $a_1 = \hat{4}$, $a_5 = \hat{0}$. Obținem următoarele polinoame: $x^6 + x^4 + \hat{2}x^3 + \hat{4}x + \hat{3}$,
$x^6 + x^5 + x^4 + \hat{2}x^3 + \hat{3}x + \hat{3}$ etc. (sînt în total 20 de astfel de polinoame).

582. *Fie C un corp comutativ și următoarele polinoame cu coeficienți în C:*

$$A_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \ (a_n \neq 0),$$
$$B_m(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0 (b_m \neq 0).$$

a) Să se demonstreze că dacă $n \geqslant m$, atunci există un polinom $Q_1(x)$ și un polinom $R_{n-1}(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_n$ astfel încît $A_n(x) = B_m(x) \cdot Q_1(x) + R_{n-1}(x)$.

b) Să se demonstreze că există un polinom $Q(x)$ și un polinom $R_{m-1}(x) = d_{m-1}x^{m-1} + d_{m-2}x^{m-2} + \ldots + d_0$ astfel încît $A_n(x) = B_m(x) \cdot Q(x) + R_{m-1}(x)$. Polinomul $Q(x)$ se numește cîtul împărțirii polinomului $A_n(x)$ la $B_m(x)$, iar $R_{m-1}(x)$ se numește restul aceleiași împărțiri.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se indice un algoritm de aflare a polinoamelor $Q_1(x)$, $R_{n-1}(x)$, $Q(x)$, $R_{m-1}(x)$.

d) Polinoamele $Q(x)$ *și* $R_{m-1}(x)$ *sînt unice ?*

Soluție.

a) Putem pune $Q_1(x) = a_n \cdot b_m^{-1} \cdot x^{n-m}$,

$R_{n-1}(x) = (a_{n-1} - b_{m-1}a_n b_m^{-1})x^{n-1} + (a_{n-2} - b_{m-2}a_n b_m^{-1})x^{n-2} + \ldots + (a_{n-m} - a_n b_0 b_m^{-1})x^{n-m} + a_{n-m-1}x^{n-m-1} + \ldots + a_0$.

Într-adevăr,

$B_m(x)\ Q_1(x) + R_{n-1}(x) = a_n x^n + a_n b_m^{-1} b_{m-1} x^{n-1} + \ldots + a_n b_m^{-1} b_0 x^{n-m} + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_{n-m}x^{n-m} + a_{n-m-1}x^{n-m-1} + \ldots + a_0 - (a_n b_m^{-1} b_{m-1} x^{n-1} + a_n b_m^{-1} b_{m-2} x^{n-2} + \ldots + a_n b_m^{-1} b_0 x^{n-m}) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = A_n(x)$.

b) Dacă $n < m$, atunci punînd $Q(x) = 0$ și $R_{m-1}(x) = 0x^{m-1} + 0x^{m-2} + \ldots + 0x^{n+1} + a_n x^n + \ldots + a_0$, avem $A_n(x) = B_m(x) \cdot Q(x) + R_{m-1}(x)$.

Dacă $n \geqslant m$, atunci aplicînd rezultatul de la punctul a) avem succesiv :

$$\begin{aligned} A_n(x) &= B_m(x) \cdot Q_1(x) + R_{n-1}(x), \\ R_{n-1}(x) &= B_m(x) \cdot Q_2(x) + R_{n-2}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots

Deducem prin scădere: $S(x) = B_m(x)\,[Q(x) - Q'(x)] + R_{m-1}(x) - R'_{m-1}(x) = 0$.

Dacă corpul C este infinit, atunci polinomul $S(x)$ este identic nul dacă toți coeficienții sînt 0. Dar polinomul $B_m(x)$ nu este identic nul, deoarece $b_m \neq 0$. Rezultă $Q(x) - Q'(x) \equiv 0$, adică $Q(x) = Q'(x)$ și deci și $R_{m-1}(x) = R'_{m-1}(x)$.

Dacă corpul C nu este infinit, cîtul nu este, în general, unic. Avem de exemplu, în corpul claselor de resturi modulo 5:

$$\hat{x}^3 + \hat{x}^2 + \hat{x} + \hat{1} = (\hat{x}^2 + \hat{2})(\hat{x} + \hat{1}) + (\hat{4}\hat{x} + \hat{4}),$$
$$\hat{x}^3 + \hat{x}^2 + \hat{x} + \hat{1} = (\hat{x}^2 + \hat{2})(\hat{x}^5 + \hat{1}) + (\hat{4}\hat{x} + \hat{4}).$$

583. *În corpul claselor de resturi modulo 5 să se afle un cît și restul împărțirii polinomului* $\hat{2}x^4 + \hat{3}x^3 + \hat{4}x^2 + x + \hat{3}$ *la polinomul* $\hat{3}x^3 + \hat{2}x^2 + \hat{4}$.

Soluție

Calculele se aranjează astfel:

$$\begin{array}{l|l}
\hat{2}x^4 + \hat{3}x^3 + \hat{4}x^2 + x + \hat{3} & \hat{3}x^2 + \hat{3}x + \hat{4} \\
\hline
\hat{3}x^4 + \hat{3}x^3 + \hat{4}x^2 & \hat{4}x^2 + \hat{2}x + \hat{4} \\
\hline
/x^3 + \hat{3}x^2 + x + \hat{3} & \\
\hat{4}x^3 + \hat{4}x^2 + \hat{2}x & \\
\hline
/\hat{2}x^2 + \hat{3}x + \hat{3} & \\
\hat{3}x^2 + \hat{3}x + \hat{4} & \\
\hline
/x + \hat{2} &
\end{array}$$

Avem: $\hat{2}x^4 + \hat{3}x^3 + \hat{4}x^2 + x + \hat{3} = (\hat{3}x^2 + \hat{3}x + \hat{4})(\hat{4}x^2 + \hat{2}x + \hat{4}) + (x + \hat{2})$.

584. *a) Să se arate că pe mulțimea* $\{0, 1\}$ *următoarele legi de compoziție determină o structură de algebră Boole:*

Scanned with OKEN Scanner

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

b) Să se arate că pe mulțimea $\{0, 1, 2, 3\}$ următoarele legi de compoziție determină o structură de algebră Boole:

$\cup$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	3	3
2	2	3	2	3
3	3	3	3	3

$\cap$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	2	2
3	0	1	2	3

Soluție.

a) Este suficient să verificăm condițiile B_1, B_1', B_2, B_2', B_4, B_4', B_5, B_6, B_7, B_8, B_8' din definiția algebrei Boole (vezi § 7, capitolul IV). Observăm întîi că pentru orice $x \in \{0, 1\}$ avem $0 \cup x = x$ (condiția B_6), $1 \cup x = 1$ (condiția B_7).

Oricare ar fi $y, z \in \{0, 1\}$ avem:

$(0 \cup y) \cup z = y \cup z$; $0 \cup (y \cup z) = y \cup z$ și deci $(0 \cup y) \cup z = 0 \cup (y \cup z)$, $(1 \cup y) \cup z = 1 \cup z = 1$, $1 \cup (y \cup z) = 1$ și deci $(1 \cup y) \cup z = 1 \cup (y \cup z)$.

Așadar, $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$, oricare ar fi x, y, $z \in \{0, 1\}$ (condiția B_1). Condiția B_1' se verifică în mod analog, observînd mai întîi că pentru orice $x \in \{0, 1\}$ avem $0 \cap x = 0$, $1 \cap x = x$.

Condițiile B_2 și B_2' sînt evidente.

Oricare ar fi $y \in \{0, 1\}$ avem:

$0 \cup (0 \cap y) = 0 \cup 0 = 0$ și $1 \cup (1 \cap y) = 1 \cup y = 1$. Deci $x \cup (x \cap y) = x$, oricare ar fi $x, y \in \{0, 1\}$ (condiția B_4).

Condiția B_4' se verifică în mod analog.

Oricare ar fi $y, z \in \{0, 1\}$ avem:

Scanned with OKEN Scanner

$0 \cup (y \cap z) = y \cap z$, $(0 \cup y) \cap (0 \cup z) = y \cap z$ și deci $0 \cup (y \cap z) = (0 \cup y) \cap (0 \cup z)$,

$1 \cup (y \cap z) = 1$, $(1 \cup y) \cap (1 \cup z) = 1 \cap 1 = 1$ și deci $1 \cup (y \cap z) = (1 \cup y) \cap (1 \cup z)$.

Deci, oricare ar fi x, y, z avem $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ (condiția B_5).

Dacă punem $o = 1$ și $i = 0$, atunci:

$0 \cup o = 1$, $0 \cap o = 0$, $1 \cup i = 1$, $1 \cap i = o$ (condițiile B_3 și B_3').

Punctul (b) se rezolvă în mod analog, numai că se iau în considerație mai multe cazuri ($o = 0$, $i = 3$).

585. *Fie B o algebră Boole. Să se arate că:* $(x \cap z = y \cap z$ *și* $x \cup z = y \cup z) \Rightarrow (x = y)$.

Soluție.

Dacă $x \cap z = y \cap z$ și $x \cup z = y \cup z$, atunci

$x \cup (x \cap z) = x$, $x \cup (x \cap z) = x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z) = (x \cup y) \cap (y \cup z) = [(x \cup y) \cap y] \cup [(x \cup y) \cap z] = y \cup [(x \cap z) \cup (y \cap z)] = y \cup (y \cap z) \cup (y \cap z) = y \cup (y \cap z) = y$ și deci $x = y$

586. *Fie $(B, \cup, \cap)$ o algebră Boole. Să se arate că oricare ar fi x, y, z din B, avem:*

a) $(x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x) = (x \cup y) \cap (y \cup z) \cap (z \cup x)$;

b) $(\bar{x} \cap \bar{y}) \cup (\bar{y} \cap \bar{z}) \cup (\bar{z} \cap \bar{x}) = \overline{(x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x)}$.

Soluție.

a) Aplicînd proprietățile algebrei Boole, în special distributivitatea reuniunii față de intersecție (B_5), obținem:

$(x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x) = [(x \cap y) \cup (y \cap z)] \cup (z \cap x) = [(x \cap y) \cup y] \cap [(x \cap y) \cup z)] \cup (z \cap x) = [y \cap (x \cup z) \cap (y \cup z)] \cup (z \cap x) = [(y \cap (x \cup z) \cap (y \cup z)) \cup z] \cap [(y \cap (x \cup z) \cap (y \cup z)) \cup x)] = (y \cup z) \cap (x \cup z \cup z) \cap (y \cup z \cup z) \cap (y \cup x) \cap (x \cup z \cup x) \cap (y \cup z \cup x) = (y \cup z) \cap ((y \cup z) \cup x) \cap (x \cup z) \cap (y \cup z) \cap (y \cup x) \cap (x \cup z) = (y \cup z) \cap (x \cup z) \cap (y \cup z) \cap (y \cup x) \cap (x \cup z) = (x \cup y) \cap (y \cup z) \cap (z \cup x)$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Avem :

$\overline{(x \cap y) \cup (y \cap z) \cup (z \cap x)} = \overline{(x \cap y)} \cap \overline{(y \cap z)} \cap \overline{(z \cap x)} =$
$= (\bar{x} \cup \bar{y}) \cap (\bar{y} \cup \bar{z}) \cap (\bar{z} \cup \bar{x})$. Aplicînd proprietatea (a) avem:
$(\bar{x} \cup \bar{y}) \cap (\bar{y} \cup \bar{z}) \cap (\bar{z} \cup \bar{x}) = (\bar{x} \cap \bar{y}) \cup (\bar{y} \cap \bar{z}) \cup (\bar{z} \cap \bar{x})$.

587. *a) Un inel A în care $x^2 = x$, oricare ar fi $x \in A$, se numește boolean. Să se demonstreze că orice inel boolean este comutativ.*

b) Fie $(A, +, \cdot)$ un inel boolean cu element unitate. Să se arate că legile de compoziție $x \cup y = x + y + xy$ și $x \cap y = x \cdot y$ determină pe A o structură de algebră Boole.

c) Fie $(B, \cup, \cap)$ o algebră Boole. Să se arate că legile de compoziție $x + y = (x \cap \bar{y}) \cup (\bar{x} \cap y)$ și $x \cdot y = x \cap y$, determină pe B o structură de inel boolean cu element unitate.

Soluție.

a) Avem : $(x + x)^2 = x + x$ și $(x + x)^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x + x + x$, deci $x + x + x + x = x + x$. Rezultă $x + x = 0$ și deci $x = -x$. Avem : $(x + y)^2 = x + y$ și $(x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$, deci $x + xy + yx + y = x + y$. Rezultă $xy + yx = 0$, adică $xy = -yx = yx$.

b) Este suficient să verificăm condițiile B_1, B_1, B_2, B'_2, B_4, B'_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B'_8. Observăm mai întîi că legile $\cup$ și $\cap$ sînt comutative (condițiile B_2, B'_2).

Avem :

$(x \cup y) \cup z = (x + y + xy) \cup z = x + y + xy + z + xz + yz + xyz = x + y + z + xy + yz + zx + xyz$ și
$x \cup (y \cup z) = (y \cup z) \cup x = y + z + x + yz + zx + xy + yzx = x + y + z + xy + yz + zx + xyz$.

Deci $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$ (proprietatea B_1).

Avem : $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z) = xyz$ (proprietatea B'_1)

Avem : $x \cap (x \cup y) = x(x + y + xy) = x^2 + xy + x^2y = x + (xy + xy) = x$ (proprietatea B''_4).

În mod analog se verifică condiția B'_4.

Avem :

$x \cup (y \cap z) = x \cup (yz) = x + yz + xyz$ și $(x \cup y) \cap (x \cup z) =$
$= (x + y + xy)(x + z + xz) = x^2 + xz + x^2z + xy +$
$+ yz + xyz + x^2y + xyz + x^2yz = x + yz + xyz$. Deci
$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ (proprietatea B_5).

Fie $o = 0$. Avem: $o \cup x = 0 + x + 0 \cdot x = x$ (Condiția B_6).

Fie $i = 1$. Avem: $i \cup x = 1 + x + 1 \cdot x = 1 + x +$
$+ x = 1 = i$ (proprietatea B_7).

Fie $\bar{x} = 1 + x$. Avem:

$$x \cup \bar{x} = x + (1 + x) + x(1 + x) = x + 1 + x + x + x^2 =$$
$$= 1 = i \text{ și } x \cap \bar{x} = x(1 + x) = x + x^2 = 0 = o$$

(condițiile B_8 și B'_8)

c) Punctul c) se rezolvă în mod analog cu b).

Scanned with OKEN Scanner

STRUCTURI ALGEBRICE

EXERCIȚII PROPUSE

588. Legea de compoziție $x * y = xy - x - y + 2$ determină pe R o structură de grup ? Dar pe $R - \{1\}$?

589. Legea de compoziție $x \top y = xy + x + y$ determină pe $[-1, +\infty)$ o structură de grup ? Dar pe $(-1, +\infty)$?

590. Să se arate că înmulțirea determină pe mulțimea matricelor pătrate de forma $\begin{Vmatrix} x & 2y \\ \frac{5}{2}y & x \end{Vmatrix}$ unde $x \in Q$, $y \in Q$ și $x^2 - 5y^2 = 1$ o structură de grup comutativ.

591. Să se arate că înmulțirea determină pe mulțimea matricelor pătrate de forma $\begin{Vmatrix} \cos \alpha & \frac{1}{2}\sin \alpha \\ -2 \sin \alpha & \cos \alpha \end{Vmatrix}$ o structură de grup comutativ.

592. Fie P_5 grupul simetric de gradul 5 și $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze a^{32}, a^{-41} (Se va observa că $a^3 = e$).

593. a) În grupul aditiv al claselor de resturi modulo 10 să se rezolve ecuațiile :

$$\hat{3} + \hat{x} = \hat{7}, \quad \hat{x} + \hat{3} = \hat{6}.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) În grupul simetric de gradul 4 să se rezolve ecuația $a^{25} \cdot X = a^{45}$, unde $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (Se va observa că $a^3 = e$).

594. a) Să se demonstreze că pe intervalul $(10, +\infty)$ legea de compoziție $x \top y = xy - 10x - 10y + 110$ determină o structură de grup.

b) Să se arate că între grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive și grupul de la punctul a) există un izomorfism $f: (0, +\infty) \to (10, +\infty)$ de forma $f(x) = x + 10$.

c) Să se verifice că elementul neutru al grupului $((0, +\infty), \cdot)$ se transformă prin izomorfism în elementul neutru al grupului $((10, +\infty), \top)$.

595. a) Să se demonstreze că pe intervalul $(0,1)$ legea de compoziție $x \top y = \dfrac{xy}{2xy - x - y + 1}$ determină o structură de grup.

b) Să se arate că între grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive și grupul de la punctul a) există un izomorfism $f: (0, +\infty) \to (0, 1)$ de forma $f(x) = \dfrac{1}{x + m}$.

596. a) Să se demonstreze că pe mulțimea $(2, +\infty)$ legea de compoziție $x \top y = xy - 2x - 2y + 6$ determină o structură de grup.

b) Să se arate că între grupul aditiv al numerelor reale și grupul de la punctul a) există un izomorfism $f: R \to (2, +\infty)$ de forma $f(x) = e^{mx} + 2$.

597. a) Să se demonstreze că rădăcinile complexe de ordinul 6 ale unității formează grup multiplicativ. Se va face tabelul legii de compoziție.

b) Să se arate că grupul de la punctul a) și grupul aditiv al claselor de resturi modulo 6 sînt izomorfe. În acest scop se va arăta că notînd la fel elementele care se corespund prin izomorfism se obțin tabele identice.

598. a) Să se demonstreze că numerele complexe de modul 1 formează grup multiplicativ.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se arate că pe mulțimea matricelor pătrate de forma

$$\begin{Vmatrix} \cos\alpha & 3\sin\alpha \\ -\frac{1}{3}\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$$

înmulțirea determină o structură de grup.

c) Să se demonstreze că grupurile de la a) și b) sînt izomorfe.

599. a) Să se arate că pe mulțimea $\{x + y\sqrt{3} \mid x \in Q,\ y \in Q,\ x^2 - 3y^2 = 1\}$ înmulțirea determină o structură de grup.

b) Să se arate că pe mulțimea matricelor pătrate de forma $\begin{Vmatrix} x & 3y \\ y & x \end{Vmatrix}$ înmulțirea determină o structură de grup.

c) Să se arate că între grupul de la punctul a) și grupul de la punctul b) există un izomorfism de forma $x + y\sqrt{3} \to$

$$\to \begin{Vmatrix} x & 3y \\ y & x \end{Vmatrix}.$$

600. Fie G un grup notat multiplicativ. Să se demonstreze că aplicația $f : G \to G$ de forma $f(x) = x^{-1}$ este un automorfism, atunci și numai atunci cînd G este comutativ.

601. a) Fie G mulțimea aplicațiilor $f : R \to R$ de forma

$$f(x) = ax + b \text{ cu } a \neq 0.$$

Să se arate că pe G compunerea definește o structură de grup.

b) Fie H mulțimea aplicațiilor $g : R \to R$ de forma $g(x) = x + m$. Să se arate că H înzestrată cu operația de compunere este un subgrup al lui G.

602. Să se arate că o lege de compoziție, notată multiplicativ, între elementele unei mulțimi G determină pe G o structură de grup dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

1) legea este peste tot definită,

2) legea este asociativă,

3) pentru orice $a \in G$, există un $a^{-1} \in G$ astfel încît $a^{-1}(a \cdot b) = (b \cdot a) \cdot a^{-1}$ oricare ar fi $b \in G$.

603. Se numește transformare geometrică a planului o aplicație bijectivă $f : R \times R \to R \times R$.

Transformările geometrice f de forma $f(x, y) = (x', y')$ unde $x' = x + a$ și $y' = y + b$ se numesc translații.

Transformările geometrice f de forma $f(x, y) = (x', y')$ unde $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ și $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$ se numesc rotații în jurul originii.

Transformările geometrice f de forma $f(x, y) = (x' y')$ unde $x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$, $y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$ și $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, se numesc transformări afine.

Transformările geometrice de forma $f(x, y) = (x', y')$ unde

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{b_{11}x + b_{12}y + b_{13}}, \quad y' = \frac{c_{11}x + c_{12}y + c_{13}}{b_{11}x + b_{12}y + b_{13}} \text{ și}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{11} & c_{12} \end{vmatrix} \neq 0$ se numesc transformări proiective.

Să se demonstreze că pe fiecare din mulțimile de transformări definite mai sus, compunerea determină o structură de grup. Obținem astfel: grupul translațiilor, grupul rotațiilor, grupul transformărilor afine, grupul transformărilor proiective (grupul proiectiv).

604. Să se arate că pe mulțimea aplicațiilor $f : C \to C$, de forma $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ cu $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, compunerea definește o structură de grup.

605. Se notează prin M mulțimea matricilor de forma $\begin{Vmatrix} m & n \\ n - 2p & m - 2p \end{Vmatrix}$ unde $m, n, p \in Z$.

a) Să se arate că înmulțirea este peste tot definită.

b) Să se determine forma cea mai generală a matricelor din M astfel ca M să fie grup față de înmulțirea matricelor.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se arate că grupul M se poate reprezenta sub forma $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$, unde M_i sînt disjuncte două cîte două.

606. Fie mulțimea matricelor de forma :

$$\begin{Vmatrix} m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp & 0 \\ q & m^3 + n^3 + p^3 - 3mnp \end{Vmatrix}$$

unde $m, n, p, q \in Z$.

a) Să se arate că înmulțirea este peste tot definită în M.

b) Să se determine cea mai mare submulțime $N \subset M$, care, față de înmulțire, are o stuctură de grup.

c) Să se arate că în situația de la punctul b), numerele m, n, p satisfac una din ecuațiile $x^3 \pm x^2 - mnp = 0$

607. Să se demonstreze că pe mulțimea Z a numerelor întregi următoarele legi de compoziție

$$x \oplus y = x + y - 4,$$
$$x \odot y = xy - 4x - 4y + 20,$$

determină o structură de inel, cu element unitate și fără divizori ai lui zero.

608. Pe mulțimea I a numerelor întregi impare se consideră legile de compoziție :

$$x \oplus y = x + y + 1,$$
$$x \odot y = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}.$$

Să se arate că aceste legi determină pe I o structură de inel comutativ cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

609. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel.

a) Să se arate că $(a_1 + a_2)(x_1 + x_2) = a_1x_1 + a_1x_2 + a_1x_1 + a_2x_2$,

b) Să se arate că

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_j\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

610. Să se verifice că într-un inel comutativ $(A, +, \cdot)$ cu element unitate, avem :

$x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ oricare ar fi $x \in A$;

$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ oricare ar fi $x \in A$.

611. Să se dea un exemplu de inel finit necomutativ.

612. Care sînt elementele inversabile ale inelului claselor de resturi modulo 10 ?

613. a) Să se arate că pe mulțimea numerelor întregi, Z, legile de compoziție $x \oplus y = x + y - 2$ și $x \odot y = xy - 2x - 2y + 6$ determină o structură de inel comutativ, cu element unitate și fără divizori ai lui 0.

b) Să se arate că între inelul $(Z, +, \cdot)$ și inelul $(Z, \oplus, \odot)$ există un izomorfism $f: Z \to Z$, de forma $f(x) = x + 2$.

614. a) Să se arate că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea $A = \{x + y\sqrt{3} \mid x \in Z,\ y \in Z\}$ o structură de inel.

b) Să se arate că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea M a matricelor pătrate de forma $\begin{Vmatrix} x & 3y \\ -y & x \end{Vmatrix}$ unde $x \in Z$, $y \in Z$ o structură de inel.

c) Să se arate că între inelul de la a) și inelul de la b) există un izomorfism de forma $x + y\sqrt{3} \to \begin{Vmatrix} x & -3y \\ -y & x \end{Vmatrix}$.

615. a) Să se demonstreze că legile de compoziție $x \oplus y = x + y - 7$, $x \odot y = xy - 7x - 7y + 56$ determină pe mulțimea Q a numerelor raționale o structură de corp.

b) Să se arate că între corpul $(Q, +, \cdot)$ și corpul $(Q, \oplus, \odot)$ există un izomorfism $f: Q \to Q$, de forma $f(x) = mx + n$.

616. a) Să se demonstreze că pe mulțimea $(0, +\infty)$ legile de compoziție $x \oplus y = xy$ și $x \odot y = x^{\ln \sqrt[3]{y}}$ determină o structură de corp comutativ.

b) Să se demonstreze că între corpul $(R, +, \cdot)$ și corpul de la punctul a) există un izomorfism $f: R \to (0, +\infty)$ de forma $f(x) = e^{mx} + n$.

Scanned with OKEN Scanner

617. a) Să se demonstreze că pe mulțimea $\{x + y\sqrt{2} \mid x \in Q, y \in Q\}$ adunarea și înmulțirea determină o structură de corp.

b) Să se demonstreze că pe mulțimea matricelor de forma $\begin{Vmatrix} x & 4y \\ \frac{1}{2}y & x \end{Vmatrix}$ unde $x \in Q$ și $y \in Q$ adunarea și înmulțirea determină o structură de corp.

c) Să se arate că între corpul de la punctul a) și corpul de la punctul b) există un izomorfism de forma $x + y\sqrt{2} \to$

$$\to \begin{Vmatrix} x & 4y \\ \frac{1}{2}y & x \end{Vmatrix}.$$

618. Fie A inelul claselor de resturi modulo n. Să se arate că mulțimea elementelor inversabile ale lui A formează un grup multiplicativ de ordinul $\varphi(n)$ unde $\varphi(n)$ reprezintă numărul numerelor naturale prime cu n și mai mici decît n, $n > 0$, (inclusiv 1). $\varphi(n)$ se mai numește indicatorul lui Euler.

Să se deducă de aici că dacă a este prim cu n, atunci $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ (teorema lui Euler).

619. Să se demonstreze că adunarea și înmulțirea determină pe mulțimea matricelor de forma

$$\begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{Vmatrix}$$

cu elemente numere reale, o structură de corp necomutativ (corpul cuaternionilor)

620. În corpul claselor de resturi modulo 5 să se calculeze :

$$\left(\frac{\hat{3}}{\hat{4}} + \frac{\hat{1}}{\hat{2}} + \hat{2}\right) \cdot \left(\frac{\hat{1}}{\hat{3}} + \frac{\hat{1}}{\hat{2}}\right).$$

621. Să se calculeze următorii determinanți avînd elemente în corpul claselor de resturi modulo 11 :

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{Vmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{5} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{7} \end{Vmatrix}; \quad \begin{Vmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{4} & \hat{5} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} & \hat{6} \end{Vmatrix}.$$

622. Să se precizeze rangul matricei, cu elemente în corpul claselor de resturi modulo 7:

$$\begin{Vmatrix} \hat{3} & \hat{4} & \hat{5} \\ \hat{2} & \hat{6} & \hat{4} \\ \hat{5} & \hat{3} & \hat{2} \end{Vmatrix}$$

623. Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații în corpul claselor de resturi modulo 11:

a) $$\begin{cases} \hat{3}x + \hat{4}y = \hat{5}, \\ \hat{7}x + \hat{3}y = \hat{8}; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x + \hat{2}y + \hat{3}z = \hat{4}, \\ \hat{4}x + \hat{5}y + z = \hat{7}, \\ \hat{5}x + \hat{7}y + \hat{7}z = \hat{10}. \end{cases}$$

624. În corpul claselor de resturi modulo 11 să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 + \hat{7}x + \hat{1} = 0;$

b) $x^2 + x + \hat{2} = 0.$

625. Să se afle un cît și restul împărțirii polinomului $A(x)$ la polinomul $B(x)$ în fiecare din cazurile specificate mai jos. Coeficienții acestor polinoame sînt în corpul claselor de resturi modulo 7.

a) $A(x) = x^5 + \hat{2}x^4 + \hat{3}x^2 + \hat{4}x + 5,$
$B(x) = \hat{2}x^3 + \hat{4}x^2 + \hat{3}x + \hat{2};$

b) $A(x) = x^6 + \hat{3}x^4 + \hat{4},$
$B(x) = x^2 + \hat{1}.$

Scanned with OKEN Scanner

V PROBABILITĂȚI

§1. Cîmp de evenimente

Noțiunea de *experiență* are, în cele ce urmează, sensul uzual, adică de consumare (producere voită sau nu) a unui fenomen, a unei situații concrete sau ipotetice în condiții oarecare ce permit urmărirea rezultatelor sale, rezultate care pot avea sau nu un caracter aleator (întîmplător). Se știe însă că teoria probabilităților cercetează numai experiențele care sînt susceptibile de rezultate aleatoare. Aceste rezultate sînt *probele* experienței, fiecărei experiențe putîndu-i-se atașa (pune în corespondență) *mulțimea probelor* sale.

Precizările acestea cu privire la noțiunile de : experiență, probă, mulțimea probelor unei experiențe neconstituind niște definiții, în cele ce urmează vom considera cele trei noțiuni ca termeni primari (adoptați din limbajul curent fără a-i defini), iar înțelegerea lor o vom ilustra prin exemple. De pildă

a) Dacă pe o suprafață orizontală bine lustruită se aruncă un zar, atunci aruncarea zarului este experiența, numărul de puncte de pe fața superioară este proba, iar mulțimea probelor este $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) Dacă pe o coală de hîrtie scriem un număr natural oarecare, atunci alegerea și scrierea numărului este experiența, numărul respectiv este proba, iar mulțimea probelor este $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Observații

1) Am preferat termenul mulțimea probelor celui de univers al posibilităților utilizat de alți autori, pe de o parte pentru faptul că universul posibilităților unei experiențe este o

Scanned with OKEN Scanner

mulțime, iar pe de altă parte, pentru a plasa cît mai intim acest capitol al cărții în ansamblul ei;

2) Cum din punctul nostru de vedere ne interesează probele unei experiențe, vom stabili o echivalență între o experiență E și mulțimea M a probelor sale;

3) Mulțimea probelor unei experiențe poate fi finită (experiența a)) sau infinită (experiența b)).

Cu ajutorul termenilor primari putem introduce acum termenii definiți care sînt:

— eveniment;

— eveniment elementar;

— eveniment realizat.

Fiind dată o experiență E și mulțimea M a probelor sale atunci:

1) numim *eveniment* o submulțime A a mulțimii M;

2) numim *eveniment elementar* o submulțime a lui M care conține un element și numai unul;

3) un eveniment A este realizat atunci cînd proba experienței (care este un element din M) face parte din A.

De pildă dacă luăm: E = aruncarea zarului; $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ atunci $A = \{1, 3, 5\}$ (apariția unui număr impar de puncte) este un eveniment; evenimentele: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ sînt evenimente elementare; evenimentul A este realizat de către probele 1, 3, 5 (concret aceasta corespunde faptului ca pe fața superioară a zarului să apară unu, trei sau cinci puncte).

Algebra evenimentelor

Fie o experiență E și în cadrul ei două evenimente oarecare A și B. Definim:

1) evenimentul $A \cup B$ (citit „A sau B“);

2) evenimentul $A \cap B$ (citit „A și B“);

3) evenimentul $C_M A$ sau $\bar{A}$ sau încă A' (contrariul evenimentului A sau „non A“).

Ținînd seama de modul cum am definit ce este un eveniment și ce înseamnă eveniment realizat vom observa că:

— evenimentul $A \cup B$ se realizează atunci cînd se realizează cel puțin unul din evenimentele A, B:

Scanned with OKEN Scanner

mulțime, iar pe de altă parte, pentru a plasa cît mai intim acest capitol al cărții în ansamblul ei;

2) Cum din punctul nostru de vedere ne interesează probele unei experiențe, vom stabili o echivalență între o experiență E și mulțimea M a probelor sale;

3) Mulțimea probelor unei experiențe poate fi finită (experiența a)) sau infinită (experiența b)).

Cu ajutorul termenilor primari putem introduce acum termenii definiți care sînt:

— eveniment;

— eveniment elementar;

— eveniment realizat.

Fiind dată o experiență E și mulțimea M a probelor sale atunci:

1) numim *eveniment* o submulțime A a mulțimii M;

2) numim *eveniment elementar* o submulțime a lui M care conține un element și numai unul;

3) un eveniment A este realizat atunci cînd proba experienței (care este un element din M) face parte din A.

De pildă dacă luăm: E = aruncarea zarului; $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ atunci $A = \{1, 3, 5\}$ (apariția unui număr impar de puncte) este un eveniment; evenimentele: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ sînt evenimente elementare; evenimentul A este realizat de către probele 1, 3, 5 (concret aceasta corespunde faptului ca pe fața superioară a zarului să apară unu, trei sau cinci puncte).

Algebra evenimentelor

Fie o experiență E și în cadrul ei două evenimente oarecare A și B. Definim:

1) evenimentul $A \cup B$ (citit „A sau B“);

2) evenimentul $A \cap B$ (citit „A și B“);

3) evenimentul $\mathbf{C}_M A$ sau A sau încă A' (contrariul evenimentului A sau „non A“).

Ținînd seama de modul cum am definit ce este un eveniment și ce înseamnă eveniment realizat vom observa că:

— evenimentul $A \cup B$ se realizează atunci cînd se realizează cel puțin unul din evenimentele A, B:

Scanned with OKEN Scanner

— evenimentul $A \cap B$ se realizează atunci cînd se realizează simultan evenimentele A, B;

— evenimentul $\bar{A}$ constă în nerealizarea evenimentului A.

Cele trei operații introduse în mulțimea evenimentelor unei experiențe nefiind altceva decît operațiile cu mulțimi: reuniune, intersecție, complementaritate vom introduce ca sistem de axiome axiomele algebrei Boole. În felul acesta mulțimea evenimentelor unei experiențe cu un număr finit de probe se poate organiza ca o algebră Boole în raport cu cele trei operații menționate.

Observații

1) Să considerăm experiența E și M mulțimea probelor sale. Cum M este o submulțime a sa este, prin urmare, un eveniment care este realizat de oricare probă a experienței. *El se numește evenimentul sigur.*

2) Evenimentul „non M“ (contrarul evenimentului sigur) fiind $\mathbf{C}_M M$ adică Φ reprezintă evenimentul pe care nu-l realizează nici o probă a experienței și *îl numim evenimentul imposibil.*

3) Dacă evenimentele A și B sînt astfel că $A \subset B$ spunem că *evenimentul A implică evenimentul B* (oricare probă care realizează A, realizează și B). Se vede că evenimentul imposibil implică orice alt eveniment al experienței, iar evenimentul sigur este implicat de oricare altul.

4) Dacă evenimentele A și B sînt astfel că $A \subset B$ și $B \subset A$ atunci spunem că cele două evenimente sînt egale și se notează $A = B$.

5) Dacă A și B sînt două evenimente din M, deoarece este valabilă relația de mulțimi $A - B = A \cap \mathbf{C}_M B$, rezultă că evenimentul „$A - B$“ va reprezenta evenimentul „A și $\bar{B}$“, adică evenimentul constînd din producerea simultană a evenimentului A și a contrarului evenimentului B.

6) Dacă evenimentul $A \cap B$ este egal cu evenimentul imposibil spunem că A și B sînt *evenimente incompatibile (disjuncte)*. Astfel de evenimente nu sînt realizate simultan de nici o probă a experienței. Evenimentele unei experiențe pot fi incompatibile două cîte două, j cîte j (j fiind un număr mai mic decît numărul de probe ale experienței) sau în tota-

Scanned with OKEN Scanner

litatea lor (nici o probă a experienței nu le poate realiza simultan).

Cu aceste precizări putem da următoarea

Definiție

Fiind dată o mulțime finită M și K mulțimea părților sale (inclusiv M și Φ), numim *cîmp finit de evenimente* cuplul (M, K).

Dacă mulțimea M este infinită atunci cîmpul de evenimente este tot un cuplu de forma (M, K) în care K este o algebră Boole de părți ale mulțimii M.

Exemple

1). *Dacă mulțimea probelor este* $M = \{1, 2, 3, 4\}$ *atunci* $K = \{\Phi; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{3, 4\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 2, 4\}; \{1, 3, 4\}; \{2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 4\}\}$;

— evenimentele $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$ sînt evenimente elementare;

— evenimentele $A = \{1, 2\}$ și $B = \{3, 4\}$ sînt două evenimente contrare, deoarece $\bar{A} = B$;

— evenimentele $\{4\}$, $\{2, 3\}$ sînt două evenimente incompatibile (nu există nici o probă a experienței care să le realizeze pe amîndouă simultan);

— evenimentele $\{2, 3\}$ $\{1, 2, 4\}$ sînt două evenimente compatibile (proba 2 le realizează pe amîndouă);

— evenimentul $\{1, 2\}$ implică evenimentul $\{1, 2, 4\}$, deoarece $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 4\}$.

2). *Fie mulțimea probelor* $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Să se scrie evenimentul*: $A =$ *numărul* x *verifică ecuația* $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Răspuns:

Deoarece ecuația dată are rădăcinile $x_1 = 3$; $x_2 = 4$ avem $A = \{3, 4\}$.

3). *Fie mulțimea probelor* $M = \{x | x \in Z, |x| \leqslant 3\}$. *Să se scrie evenimentele*:

$A =$ *numărul* x *verifică ecuația* $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$;

$B =$ *numărul* x *verifică ecuația* $x^2 - 3|x| + 2 = 0$.

Să se precizeze dacă cele două evenimente sînt compatibile sau incompatibile.

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns.

Ecuația $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ are rădăcinile $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$ deci $A = \{-1, 2, 3\}$, iar ecuația $x^2 - -3|x| + 2 = 0$ ne dă $|x| = 1$; $|x| = 2$ deci $B = \{-2, -1, 1, 2\}$. Deoarece $A \cap B = \{-1, 2\}$ cele două evenimente sînt compatibile.

4). *Fie mulțimea de probe* $M = \{x | x > 0,\ x = $ *divizor propriu al lui 12*$\}$. *Să se scrie următoarele evenimente:*

$A =$ *numărul* x *verifică ecuația* $C_{\frac{x}{2}}^{2} - x + 3 = 0$.

$B =$ *numărul* x *verifică ecuația* $2^{x^2} \cdot 64 = 32^x$.

Ce se poate spune despre cele două evenimente ?

Răspuns:

Din ecuația $C_{\frac{x}{2}}^{2} - x + 3 = 0$ avem $\frac{\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} - 1\right)}{2} - x + 3 = 0$ de unde ecuația $x^2 - 10x + 24 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = 4$; $x_2 = 6$ încît $A = \{4, 6\}$. Deoarece ecuația $2^{x^2} \cdot 64 = 32^x$ este echivalentă cu $2^{x^2} \cdot 2^6 = (2^5)^x$ rezultă că $x^2 - 5x + + 6 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = 2$; $x_2 = 3$ și deci $B = \{2, 3\}$. Mulțimea probelor fiind $M = \{2, 3, 4, 6\}$ avem $A = \mathbb{C}_M B$ și prin urmare evenimentele A și B sînt contrare.

5). *Se aruncă pe o masă un zar de două ori și se notează în ordinea aruncărilor numărul de puncte de pe fața superioară. Să se scrie mulțimea* M *a probelor, apoi să se scrie următoarele evenimente:*

$A =$ *numărul obținut la prima aruncare este egal cu cel obținut la a doua aruncare;*

$B =$ *numărul obținut la prima aruncare este mai mic decît cel obținut la a doua;*

$C =$ *suma numerelor rezultate la cele două aruncări este un număr prim;*

$D =$ *numărul obținut la prima aruncare este un divizor propriu al celui obținut la a doua.*

Să se indice în cadrul acestei experiențe:

a) două evenimente incompatibile; b) două evenimente compatibile; c) evenimentele $A \cap C$ *și* $B \cap C$; *d) două evenimente astfel că unul îl implică pe celălalt.*

Scanned with OKEN Scanner

Răspuns:

Mulțimea probelor experienței va fi produsul cartezian $I \times I$ unde $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Deci $M = \{(x, y) | x \in I, y \in I\}$.

— evenimentul A este $A = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$;

— evenimentul B va fi

$B = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 5); (4, 6); (5, 6)\}$;

— evenimentul C este

$C = \{(1, 1); (1, 2); (1, 4); (1, 6); (2, 1); (2, 3); (2, 5); (3, 2); (3, 4); (4, 1); (4, 3); (5, 2); (5, 6); (6, 1); 6, 5)\}$;

— evenimentul D este $D = \{(2, 4); (2, 6); (3, 6)\}$;

a) evenimentele A și D sînt incompatibile, deoarece $A \cap D = \Phi$;

b) evenimentele A și C, precum și evenimentele B și C sînt compatibile deoarece $A \cap C = \{(1, 1)\}$,

$B \cap C = \{(1, 2); (1, 4); (1, 6); (2, 3); (2, 5); (3, 4); (5, 6)\}$.

d) avem $D \subset B$.

§ 2. Cîmp finit de probabilitate

Definiție. Fiind dat un cîmp finit de evenimente (M, K) definim probabilitatea ca o funcție de mulțime definită pe K și cu valori în axa reală R, care satisface următoarele axiome:

A_1 — (axioma de existență și unicitate).

Fiecărui eveniment A din M îi corespunde un număr real pozitiv notat $P(A)$. Deci $P(A) \geqslant 0$ oricare ar fi $A \subseteq M$.

A_2 — (axioma de aditivitate).

Dacă un eveniment este reuniunea a două evenimente A și B incompatibile, atunci probabilitatea acestuia este egală cu suma probabilităților celor două evenimente. Deci

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ dacă } A \cap B = \Phi.$$

A_3 — (axioma unității de măsură).

Probabilitatea evenimentului sigur este egală cu 1. Deci

$$P(M) = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Consecințe

a) Deoarece $M \cup \Phi = M$ și $M \cap \Phi = \Phi$ rezultă că $P(M) = P(M \cup \Phi) = P(M) + P(\Phi)$ de unde

$$P(\Phi) = 0$$

adică *probabilitatea evenimentului imposibil este egală cu zero.*

b) Dacă $A \subseteq M$ atunci $A \cup A = M$ și $A \cap \bar{A} = \Phi$ deci $P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(M) = 1$ adică

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

și cum $P(A) \geqslant 0$ oricare ar fi evenimentul A rezultă că

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

deci *probabilitatea unui eveniment oarecare este un număr real din* $[0, 1]$.

c) Fie evenimentele A și B din M astfel ca $A \subseteq B$. Deoarece sînt valabile egalitățile $B = A \cup (B - A)$ și $A \cap (B - A) = \Phi$ rezultă că $P(B) = P(A) + P(B - A)$ adică

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

deci *probabilitatea este substractivă.*

d) Deoarece $P(B - A) \geqslant 0$ rezultă din consecința precedentă că *dacă* $A \subseteq B$ *atunci* $P(A) \leqslant P(B)$ *deci probabilitatea este monotonă.*

e) Fie A și B două evenimente oarecare din M. Deoarece avem relațiile $A \cup B = A \cup (B - A)$ și $A \cap (B - A) = \Phi$ rezultă că $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$ și cum pe de altă parte avem $B - A = B - (A \cap B)$ și $A \cap B \subseteq B$ urmează că $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ adică

Scanned with OKEN Scanner

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{(relația lui Boole).}$$

f) Să considerăm acum mulțimea M formată din evenimentele elementare egal probabile $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. (De pildă apariția diferitelor fețe la aruncarea cu zarul.)
Deci

$$M = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

și cum evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt incompatibile două cîte două (ele fiind elementare) avem

$$P(M) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = 1 \text{ sau } P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$$

iar evenimentele fiind egal probabile rezultă că

$$n \cdot P(A_1) = 1 \quad \text{de unde} \quad P(A_1) = \frac{1}{n}$$

și dacă un eveniment A este de forma $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ cu $k \leqslant n$ atunci

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = k \cdot \frac{1}{n} \text{ sau}$$

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

formulă care reprezintă tocmai definiția dată probabilității unui eveniment, ca raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și numărul de probe ale unei experiențe cu un număr finit de probe.

Observație

În cele de mai sus (consecința f)) am folosit noțiunea de evenimente egal probabile pe care nu am definit-o, ci am ilustrat-o prin exemplul menționat. Cum în realitate cele șase probe ale experienței nu sînt riguros egal probabile în sensul că nu există pentru fiecare din ele exact aceeași șansă de a se produce (nu există o distribuție perfect uniformă a masei zarului; dimensiunile sale nu sînt riguros

egale etc.) noțiunea folosită este teoretică, deci desprinsă, detașîndu-ne de faptul real și idealizînd condițiile experienței. De fapt, această problemă ține de raportul dintre modelul abstract al teoriei probabilităților și lumea reală, concretă, în cadrul căreia însăși noțiunea de probabilitate comportă mai multe interpretări (vezi cartea „Dialog despre calculul probabilităților" de Alfréd Rényi).

Definiție: Dîndu-se cîmpul finit de evenimente (M, K) și pe acesta o probabilitate P, atunci tripletul (M, K, P) se numește *cîmp finit de probabilitate.*

Exemple

1. *Se aruncă pe o masă un zar. Care este probabilitatea realizării evenimentului*

A = *numărul punctelor de pe fața superioară este un divizor al numărului 20 ?*

Soluție

Mulțimea probelor fiind $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avem $n = 6$; evenimentul este $A = \{1, 2, 4, 5\}$ deci numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului A este $k = 4$. Rezultă că $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

2. *Se consideră ecuația* $(m - 1)\, x^2 - 2(m + 3)\, x + 2m + 12 = 0$ *și se cere să se calculeze probabilitatea ca ea să aibă rădăcini reale dacă* m *ia o valoare arbitrară întreagă din intervalul* $[-10, 6]$.

Soluție

Deoarece $M = Z \cap [-10, 6]$ rezultă că

$$M = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

deci numărul de probe ale experienței este $n = 17$. Evenimentul

$$A = \text{ecuația are rădăcini reale}$$

se realizează dacă discriminantul este pozitiv deci

$\Delta = (m + 3)^2 - (m - 1) \cdot (2m + 12) = -m^2 - 4m + 21 \geqslant 0$ sau $m^2 + 4m - 21 \leqslant 0$ și cum trinomul din

membrul stîng al inegalității are rădăcinile $m_1 = -7$ $m_2 = 3$ inegalitatea este satisfăcută pentru $m \in [-7, 3]$. Dar $m \in Z \cap [-7, 3]$ încît $A = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ deci numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului A este $k = 11$ și prin urmare $P(A) = \frac{11}{17}$.

3. *O urnă conține 3 bile albe și 7 negre. Se extrage o bilă și fără a o pune înapoi în urnă extragem încă o bilă. Care este probabilitatea următoarelor evenimente:*

A = cele două bile sînt negre;

B = cele două bile sînt de aceeași culoare;

C = cel puțin una dintre cele două bile este albă ?

Soluție

Mulțimea probelor experienței fiind formată din toate grupele de cîte două bile ce se pot forma cu cele 10 existente în urnă, numărul de probe ale experienței va fi $n = C_{10}^2$. Să observăm că sînt cazuri favorabile realizării evenimentului A toate acelea cînd se extrag două bile dintre cele 7 bile negre existente în urnă, iar acestea sînt în număr de $k = C_7^2$. Deci

$$P(A) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{15}.$$

Evenimentul B se realizează în toate cazurile în care se realizează evenimentul A și în cazurile cînd cele două bile sînt ambele dintre cele 3 albe, care sînt C_3^2 la număr. Deci numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului B este $k = C_3^2 + C_7^2$ și prin urmare

$$P(B) = \frac{C_3^2 + C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{15}.$$

Evenimentul C este contrar evenimentului A așa încît

$$P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

4. *Se consideră ecuațiile*

$7C_{x+1}^{2} - 3A_{7}^{2} = 45$: $\log_9 x^2 - 1 = \log_{27} 125 - \log_3 |x + 2|$.

Se cere să se afle probabilitatea ca luînd un număr întreg x *cu* $|x| \leqslant 5$, *acesta să fie rădăcină a cel puțin uneia dintre cele două ecuații.*

Soluție

Mulțimea probelor fiind

$M = \{x | x \in Z,\ |x| \leqslant 5\} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

numărul de probe este 11. Fie evenimentele:

$A = x$ este rădăcină a ecuației $7C_{x+1}^{2} - 3A_{x}^{2} = 45$;

$B = x$ este rădăcină a ecuației $\log_9 x^2 - 1 = \log_{27} 125 - \log_3 |x + 2|$.

Rezolvînd prima ecuație avem

$\frac{7(x+1) \cdot x}{2} - 3x \cdot (x - 1) = 45$ de unde ecuația $x^2 + 13x - 90 = 0$ cu rădăcinile $x_1 = 5$; $x_2 = -18$. Cum $x \in N$, $x \geqslant 2$ avem $A = \{5\}$.

Ecuația a doua ne dă

$$\frac{2 \cdot \log_3 |x|}{\log_3 9} - 1 = \frac{\log_3 5^3}{\log_3 27} - \log_3 |x + 2|$$

sau $\log_3 |x(x + 2)| = \log_3 5 + 1 = \log_3 15$ deci $|x(x + 2)| = 15$ sau $x(x + 2) = \pm 15$ și numai ecuația $x^2 + 2x - 15 = 0$ are rădăcini reale acestea fiind $x_1 = -5$; $x_2 = 3$, deci $B = \{-5, 3\}$. Ne interesează să aflăm $P(A \cup B)$ și observînd că cele două evenimente sînt incompatibile, rezultă că

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{11} + \frac{2}{11} = \frac{3}{11}.$$

5. *Dîndu-se ecuațiile*

$$2x^5 - 15x^4 + 17x^3 + 57x^2 - 91x + 30 = 0$$
$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

se cere să se calculeze probabilitatea ca luînd pentru x o valoare întreagă astfel ca $|x-1| \leqslant 4$, aceasta să fie rădăcină a cel puțin uneia din ecuațiile date.

Soluție

Mulțimea probelor experienței este

$$M = \{x | x \in Z,\ |x-1| \leqslant 4\} = \{x | x \in Z,\ -4 \leqslant x-1 \leqslant 4\} = \{x | x \in Z,\ -3 \leqslant x \leqslant 5\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

adică $n = 9$ probe. Fie evenimentele:

$A = x$ verifică prima ecuație;

$B = x$ verifică ecuația a doua.

Rezolvînd prima ecuație obținem $x_1 = -2$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = 1$; $x_4 = 3$; $x_5 = 5$ deci $A = \{-2, 1, 3, 5\}$.

Rezolvînd ecuația a doua obținem $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 3$; $x_4 = 5$ deci $B = \{-2, -1, 3, 5\}$.

Ne interesează să aflăm $P(A \cup B)$ și cum cele două evenimente nu sînt incompatibile, deoarece $A \cap B = \{-2, 3, 5\}$ vom aplica relația lui Boole și deci

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5}{9}.$$

PROBABILITĂȚI

EXERCIȚII REZOLVATE

a) *Cîmp finit de evenimente*

626. *O experiență are mulțimea probelor* $M = \{a, b, c\}$. *Să se scrie mulțimea* K *a evenimentelor ce se pot realiza în cursul acestei experiențe. Există între ele evenimente diferite de cele elementare care să fie incompatibile ?*

Soluție

Avem $K = \{\Phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Intersecția a oricare două evenimente neelementare nefiind vidă, nu există astfel de evenimente care să fie incompatibile.

627. *Fie mulțimea de probe* $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Să se indice :*

— *evenimentele elementare ;*
— *două evenimente incompatibile ;*
— *două evenimente contrare ;*
— *două evenimente astfel că unul îl implică pe celălalt.*

Soluție

— evenimentele elementare sînt : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$;
— evenimentele $A = \{1, 2\}$ și $B = \{3, 5\}$, de pildă, sînt incompatibile, deoarece $A \cap B = \Phi$;
— evenimentele $C = \{1, 3\}$ și $D = \{2, 4, 5\}$ sînt două evenimente contrare fiindcă $C = \complement_M D = \overline{D}$. Evident, nu sînt singurele .
— dacă luăm de pildă $E = \{1, 4\}$ și $F = \{1, 2, 4, 5\}$ atunci $E \subset F$.

Scanned with OKEN Scanner

628. *O urnă conține 3 bile albe a, 4 bile negre n, 5 bile roșii r. Se extrage o bilă, apoi încă una și apoi încă una, de fiecare dată fără a pune în urnă bila extrasă. Se așază bilele una lîngă alta în ordinea extragerii (de pildă: r, a, n = roșie, albă, neagră).*

Să se scrie mulțimea probelor experienței, iar apoi să se scrie următoarele evenimente:

A_1 = *să se extragă trei bile roșii;*
A_2 = *să se extragă cel puțin o bilă albă;*
A_3 = *să nu se extragă nici o bilă neagră;*
A_4 = *să se extragă trei bile de culori diferite;*
A_5 = *să se extragă trei bile de aceeași culoare;*
A_6 = *să se extragă numai bile roșii sau negre.*

Să se indice apoi: a) — două evenimente compatibile; b) — două evenimente incompatibile; c) — două evenimente contrare; d) — ce se poate spune despre evenimentele A_1 *și* $A_3 \cap A_5$ *?*

Soluție

Mulțimea probelor experienței este

$$M = \{(a, a, a); (a, a, n); (a, a, r); (a, n, a); (a, n, n); (a, n, r); (a, r, a); (a, r, n); (a, r, r); (n, n, n); (n, n, a); (n, n, r); (n, a, n); (n, a, a); (n, a, r); (n, r, n); (n, r, a); (n, r, r); (r, r, r); (r, r, a); (r, r, n); (r, a, r); (r, a, a); (r, a, n); (r, n, r); (r, n, a); (r, n, n)\}$$

iar evenimentele cerute vor fi:

$$A_1 = \{(r, r, r)\};$$
$$A_2 = \{(a, a, a); (a, a, n); (a, a, r); (a, n, a); (a, n, n); (a, n, r); (a, r, a); (a, r, n); (a, r, r); (n, n, a); (n, a, n); (n, a, a); (n, a, r); (n, r, a); (r, r, a); (r, a, r); (r, a, a); (r, a, n); (r, n, a)\};$$
$$A_3 = \{(a, a, a); (a, a, r); (a, r, a); (a, r, r); (r, r, r); (r, r, a); (r, a, r); (r, a, a)\};$$
$$A_4 = \{(a, r, n); (a, n, r); (r, n, a); (r, a, n); (n, a, r); (n, r, a)\};$$
$$A_5 = \{(a, a, a); (r, r, r); (n, n, n)\};$$

Scanned with OKEN Scanner

$A_6 = \{(n, n, n); (n, n, r); (n, r, n); (n, r, r); (r, r, r); (r, r, n); (r, n, r); (r, n, n)\}$.

Deoarece $A_3 \cap A_5 = \{(a, a, a); (r, r, r)\}$, A_3 și A_5 sînt compatibile, în timp ce A_4 și A_5 sînt incompatibile, deoarece $A_4 \cap A_5 = \Phi$. $A_2 = \complement_M A_6$ deci A_2 și A_6 sînt evenimente contrare. Avem $A_1 = A_3 \cap A_5$.

629. *Se ia la întîmplare un număr x din mulțimea $M = \{x \mid x \in Z, |x| \leqslant 7\}$. Să se scrie evenimentele:*

$A = x$ verifică ecuația $x^2 - x - 42 = 0$;
$B = x$ verifică ecuația $x^2 - 5|x| + 4 = 0$;
$C = x$ verifică ecuația $x^2 - |x| - 6 = 0$.

Soluție

Ecuația $x^2 - x - 42 = 0$ avînd rădăcinile $x_1 = -6$; $x_2 = 7$ rezultă că $A = \{-6, 7\}$.

Din ecuația $x^2 - 5|x| + 4 = 0$ obținem $|x| = 1$; $|x| = 4$ deci $x = \pm 1$; $x = \pm 4$ încît $B = \{-4, -1, 1, 4\}$.

Ecuația $x^2 - |x| - 6 = 0$ ne dă $|x| = -2$; $|x| = 3$ și cum are sens numai $|x| = 3$ rezultă că $C = \{-3, 3\}$.

Observînd că $M = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ se vede că A, B, C sînt evenimente din M.

630. *Fie un număr x din mulțimea $M = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. Să se scrie următoarele evenimente:*

A = numărul este par;
B = numărul este divizibil prin 3;
C = numărul este multiplu de 4.

Sînt evenimentele A, B, C compatibile sau incompatibile? Există între cele trei evenimente unul care să-l implice pe altul?

Soluție

Evenimentele A, B, C sînt $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; $B = \{3, 6, 9\}$; $C = \{4, 8\}$. Deoarece $A \cap B \cap C = \Phi$ evenimentele A, B, C sînt incompatibile în totalitatea lor; $A \cap B = \{6\}$ deci A și B sînt compatibile; $A \cap C = \{4, 8\}$

Scanned with OKEN Scanner

deci A și C sînt compatibile; $B \cap C = \Phi$ deci B și C sînt incompatibile. Se vede că $C \subset A$.

631. *Se consideră mulțimea* $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. *Să se arate că mulțimile:*

$$A = \{x \mid x \in Z, \ |x - 5| \leqslant 3\}; \ B = \{x \mid x \in Z, \ |2x - 7| \leqslant 5\}$$

sînt evenimente din M. *Să se scrie apoi evenimentele:* $A \cup B$; $A \cap B$; $\overline{A}$; $\overline{B}$; $A - B$; $B - A$.

Soluție

Se vede că

$$A = \{x \mid x \in Z, \ -3 \leqslant x - 5 \leqslant 3\} = \{x \mid x \in Z, \ 2 \leqslant x \leqslant 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \subset M.$$

De asemenea,

$$B = \{x \mid x \in Z, \ -5 \leqslant 2x - 7 \leqslant 5\} = \{x \mid x \in Z, \ 2 \leqslant 2x \leqslant 12\} = \{x \mid x \in Z, \ 1 \leqslant x \leqslant 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \subset M,$$

iar evenimentele cerute vor fi:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; \ A \cap B = \{2, 3, 4, 5, 6\}; \ \overline{A} = \{1, 9, 10\};$$

$$\overline{B} = \{7, 8, 9, 10\}; \ A - B = \{7, 8\}; \ B - A = \{1\}.$$

632. *Fie mulțimea* $M = \left\{x \mid x \in Z, \ \frac{4x + 11}{2x - 5} \in Z\right\}$.

Să se scrie evenimentele:

$$A = \{x \mid x \in M, \ |2x - 9| \leqslant 7\} \text{ și } B = \{x \mid x \in M, \ |11 - x| \geqslant 10\}.$$

Să se precizeze apoi dacă cele două evenimente sînt compatibile sau incompatibile.

Soluție

Pentru a găsi elementele mulțimii M să observăm mai întîi că $\frac{4x + 11}{2x - 5} = 2 + \frac{21}{2x - 5}$ și prin urmare $\frac{4x + 11}{2x - 5} \in Z$

dacă și numai dacă $\frac{21}{2x-5} \in Z$ deci $2x-5$ este un divizor al numărului 21, adică $2x-5 \in \{-21, -7, -3, -1, 1, 3, 7, 21\}$ sau $2x \in \{-16, -2, 2, 4, 6, 8, 12, 26\}$ și

$$x \in \{-8, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 13\}.$$

Deci

$$M = \{-8, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 13\}.$$

Observăm că

$$A = \{x \mid x \in M, \ |2x-9| \leqslant 7\} = \{x \mid x \in M, \ -7 \leqslant 2x-9 \leqslant 7\} = \{x \mid x \in M, 2 \leqslant 2x \leqslant 16\} = \{x \mid x \in M, 1 \leqslant x \leqslant 8\}$$ deci $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

De asemenea,

$$B = \{x \mid x \in M, \ |11-x| \geqslant 10\} = \{x \mid x \in M, \ |x-11| \geqslant 10\} = \{x \mid x \in M, \ x-11 \leqslant -10 \text{ sau } x-11 \geqslant 10\} = \{x \mid x \in M, \ x \leqslant 1 \text{ sau } x \geqslant 21\}$$

deci

$$B = \{-8, -1, 1\}.$$

Cele două evenimente sînt compatibile, deoarece $A \cap B = \{1\}$.

633. *Se ia la întîmplare un număr x din mulțimea*

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Să se scrie evenimentul

$A =$ *x satisface inegalitatea* $\frac{2x^2-5x+17}{x^2+1} \geqslant 2$.

Să se scrie apoi evenimentul $\overline{A}$.

Soluție

Numitorul inecuației date fiind pozitiv poate fi eliminat, deci $2x^2 - 5x + 17 \geqslant 2x^2 + 2$ de unde $-5x \geqslant -15$ și $x \leqslant 3$. Deci $A = \{1, 2, 3\}$ și prin urmare $\overline{A} = \{4, 5, 6, 7\}$.

634. *Fie mulțimea*

$M = \{x \mid x$ *este un divizor pozitiv al numărului 60*$\}$.

Să se scrie evenimentul

$A =$ *expresia* $\sqrt[x!]{\frac{2x^2 + x - 21}{5 - 4x - x^2}}$ *dă un număr real dacă se înlocuiește* x *cu o valoare oarecare din* M.

Soluție

Avem $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Deoarece indicele radicalului nu poate fi decît un număr natural mai mare ca 1, numărul $x!$ va fi totdeauna un număr par. Pentru acest motiv expresia de sub radical trebuie să fie pozitivă sau egală cu zero. Trinomul $2x^2 + x - 21$ avînd rădăcinile $x_1 = 3$ și $x_2 = -\frac{7}{2}$, iar trinomul $5 - 4x - x^2$ avînd rădăcinile $x_1 = -5$ și $x_2 = 1$ semnul expresiei $y(x)$ de sub radical va fi cel care rezultă din tabelul de mai jos:

x	-5			$-\frac{7}{2}$			1			3		
$2x^2 + x - 21$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$5 - 4x - x^2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$y(x)$	$-$	$\mid$	$+$	0	$-$	$\mid$	$+$	0	$-$			

deci $x \in \left(-5, -\frac{7}{2}\right] \cup (1, 3]$ și cum $x \in N$, $x > 1$ rezultă că $A = \{2, 3\}$.

635. *Luîndu-se la întîmplare un număr* x *din mulțimea primelor 100 de numere naturale să se scrie evenimentul*

$A =$ *numărul rezultat înlocuindu-l pe* x *în expresia*

$$\frac{x(5 - x)}{\sqrt{x^2 - x - 6}}$$ este un număr real.

Soluție

Deoarece $x(5-x) \geqslant 2$ adică $x^2 - 5x + 2 \leqslant 0$, iar trinomul $x^2 - 5x + 2$ are rădăcinile $x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$; $x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$, el va fi negativ pentru

$$x \in \left[\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right]$$

și cum $x \in N$ rezultă că $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Cum însă pentru oricare din aceste numere produsul $x(5-x)$ este un număr par vom pune și condiția $x^2 - x - 6 \geqslant 0$. Trinomul din membrul stîng al acestei inecuații avînd rădăcinile $x_1 = -2$; $x_2 = 3$ va fi pozitiv sau egal cu zero pentru

$$x \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty).$$

Ținînd seama de ambele condiții, aceasta înseamnă că $x \in \{3, 4\}$ și prin urmare $A = \{3, 4\}$.

636. *Fie mulțimea M formată din numere $x \in Z$ cu $|x| \leqslant 5$. Să se arate că mulțimile:*

$$A = \{x \mid x \in Z,\ |x^2 - 3x - 7| \leqslant 3\};$$

$$B = \{x \mid x \in Z,\ x^2 - 3x - 3|2x - 3| + 11 = 0\}$$

sînt două evenimente egale din M.

Soluție

Avem $M = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, iar pentru a găsi elementele mulțimii A să facem observația că inegalitatea $|x^2 - 3x - 7| \leqslant 3$ este echivalentă cu dubla inegalitate $-3 \leqslant x^2 - 3x - 7 \leqslant 3$ din care rezultă sistemul de inecuații

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 7 \geqslant -3 \\ x^2 - 3x - 7 \leqslant 3 \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geqslant 0 \\ x^2 - 3x - 10 \leqslant 0. \end{cases}$$

Trinomul $x^2 - 3x - 4$ are rădăcinile $x_1 = -1$, $x_2 = 4$ și este pozitiv sau egal cu zero pentru $x \in (-\infty, -1] \cup [4, \infty)$, iar trinomul $x^2 - 3x - 10$ are rădăcinile $x_1 = -2$,

$x_2 = 5$ și este negativ sau egal cu zero pentru $x \in [-2, 5]$. Sistemul celor două inecuații fiind satisfăcut de valorile x situate în intersecția mulțimilor rezultate mai sus vom avea $x \in [-2, -1] \cup [4, 5]$ și cum $x \in Z$ rezultă că $A = \{-2, -1, 4, 5\} \subset M$.

Elementele mulțimii B le deducem observînd că din ecuația $x^2 - 3x - 3|2x - 3| + 11 = 0$ rezultă prin înmulțire cu 4, $4x^2 - 12x - 12|2x - 3| + 44 = 0$ sau $(2x - 3)^2 - 12|2x - 3| + 35 = 0$, ecuație de gradul II în $|2x - 3|$ avînd rădăcinile 5 și 7 deci $|2x - 3| \in \{5, 7\}$ adică $2x - 3 \in \{-7, -5, 5, 7\}$ de unde $2x \in \{-4, -2, 8, 10\}$ sau $x \in \{-2, -1, 4, 5\}$.

Prin urmare $B = \{-2, -1, 4, 5\} = A$.

637. *Se consideră mulțimea de numere* $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *și următoarele mulțimi:*

$$A = \left\{p \mid p = \left[\frac{2x^2 + 5}{5x - 1}\right],\ x \in M\right\}$$

$$B = \left\{q \mid q = \left[\frac{x^3 + 1}{2x - 1}\right],\ x \in M\right\}$$

unde prin $[x]$ *am notat „partea întreagă a numărului* x*“. Să se spună dacă* A, B *sînt evenimente din* M.

Soluție

Să vedem ce elemente sînt conținute în mulțimile A, B. Ele rezultă din tabelele următoare

x	1	2	3	4	5	6	7
p	1	1	1	1	2	2	3
q	2	3	5	9	14	19	26

de unde se vede că $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{2, 3, 5, 9, 14, 19, 26\}$. Deoarece $A \subset M$, A este un eveniment din M, în timp ce mulțimea B conținînd elemente care nu fac parte din M rezultă că $B \not\subset M$ și prin urmare B nu este un eveniment din M.

Scanned with OKEN Scanner

638. *Se ia un număr din mulțimea* $M = \{x \mid x \in Z, |x| \leqslant 5\}$. *Să se arate că următoarele mulțimi sînt evenimente din* M *și apoi să se precizeze dacă ele sînt compatibile sau incompatibile.*

$$A = \left\{x \mid x \in Z, \frac{x+1}{x-2} \in Z\right\}; B = \left\{x \mid x \in Z, \frac{2x-1}{3-2x} \in Z\right\}.$$

Soluție.

Avem $M = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, iar elementele mulțimii A le găsim pornind de la observația că $\frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$ deci $\frac{x+1}{x-2} \in Z$ dacă și numai dacă $\frac{3}{x-2} \in Z$. Aceasta înseamnă că $x-2$ este un divizor al lui 3 deci $x-2 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ adică $x \in \{-1, 1, 3, 5\}$. Prin urmare $A = \{-1, 1, 3, 5\} \subset M$.

În mod analog $\frac{2x-1}{3-2x} = -1 - \frac{2}{2x-3}$, iar condiția $\frac{2x-1}{3-2x} \in Z$ implică $\frac{2}{2x-3} \in Z$ deci $2x-3$ este un divizor al lui 2 și prin urmare $2x-3 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ adică $2x \in \{1, 2, 4, 5\}$. Rezultă că $x \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, \frac{5}{2}\right\}$, dar cum $x \in Z$ vom avea $B = \{1, 2\} \subset M$. Deoarece $A \cap B = \{1\} \neq \Phi$ cele două evenimente sînt compatibile.

639. *Fie* x *un număr arbitrar din mulțimea* $M = Z \cap [-4, 3]$ *și considerăm evenimentul*

$A =$ *numărul* x *verifică ecuația* $2\sqrt{1-x} + \sqrt{x-3} = 7$. *Ce se poate spune despre evenimentul* A *?*

Soluție

Radicalii fiind de indici pari vom pune condiția $1 - x \geqslant 0$ adică $x \leqslant 1$, precum și condiția $x - 3 \geqslant 0$ adică $x \geqslant 3$. Cum nu există numere x care să satisfacă simultan cele două condiții rezultă că A este eveniment imposibil.

Scanned with OKEN Scanner

640. *Fie x un unghi din mulțimea*

$$M = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, 2\frac{\pi}{3}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{6}, 2\pi\right\}.$$

Să se scrie evenimentul

A = x verifică ecuația $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

Soluție

Ecuația dată se mai poate scrie sub forma

$$\sin^2 x\,(1 - \sin x) + \cos^2 x\,(1 - \cos x) = 0$$

și cum $\sin^2 x(1 - \sin x) \geqslant 0$ și $\cos^2 x(1 - \cos x) \geqslant 0$ suma din membrul stîng nu poate fi nulă decît dacă ambii săi termeni sînt nuli. Aceasta înseamnă că trebuie să avem

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad \text{cu soluția } x \in \{0, 2\pi\}$$

sau

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \quad \text{cu soluția } x = \frac{\pi}{2}.$$

Prin urmare $A = \left\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$.

641. *Dacă se consideră x un unghi din mulțimea*

$$M = \left\{x \mid x = k\frac{\pi}{12},\ k = 1, 2, \ldots, 8\right\}$$

se cere să se scrie evenimentul

A = x verifică ecuația $\cos x - \sin x + 2 = 2\cos^2 x + \sin 2x$.

Soluție

Mai întîi să observăm că mulțimea probelor este

$$M = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, 7\frac{\pi}{12}, 2\frac{\pi}{3}\right\},$$

iar ecuația dată se transformă după cum urmează

$\cos x - \sin x + 2(1 - \cos^2 x) - \sin 2x = 0$ sau

$\cos x - \sin x + 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0$ de unde

$(\cos x - \sin x) + 2 \sin x(\sin x - \cos x) = 0$ și
$(\cos x - \sin x)(1 - 2 \sin x) = 0$, ceea ce implică
$\cos x - \sin x = 0$ sau $1 - 2 \sin x = 0$.

Prima dintre cele două ecuații ne dă $\operatorname{tg} x = 1$ cu soluția $x = \frac{\pi}{4}$, iar a doua, $\sin x = \frac{1}{2}$ cu $x = \frac{\pi}{6}$. (Evident, au fost reținute numai soluțiile care se găsesc în mulțimea M.) Prin urmare

$$A = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right\}.$$

642. *Se consideră mulțimea de unghiuri* $M = \left\{x \mid x = k\frac{\pi}{3}, k = 1, 2, \ldots, 7\right\}$ *și se cere să se studieze evenimentul*

$A = x$ *verifică ecuația* $\sin x = x^2 - x + 5$.

Soluție

Trinomul $x^2 - x + 5$ are minimul egal cu $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{19}{4}$ și prin urmare oricare ar fi x avem $\sin x = x^2 - x + 5 \geqslant \frac{19}{4} > 4$. Cum $|\sin x| \leqslant 1$ rezultă că $A = \Phi =$ evenimentul imposibil.

643. *Se consideră mulțimea de probe*

$$M = \{x \mid x = n!,\ n \in N,\ 2 \leqslant n \leqslant 100\}$$

și fie următoarele evenimente:

$A = x$ *este un număr terminat cu cel puțin un zero:*
$B = x$ *este un număr divizibil prin 7;*
$C = x$ *este un număr par;*
$D = x$ *este un număr impar.*

Ce se poate spune despre evenimentul C? *Dar despre evenimentul* D? *Dar despre evenimentul* A *și* B?

Soluție

Pentru orice $n \in N$, $2 \leqslant n \leqslant 100$ numărul $n!$ este un număr par deci C este evenimentul sigur, iar D este evenimentul imposibil.

Scanned with OKEN Scanner

Orice număr $x = n!$ cu $n \geqslant 5$ se termină cu cel puțin un zero, iar x este divizibil prin 7 dacă $n \geqslant 7$. Deci $B \subset A$.

644. *Fie o mulțime M alcătuită din 20 de funcții definite pe R și cu valori în R. Dacă se ia o funcție oarecare din M considerăm următoarele evenimente:*

A = *funcția este continuă;*
B = *funcția este derivabilă.*

Ce se poate spune despre cele două evenimente în cazul în care ele nu sînt egale cu evenimentul imposibil?

Soluție

Deoarece o funcție derivabilă este continuă rezultă că $B \subset A$.

645. *Se dă polinomul*

$$P(X) = 6x^7 - 35x^6 + 149x^5 - 352x^4 - 60x^3 + 681x^2 + 97x - 102$$

și fie un număr din mulțimea $M = \{x \mid x \in R,\ P(X) = 0\}$. *Să se scrie următoarele evenimente:*

A = x *este un număr întreg;*
B = x *este un număr pozitiv;*
C = x *este un număr par.*

Ce relații există între cele trei evenimente? Dar între C și $A \cap B$?

Soluție

Rezolvînd ecuația $P(x) = 0$ se obțin următoarele rădăcini:

$$x_1 = -1;\ x_2 = -\frac{1}{2};\ x_3 = \frac{1}{3};\ x_4 = 2;\ x_5 = 3;\ x_{6,7} = 1 \pm 4i$$

și prin urmare $M = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, 3\right\}$.

Evenimentele cerute vor fi: $A = \{-1, 2, 3\}$; $B = \left\{\frac{1}{3}, 2, 3\right\}$; $C = \{2\}$ și se vede că: A și B sînt compatibile; $C \subset A$; $C \subset B$; $C \subset A \cap B$.

646. *Fie mulțimea* $M = \{(x, y) \mid x \in Z,\ y \in Z, |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 2\}$. *Să se scrie evenimentul*

$A =$ *perechea* (x, y) *de numere întregi verifică ecuația*

$$(xy - 1) \cdot (x - y + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}.$$

Soluție

Ecuația dată se mai scrie sub forma

$$(xy - 1) \cdot (x - y) + (xy - 1) \cdot \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$$

de unde, ținînd seamă că x și y sînt numere întregi, rezultă sistemul

$$\begin{cases} (xy - 1)(x - y) = 1 \\ xy - 1 = 1 \end{cases} \text{ echivalent cu } \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$$

care are soluțiile $x_1 = -1$; $y_1 = -2$ și $x_2 = 2$; $y_2 = 1$ deci evenimentul A, care de data aceasta este format din perechi de numere, va fi

$$A = \{(-1, -2); (2, 1)\}.$$

647. *Se consideră mulțimea* $X = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, ..., ..., \pm 100\}$ *și se ia la întîmplare o pereche* (x, y) *de numere din produsul cartezian* $X \times X$. *Să se scrie evenimentul*

$A =$ *perechea* (x, y) *verifică ecuația* $34x^2 + 26xy + 5y^2 = 169$.

Soluție.

Ecuația dată se mai poate scrie sub forma

$$(5x + 2y)^2 + (3x + y)^2 = 169$$

de unde, ținînd seama că cei doi termeni din membrul stîng sînt numere întregi pozitive, rezultă următoarele sisteme de ecuații:

$$\begin{cases} 5x + 2y = \pm 5 \\ 3x + y = \pm 12 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = \pm 12 \\ 3x + y = \pm 5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5x + 2y = \pm 13 \\ 3x + y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ 3x + y = \pm 13, \end{cases}$$

din care rezultă următoarele sisteme de soluții:

$\begin{cases} x_1 = 19 \\ y_1 = -45 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -19 \\ y_2 = 45 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = -29 \\ y_3 = 75 \end{cases}$

$\begin{cases} x_4 = 29 \\ y_4 = -75 \end{cases}$ $\begin{cases} x_5 = -2 \\ y_5 = 11 \end{cases}$; $\begin{cases} x_6 = 2 \\ y_6 = -11 \end{cases}$;

$\begin{cases} x_7 = -22 \\ y_7 = 61 \end{cases}$ $\begin{cases} x_8 = 22 \\ y_8 = -61 \end{cases}$; $\begin{cases} x_9 = 26 \\ y_9 = -65 \end{cases}$

$\begin{cases} x_{10} = -26 \\ y_{10} = 65 \end{cases}$ $\begin{cases} x_{11} = -13 \\ y_{11} = 39 \end{cases}$ $\begin{cases} x_{12} = 13 \\ y_{12} = -39 \end{cases}$

adică

$A = \{(19, -45); (-19, 45); (-29, 75); (29, -75); (-2, 11); (2, -11); (-22, 61); (22, -61); (26, -65); (-26, 65); (-13, 39); (13, -39)\}$.

648. *Fie mulțimea* $M = \{(x, y) \mid x \in Z, y \in Z, |x| \leqslant 30, |y| \leqslant 30\}$ *și se consideră următoarele evenimente:*

$A =$ *perechea de numere întregi* (x, y) *verifică ecuația* $x + y - xy = 28$;

$B =$ *perechea de numere întregi* (x, y) *verifică ecuația* $2x - 6y + 3xy = 14$.

Să se arate că evenimentele A *și* B *sînt incompatibile.*

Soluție

Din ecuația $x + y - xy = 28$ obținem $x = \frac{y - 28}{y - 1}$ sau $x = 1 - \frac{27}{y - 1}$. Deoarece $x \in Z$ trebuie ca $\frac{27}{y-1} \in Z$ adică $y - 1$ trebuie să dividă 27 și prin urmare

$y - 1 \in \{-27, -9, -3, -1, 1, 3, 9, 27\}$ sau $y \in \{-26, -8, -2, 0, 2, 4, 10, 28\}$

și calculînd pentru fiecare valoare a lui y valoarea corespunzătoare a lui x, obținem $x \in \{2, 4, 10, 28, -26, -8, -2, 0\}$. Prin urmare

$A = \{(2, -26); (4, -8); (10, -2); (28, 0); (-26, 2); (-8, 4); (-2, 10); (0, 28)\}$.

În mod analog, din ecuația $2x - 6y + 3xy = 14$ rezultă $x = \frac{6y + 14}{3y + 2}$ sau $x = 2 + \frac{10}{3y + 2}$ și cum $x \in Z$ rezultă con-

diția $\frac{10}{3y+2} \in Z$ adică $3y+2$ divide 10. Aceasta înseamnă că $3y+2 \in \{-10, -5, -2, -1, 1, 2, 5, 10\}$ sau $3y \in \{-12, -7, -4, -3, -1, 0, 3, 8\}$ încît $y \in \left\{-4, -\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}, -1, -\frac{1}{3}, 0, 1, \frac{8}{3}\right\}$ și cum $y \in Z$ vom avea $y \in \{-4, -1, 0, 1\}$; calculînd valorile corespunzătoare pentru x rezultă $x \in \{1, -8, 7, 4\}$. Evenimentul B va fi

$$B = \{(1, -4); (-8, -1); (7, 0); (4, 1)\}.$$

Deoarece $A \cap B = \Phi$ rezultă că evenimentele A și B sînt incompatibile.

649. *Se ia la întîmplare un număr n dintre primele 20 de numere naturale și se cere să se arate că următoarele evenimente sînt egale:*

A = numărul n face ca numerele n, $n+2$, $n+6$, $n+8$, $n+12$, $n+14$ să fie simultan prime;

B = numărul n verifică ecuația $\left[\frac{2n+1}{n-1}\right] + 3n = 17$

unde, ca de obicei, prin $[p]$ s-a notat partea întreagă a numărului p.

Soluție

Pentru a găsi elementele evenimentului A să facem mai întîi observația că numerele date se mai pot scrie sub forma

$$n+0,\ (n+5)+1,\ n+2,\ (n+10)+2,\ (n+5)+3,\ (n+10)+4$$

de unde se vede că pentru $n > 5$ aceste numere nu pot fi simultan prime. Rezultă că $n \leqslant 5$ și obținem următoarele mulțimi de numere:

pentru $n=1$	1,	3,	7,	9,	13,	15
pentru $n=2$	2,	4,	8,	10,	14,	16
pentru $n=3$	3,	5,	9,	11,	15,	17
pentru $n=4$	4,	6,	10,	12,	16,	18
pentru $n=5$	5,	7,	11,	13,	17,	19

Scanned with OKEN Scanner

dintre care ultima mulțime satisface condiția pusă (toate numerele ei sînt prime).

Așadar $A = \{5\}$.

Pentru a afla evenimentul B să observăm că ecuația dată se mai poate scrie sub forma

$$\left[2 + \frac{3}{n-1}\right] + 3n = 17$$

din care deducem că dacă $n - 1 > 3$ adică $n > 4$ atunci ea devine $2 + 3n = 17$. Această ecuație are rădăcina $n = 5$ care satisface și condiția $n > 4$.

Deoarece $n \neq 1$ rămîne să cercetăm cazurile cînd $n \in \{2, 3, 4\}$, dar se constată că pentru nici una din valorile respective, n nu satisface ecuația dată.

Rezultă că $B = \{5\}$ și deci $A = B$.

650. *Se consideră mulțimea* $M = \{-3, -2, -1, 1, 2\} \times \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ *și se ia la întîmplare o pereche de numere* (x, y) *din această mulțime. Să se scrie evenimentul* $A =$ *perechea de numere întregi* (x, y) *verifică ecuația*

$$|2x - 3y| + 3|x + 2y| = 13.$$

Soluție

Membrul stîng al ecuației date fiind o sumă de două numere întregi pozitive, oricare ar fi perechea (x, y) din mulțimea M, egalitatea este satisfăcută în cazurile

$$\begin{cases} |2x - 3y| = 1 \\ |x + 2y| = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} |2x - 3y| = 4 \\ |x + 2y| = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} |2x - 3y| = 7 \\ |x + 2y| = 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} |2x - 3y| = 10 \\ |x + 2y| = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} |2x - 3y| = 13 \\ |x + 2y| = 0 \end{cases}$$

din care rezultă sistemele de ecuații

$$\begin{cases} 2x - 3y = \pm 1 \\ x + 2y = \pm 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 3y = \pm 4 \\ x + 2y = \pm 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 3y = \pm 7 \\ x + 2y = \pm 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = \pm 10 \\ x + 2y = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = \pm 13 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

iar dintre acestea au soluții întregi numai sistemele

Scanned with OKEN Scanner

dintre care ultima mulțime satisface condiția pusă (toate numerele ei sînt prime).

Așadar $A = \{5\}$.

Pentru a afla evenimentul B să observăm că ecuația dată se mai poate scrie sub forma

$$\left[2 + \frac{3}{n-1}\right] + 3n = 17$$

din care deducem că dacă $n - 1 > 3$ adică $n > 4$ atunci ea devine $2 + 3n = 17$. Această ecuație are rădăcina $n = 5$ care satisface și condiția $n > 4$.

Deoarece $n \neq 1$ rămîne să cercetăm cazurile cînd $n \in \{2, 3, 4\}$, dar se constată că pentru nici una din valorile respective, n nu satisface ecuația dată.

Rezultă că $B = \{5\}$ și deci $A = B$.

650. *Se consideră mulțimea* $M = \{-3, -2, -1, 1, 2\} \times \{-2, -1, 1, 2, 3\}$ *și se ia la întîmplare o pereche de numere* (x, y) *din această mulțime. Să se scrie evenimentul* $A =$ *perechea de numere întregi* (x, y) *verifică ecuația*

$$|2x - 3y| + 3|x + 2y| = 13.$$

Soluție

Membrul stîng al ecuației date fiind o sumă de două numere întregi pozitive, oricare ar fi perechea (x, y) din mulțimea M, egalitatea este satisfăcută în cazurile

$$\begin{cases} |2x - 3y| = 1 \\ |x + 2y| = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} |2x - 3y| = 4 \\ |x + 2y| = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} |2x - 3y| = 7 \\ |x + 2y| = 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} |2x - 3y| = 10 \\ |x + 2y| = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} |2x - 3y| = 13 \\ |x + 2y| = 0 \end{cases}$$

din care rezultă sistemele de ecuații

$$\begin{cases} 2x - 3y = \pm 1 \\ x + 2y = \pm 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 3y = \pm 4 \\ x + 2y = \pm 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - 3y = \pm 7 \\ x + 2y = \pm 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = \pm 10 \\ x + 2y = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = \pm 13 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

iar dintre acestea au soluții întregi numai sistemele

Scanned with OKEN Scanner

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}$$

și anume $(x_1 = 2;\ y_1 = 1)$, $(x_2 = -2;\ y_2 = -1)$. Așadar

$$A = \{(2, 1); (-2, -1)\}.$$

651. *Fie mulțimea M formată din triplete de forma (x, y, z) unde x, y, z sînt numere naturale mai mici decît 10. Se cere să se scrie evenimentul*

A = tripletul (x, y, z) verifică sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 8 \\ 3x - 2y + 5z = 10. \end{cases}$$

Soluție

Rezolvînd sistemul de ecuații, considerînd pe z ca necunoscută secundară, rezultă

$$x = \frac{46 - 7z}{13} \qquad y = \frac{22z + 4}{13}.$$

Punînd condițiile $x > 0$; $y > 0$ rezultă, ținînd seama că z este număr natural, $0 < z \leqslant 6$. Să observăm însă că putem scrie

$$x = 3 + \frac{7(1 - z)}{13} \qquad y = 2z + \frac{4(1 - z)}{13}$$

și cum x și y sînt numere naturale trebuie ca $1 - z$ să fie divizibil prin 13. Se vede că singurul număr $z \in (0, 6]$ care satisface această condiție este $z = 1$, pentru care se obține soluția $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, singura care satisface condițiile puse. Deci $A = \{(3, 2, 1)\}$.

652. *Fie x un număr oarecare din mulțimea $M = \{1, 2, ..., 12\}$ și se consideră următoarele evenimente:*

A = funcția f definită prin relația $f(t) = \log_{\frac{1}{2}} [(9t + 7) - C_t^3]$ este definită în $t = x$;

B = funcția g definită prin relația $g(t) = 2 \cdot C_{5t}^{2} - 7 \cdot C_{5-t}^{2}$ este definită în $t = x$.

Se cere să se scrie evenimentele următoare:
a) *funcția* $f+g$ *este definită în* $t=x$;
b) *cel puțin una din funcțiile* f, g *este definită în* $t=x$.

Soluție.

Mai întîi vom afla domeniile de definiție ale celor două funcții, fie acestea I și J. Din condiția

$$\frac{1}{2}(9t+7)-C_t^3>0 \quad \text{rezultă} \quad \frac{1}{2}(9t+7)-\frac{t(t-1)\cdot(t-2)}{6}>0$$

adică inecuația

$$t^3-3t^2-25t-21<0$$

și cum polinomul $P(t)$ din membrul stîng are rădăcinile $t_1=-3$; $t_2=-1$; $t_3=7$ semnul lui este indicat în

t	$-\infty$		-3		-1		7		∞
$P(t)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$

încît inecuația este satisfăcută pentru $t\in(-\infty,-3)\cup\cup(-1,7)$. Dacă ținem însă seama că t este un număr natural și $t\geqslant 3$ rezultă că $I=\{3,4,5,6\}$ și cum $I\subset M$ deducem că $A=\{3,4,5,6\}$.

Pentru a găsi domeniul de definiție J al funcției g vom pune mai întîi condițiile $5t-1\in N$ și $5t-1\geqslant 9$ adică $5t-1\in\{9,10,11,12,...\}$ de unde $5t\in\{10,11,12,...\}$ și $t\in\left\{2,\frac{11}{5},\frac{12}{5},.....\right\}$. Pe de altă parte, din condițiile $5-t\in N$ și $5-t\geqslant 2$ rezultă $t\in Z$, $t\leqslant 3$ adică $t\in\{...,-1,0,1,2,3\}$. Deducem că

$$J=\{....,-1,0,1,2,3\}\cap\left\{2,\frac{11}{5},\frac{12}{5},....\right\}=\{2,3\}$$

și cum $J\subset M$ înseamnă că $B=\{2,3\}$.

Evenimentul de la punctul a) va fi $A\cap B=\{3\}$ iar evenimentul de la punctul b) va fi $A\cup B=\{2,3,4,5,6\}$.

653. *Fie* M *mulțimea numerelor* p *reprezentînd produse de cîte 4 numere consecutive luate din mulțimea* $\{1,2,3,...,1\,000\}$ *și se consideră evenimentul*

A = p este un pătrat perfect.
Să se arate că A este evenimentul imposibil.

Soluție.

Arătăm că în general produsul a 4 numere naturale consecutive nu poate fi pătrat perfect. Avem

$$p = n(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3) = (n^2+3n)\cdot(n^2+3n+2) = \\ = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) = (n^2+3n+1)^2 - 1$$

de unde deducem dubla inegalitatc $(n^2+3n)^2 < p < (n^2+3n+1)^2$ care ne arată că numărul p este cuprins între pătratele a două numere naturale consecutive și prin urmare el nu are cum să fie un pătrat perfect.

654. *Se consideră mulțimea M formată din 10 polinoame* $P_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., 10)$, *cu coeficienți întregi, printre ele găsindu-se polinoame care dau în* $x = 0$ *ca rezultat un număr impar, polinoame care dau în* $x = 1$ *tot un număr impar și polinoame cu rădăcini întregi. Fie următoarele evenimente:*

A = polinomul dă pentru $x = 0$ *ca rezultat un număr impar;*

B = polinomul dă pentru $x = 1$ *ca rezultat un număr impar;*

C = polinomul are rădăcini întregi.

Să se arate că evenimentele A, B, C sînt incompatibile.

Soluție.

Evenimentul $A \cap B$ constă din acele polinoame din M care dau atît în $x = 0$ cît și în $x = 1$ ca rezultate numere impare. Fie un astfel de polinom $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \\ + ... + a_{n-1}x + a_n$; $(a_0, a_1, ..., a_n \in Z)$. Deoarece $P(0) = \\ = a_n = 2p + 1$ (număr impar) rezultă că eventualele rădăcini întregi ale polinomului vor fi numere impare. Să presupunem că $P(x) \in C$ deci are rădăcini întregi și fie, potrivit concluziei anterioare, $x_0 = 2m + 1$ una din ele. Atunci $P(x_0) = 0$ și prin urmare $\sum_{k=1}^{n} a_k(2m+1)^{n-k} = 0$. Cum dezvoltarea binomului $(2m+1)^{n-k}$ este un număr de forma $2q_k + 1$. toți termenii dezvoltării cu excepția ultimului

fiind pari, rezultă că $\sum_{k=1}^{n} a_k(2q_k + 1) = 0$ sau $2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot q_k + \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ rezultat absurd, deoarece din $P(x) \in B$ rezultă că $P(1) = \sum_{k=1}^{n} a_k =$ număr impar și deci suma de mai sus nu are cum să fie nulă.

Așadar $A \cap B \cap C = \Phi$ și evenimentele A, B, C sînt incompatibile.

655. *Fie mulțimea M, iar A și B două evenimente din ea. Cum se poate scrie evenimentul*

$C =$ „se realizează unul și numai unul din cele două evenimente“ ?

Soluție.

Fie $x \in M$ o probă care realizează evenimentul C, deci $x \in C$. Cum C constă în realizarea unui singur eveniment dintre A și B, rezultă că dacă proba respectivă realizează A, nu realizează B, iar dacă realizează B, nu realizează A. Prin urmare

$x \in A$ și $x \in \bar{B}$ sau $x \in \bar{A}$ și $x \in B$ adică $x \in (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$. Dar $A \cap \bar{B} = A - B$ și $\bar{A} \cap B = B - A$ încît $x \in (A - B) \cup (B - A)$ sau $x \in A \Delta B$. (Am utilizat notația $A \Delta B =$ diferența simetrică a mulțimilor A și B).

Așadar evenimentul $A \Delta B$ semnifică evenimentul care constă în realizarea unui singur eveniment dintre evenimentele A și B.

656. *Să se demonstreze că oricare ar fi evenimentele A, B din mulțimea M sînt valabile egalitățile*

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \qquad \text{(De Morgan)}$$

Soluție.

Demonstrăm prima dintre cele două egalități arătînd că, orice probă care realizează evenimentul $\overline{A \cup B}$, reali-

zează și evenimentul $\bar{A} \cap \bar{B}$ și reciproc. Fie $x \in M$ o probă care realizează evenimentul $\overline{A \cup B}$. Deci $x \in \overline{A \cup B}$ adică $x \in M$ și $x \notin A \cup B$ (x nu realizează „A sau B“) afirmație echivalentă cu următoarea
$x \in M$ și $x \notin A$ și $x \notin B$ (x nu realizează nici A, nici B) adică
$x \in \bar{A}$ și $x \in \bar{B}$ (x realizează simultan contrarele celor două evenimente) încît $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$.

Reciproc, fie $x \in M$ o probă care realizează evenimentul $\bar{A} \cap \bar{B}$. Deci $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ (x realizează simultan contrariul evenimentului A și contrariul evenimentului B). Înseamnă că $x \in M$ și $x \notin A$ și $x \notin B$, ceea ce este echivalent cu afirmația
$x \in M$ și $x \notin A \cup B$ (x nerealizînd niciunul din evenimentele A, B în mod sigur nu realizează evenimentul „A sau B“ $= A \cup B$ care, se știe, constă în realizarea a cel puțin unuia din ele). Rezultă că $x \in \overline{A \cup B}$ (nerealizînd evenimentul $A \cup B$, x realizează contrariul său).

Demonstrația egalității a doua urmează o cale analoagă celei de mai sus și o propunem ca exercițiu.

Observație. Se vede că exprimarea „se realizează ...“ sau „nu se realizează ...“ poate fi abandonată, încît proprietățile de acest gen se demonstrează urmînd exact aceeași modalitate ca în teoria mulțimilor.

b) *Cîmp finit de probabilitate*

657. *Se iau la întîmplare trei numere dintre primele 20 de numere naturale. Care este probabilitatea ca acestea să fie numere pitagorice (suma pătratelor a două din ele este egală cu pătratul celui de al treilea) ?*

Soluție.

Probele în acest caz fiind triplete de numere distincte formate din primele 20 de numere naturale, există C_{20}^{3} asemenea probe. Să vedem care este numărul de cazuri favorabile realizării evenimentului cerut și anume
$A =$ cele trei numere sînt pitagorice.
Selectînd dintre primele 20 de numere naturale pe cele pitagorice avem

$$A = \{(3, 4, 5); (6, 8, 10); (9, 12, 15); (12, 16, 20); (5, 12, 13); (8, 15, 17)\}$$

deci numărul cazurilor favorabile este $k = 6$. Prin urmare

$$P(A) = \frac{6}{C_{20}^3} = \frac{1}{190}.$$

658. *Se dau literele a, c, r, d. Care este probabilitatea ca trei dintre ele, luate la întîmplare, să formeze un cuvînt cunoscut ?*

Soluție.

Cum într-o grupare (probă) sînt trei litere, iar cuvîntul rezultat depinde de ordinea așezării literelor, numărul de probe ale experienței va fi A_4^3, evenimentul fiind

A = cele trei litere formează un cuvînt cunoscut

avem

$A = \{arc, car, rac, ard, dar, rad, cad, dac\}$,

deci sînt 8 cazuri favorabile realizării evenimentului încît

$$P(A) = \frac{8}{A_4^3} = \frac{1}{3}.$$

659. *Se iau la întîmplare 4 numere diferite din mulțimea primelor 7 numere naturale. Care este probabilitatea ca suma lor să fie un număr prim ?*

Soluție.

Fiecare probă a experienței este un sistem format din 4 numere diferite, luate dintre primele 7 numere naturale și cum ordinea în care ele sînt luate ne este indiferentă, deoarece suma de numere este comutativă, numărul de probe ale experienței va fi $n = C_7^4$. Să vedem acum care probe ale experienței realizează evenimentul

A = suma numerelor dintr-o probă este un număr prim.

Selectînd dintre primele 7 numere naturale sistemele de cîte 4 a căror sumă este un număr prim obținem

$$A = \{(1, 2, 3, 5); (1, 2, 3, 7); (1, 2, 4, 6); (1, 3, 4, 5); (1, 3, 6, 7); (1, 4, 5, 7); (1, 5, 6, 7); (2, 3, 5, 7); (2, 4, 5, 6); (2, 4, 6, 7); (3, 4, 5, 7)\}$$

Scanned with OKEN Scanner

deci $k = 11$ și prin urmare

$$P(A) = \frac{11}{C_7^4} = \frac{11}{35}.$$

660. *Dintre 10 persoane (6 bărbați și 4 femei) se iau 4 pentru a forma o echipă. Să se calculeze probabilitatea următoarelor evenimente:*

A = echipa să fie formată numai din bărbați;
B = echipa să conțină și femei;
C = echipa să conțină doi bărbați și două femei.

Soluție.

O probă a experienței fiind una (oarecare) din echipe, cum aceasta conține 4 persoane dintre cele 10, numărul probelor va fi C_{10}^4.

Evenimentul A constînd din mulțimea echipelor formate numai cu bărbați, cum fiecare echipă conține 4 dintre cei 6 bărbați existenți, vor exista $k = C_6^4$ asemenea echipe. Deci

$$P(A) = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}.$$

Evenimentul B este contrar evenimentului A așa că

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}.$$

Evenimentul C constînd din mulțimea echipelor care conțin cîte doi bărbați și două femei, fiecare element al său se va obține luînd împreună cu oricare pereche de bărbați din cei 6 (C_6^2 posibilități), pe rînd, toate perechile ce se pot forma cu cele 4 femei (C_4^2 posibilități); evenimentul C va conține deci $k = C_6^2 \cdot C_4^2$ și prin urmare

$$P(C) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}.$$

661. *O urnă conține 20 de bile fiecare din ele purtînd cîte un număr dintre primele 21 de numere naturale fără a lua și numărul 1. Se extrag din urnă simultan 4 bile. Se cere să se calculeze probabilitățile următoarelor evenimente:*

A = cele 4 numere așezate în ordine crescătoare să formeze o progresie aritmetică de rație 5;

B = cel puțin unul dintre numere să fie prim.

Soluție.

Probele experienței sînt grupe de cîte 4 bile luate dintre cele 20 existente în urnă, ordinea bilelor dintr-o grupă fiindu-ne indiferentă (dacă este nevoie, cum este în cazul evenimentului A, le așezăm în ordine după ce ele au fost extrase). Numărul probelor va fi $n = C_{20}^4$. Elementele evenimentului A fiind acele grupe de cîte 4 bile ale căror numere luate în ordine crescătoare formează o progresie aritmetică de rație 5 vom avea

$$A = \{(2, 7, 12, 17); (3, 8, 13, 18); (4, 9, 14, 19); (5, 10, 15, 20); (6, 11, 16, 21)\}$$

încît $k = 5$ și prin urmare

$$P(A) = \frac{5}{C_{20}^4} = \frac{1}{969}.$$

Pentru a calcula probabilitatea evenimentului B este comod să calculăm mai întîi probabilitatea evenimentului contrar acestuia

$\overline{B}$ = nici unul din cele 4 numere ale unei grupe nu este prim. Pentru aceasta să observăm că între primele 20 numere naturale sînt prime numerele următoare: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Cum această mulțime conține 8 elemente, numerele neprime vor fi în număr de $20 - 8 = 12$. Probele care realizează evenimentul $\overline{B}$ vor fi grupele de cîte 4 numere ce se pot forma cu aceste 12 numere neprime și vom avea $k = C_{12}^4$ asemenea grupe. Deci

$$P(\overline{B}) = \frac{C_{12}^4}{C_{20}^4} = \frac{33}{323} \text{ și prin urmare } P(B) = 1 - \frac{33}{323} = \frac{290}{323}.$$

662. *O urnă conține 3 bile albe, 4 bile negre și 5 bile roșii. Se extrag simultan 3 bile. Să se calculeze probabilitățile următoarelor evenimente:*

A = toate bilele să fie roșii;

B = *două bile să fie de aceeași culoare*.
C = *fiecare bilă să fie de altă culoare*;
D = *cel puțin două bile să fie de aceeași culoare*.

Soluție.

Elementele evenimentului *A* vor fi grupele de cîte trei bile ce se pot forma cu cele 5 bile roșii existente în urnă și care vor fi în număr de $k = C_5^3$. Cum mulțimea probelor experienței este formată din grupele de cîte trei bile luate din mulțimea tuturor bilelor din urnă, acestea fiind în număr de C_{12}^3, rezultă că $P(A) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}$.

Pentru a găsi numărul de elemente ale evenimentului *B*, care sînt grupe de cîte trei bile din care două au aceeași culoare, vom raționa astfel:

— dacă cele două bile sînt albe (C_3^2 posibilități) a treia bilă poate fi neagră (4 posibilități) sau roșie (5 posibilități), deci pot exista $9 \cdot C_3^2 = 27$ de grupe conținînd două bile albe;

— dacă cele două bile sînt negre (C_4^2 posibilități) a treia bilă poate fi albă (3 posibilități) sau roșie (5 posibilități), deci pot exista $3 \cdot C_4^2 = 48$ de grupe conținînd două bile negre;

— dacă cele două bile sînt roșii (C_5^2 posibilități) a treia bilă poate fi albă (3 posibilități) sau neagră (4 posibilități), deci pot exista $7 \cdot C_5^2 = 70$ de grupe conținînd două bile roșii.

Rezultă că evenimentul *B* conține $27 + 48 + 70 = 145$ de probe și prin urmare

$$P(B) = \frac{145}{C_{12}^3} = \frac{29}{44}.$$

Numărul de elemente (probe) ale evenimentului *C* care sînt grupe de cîte trei bile, fiecare avînd altă culoare, rezultă ținînd seamă că pot exista $3 \cdot 4 = 12$ perechi de bile una albă și una neagră, iar la fiecare astfel de pereche i se poate atașa o a treia bilă luată dintre cele roșii (5 posibilități). Așadar mulțimea *C* conține $12 \cdot 5 = 60$ de elemente și prin urmare

Scanned with OKEN Scanner

$$P(C) = \frac{60}{C_{12}^3} = \frac{3}{11}.$$

Evenimentul D fiind contrar cu evenimentul C probabilitatea lui va fi

$$P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}.$$

663. *Pe o masă se aruncă un zar de trei ori. Să se calculeze probabilitatea fiecăruia din evenimentele următoare:*

A = la fiecare din cele trei aruncări să apară același număr de puncte:

B = la fiecare din cele trei aruncări să apară un alt număr de puncte:

C = numărul total de puncte rezultate la cele trei aruncări să fie divizibil prin 7;

D = la cel puțin două aruncări să apară același număr de puncte.

Soluție.

Numărul total de probe ale experienței este egal cu numărul de elemente din produsul cartezian $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și va fi $n = 6^3 = 216$.

Se vede că $A = \{(1, 1, 1); (2, 2, 2); (3, 3, 3); (4, 4, 4); (5, 5, 5); (6, 6, 6)\}$ deci în acest caz $k = 6$ și $P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

Probele care realizează evenimentul B rezultă formînd sistemele de cîte trei numere diferite din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, iar acestea sînt în număr de $k = A_6^3 = 120$ încît

$$P(B) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}.$$

Pentru a găsi numărul probelor care realizează evenimentul C să pornim de la observația că numărul total de puncte rezultate la cele trei aruncări este cuprins între 3

și 18, iar între acestea singurele numere divizibile prin 7 sînt 7 și 14. Probele din care rezultă aceste sume sînt înfățișate în tabelele de mai jos:

pentru suma egală cu 7

prima aruncare	aruncarea a doua	aruncarea a treia
1	1	5
1	5	1
5	1	1
1	2	4
1	4	2
4	1	2
4	2	1
2	1	4
2	4	1
1	3	3
3	1	3
3	3	1
Total 12 probe		

pentru suma egală cu 14

prima aruncare	aruncarea a doua	aruncarea a treia
4	4	6
4	6	4
6	4	4
3	5	6
3	6	5
5	3	6
5	6	3
6	3	5
6	5	3
2	6	6
6	2	6
6	6	2
Total 12 probe		

În cazul evenimentului C vom avea deci $k = 24$ și $P(C) = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$.

Evenimentul D este contrar evenimentului B și prin urmare

$$P(D) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

664. *Dîndu-se ecuația* $x^2 - 6x - m + 7 = 0$ *se cere probabilitatea ca luînd parametrul* m *din mulțimea* $M = \{m | m \in Z, |m| < 8\}$ *ea să aibă rădăcini strict pozitive.*

Soluție.

Mai întîi vom pune condiția ca cele două rădăcini să fie reale. Aceasta este $\Delta = 9 + m - 7 = m + 2 \geqslant 0$ adică $m \geqslant -2$. Condiția ca cele două rădăcini să fie strict pozitive, ținînd seama că suma lor este 6 deci strict pozitivă, va fi ca și produsul lor să fie strict pozitiv, adică $P = -m + 7 > 0$ și $m < 7$. Rezultă că $m \in [-2, 7)$ și cum $m \in Z$ deducem că $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Așadar din mulțimea probelor experienței care este $M = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (deci $n = 15$) realizează evenimentul

A = rădăcinile ecuației sînt strict pozitive

un număr de $k = 9$ probe și prin urmare $P(A) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.

665. *Să se calculeze probabilitatea ca pentru ecuația* $mx^2 - 8x - m - 7 = 0$ *una din rădăcini să fie triplul celeilalte atunci cînd parametrul* m *ia o valoare întreagă arbitrară din* $[-5, 0)$.

Soluție.

Mulțimea probelor experienței este $M = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$ deci $n = 5$. Din condiția $x_1 = 3 \cdot x_2$ rezultă $x_1 + x_2 = 3x_2 + x_2 = 4x_2 = 8$ deci $x_2 = 2$ și $x_1 = 6$. Calculînd valoarea corespunzătoare pentru m, din condiția $x_1 \cdot x_2 = 12 = \frac{-m-7}{m}$ rezultă $13m = -7$ și $m = -\frac{7}{13} \notin Z$. Deci $A = \Phi$ și $P(A) = 0$.

666. *Dacă* m *este un număr întreg luat astfel ca* $|m| \leqslant 4$ *să se calculeze probabilitatea evenimentului*

A = *dubla inegalitate* $-1 \leqslant \frac{x^2 + mx}{x^2 + x + 2} \leqslant 2$ *este satisfăcută oricare ar fi* $x \in R$.

Soluție.

Mulțimea probelor fiind $M = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ deci $n = 9$ să determinăm probele evenimentului A. Observăm că trinomul $x^2 + x + 2$ este strict pozitiv

oricare ar fi $x \in R$, încît eliminînd numitorul inegalitatea dată ne dă sistemul de inecuații simultane

$$2x^2 + (m+1)x + 2 \geqslant 0 \text{ și } x^2 - (m-2)x + 4 \geqslant 0.$$

Deoarece trinoamele din membrul stîng al celor două inegalități au coeficienții termenilor de gradul II numere pozitive, condiția ca ele să fie pozitive pentru orice $x \in R$ impune ca discriminanții lor să fie negativi sau nuli. Deci

$\Delta_1 = (m+1)^2 - 16 = m^2 + 2m - 15 \leqslant 0$ de unde $m \in [-5, 3]$
și
$\Delta_2 = (m-2)^2 - 16 = m^2 - 4m - 12 \leqslant 0$ de unde $m \in [-2, 6]$.

Condițiile sînt satisfăcute simultan pentru
$m \in [-5, 3] \cap [-2, 6] = [-2, 3]$ și cum $m \in Z$ rezultă că $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ deci $k = 6$ și $P(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

667. *Se consideră ecuația de gradul I în necunoscuta x* $mx - 1 = m + x$ *și se cere să se calculeze probabilitatea ca ea să aibă rădăcină întreagă atunci cînd m ia o valoare oarecare întreagă din intervalul* $[-4, 5]$.

Soluție.

Mulțimea probelor este $M = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ deci $n = 10$ și fie evenimentul
$A =$ pentru m ales ecuația dată are rădăcină întreagă. Pentru a determina probele evenimentului A să observăm că rezolvînd ecuația avem $x = 1 + \frac{2}{m-1}$, iar condiția $x \in Z$ atrage după sine $\frac{2}{m-1} \in Z$ adică trebuie ca $m - 1$ să-l dividă pe 2, deci $m - 1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ și $m \in \{-1, 0, 2, 3\}$. Așadar $A = \{-1, 0, 2, 3\}$ cu $k = 4$ încît $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

668. *Se consideră expresia* $E = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2}$ *și se alege un număr x întreg arbitrar din intervalul* $[-1, 3]$.

Care este probabilitatea ca pentru x astfel luat fracția rezultată să fie reductibilă ?

Soluție.

Mulțimea probelor este $M = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ și fie evenimentul

$A =$ fracție rezultată este reductibilă

iar pentru a găsi probabilitatea lui vom porni de la observația că expresia E se mai poate scrie sub forma $E = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x + 1)}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 1)}$ și este reductibilă dacă $x^2 - 3x + 2 \neq 0$. Vom calcula probabilitatea evenimentului A cu ajutorul probabilității evenimentului contrar

$\bar{A} =$ pentru x ales fracția E nu se poate simplifica. Deoarece ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$ are rădăcinile $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ rezultă că $\bar{A} = \{1, 2\}$ deci $P(\bar{A}) = \frac{2}{5}$ încît $P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

669. *Fie ecuația* $4x^6 - 9x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 3x + 2 = 0$. *Care este probabilitatea ca luînd la întîmplare un număr* x *din mulțimea* $M = \left\{-3, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, 3\right\}$ *acesta să fie o rădăcină a ecuației date ?*

Soluție.

Mulțimea M are $n = 12$ probe și fie evenimentul

$A = x$ este o rădăcină a ecuației date.

Rezolvînd ecuația se găsesc următoarele rădăcini : $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = 2$; $x_{5,6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ și cum $x \in M$ rezultă că

$$A = \left\{-1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\} \text{ și deci } P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

670. *Se alege la întîmplare un număr din mulțimea* $M = \{-2, 1, 0, 3, 6\}$ *și se cere probabilitatea evenimentului* $A =$ *numărul ales este o soluție a ecuației* $2 \cdot \cos^2 \frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}$.

Soluție.

Deoarece oricare ar fi $x \in R$ sînt valabile inegalitățile $2 \cdot \cos^2 \frac{x^2+x}{6} \leqslant 2$ și $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$ ele nu pot coexista decît atunci cînd devin egalități, ceea ce are loc pentru $x = 0$. Deci $A = \{0\}$ și $k = 1$ încît $P(A) = \frac{1}{5}$.

671. *Care este probabilitatea ca luînd un număr oarecare din mulțimea primelor 100 de numere naturale acesta să fie rădăcină a ecuației* $9^x - 5^x - 4^x = 2\sqrt{20^x}$ *?*

Soluție.

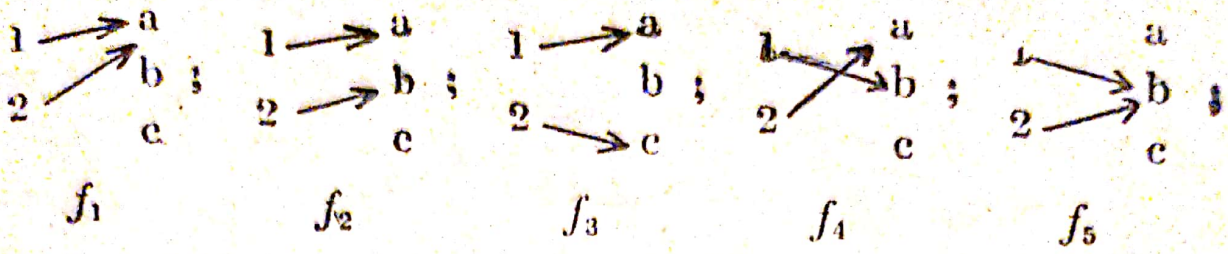
Avem $n = 100$ și fie evenimentul

$A =$ numărul ales este o rădăcină a ecuației date. Vom rezolva ecuația pentru a afla probele care realizează evenimentul A. Deoarece $9^x - 5^x - 4^x = 2 \cdot 2^x \sqrt{5^x}$ rezultă că $x = 2n$ (număr par) deci $9^{2n} - 5^{2n} - 4^{2n} = 2 \cdot 2^{2n} \cdot 5^n$ și $9^{2n} = (4^n + 5n)^2$ de unde $9^n = 4^n + 5^n$ și cum pentru orice $n > 1$ avem $9^n = (4+5)^n > 4^n + 5^n$ rezultă că $n = 1$ și deci $x = 2$. Așadar $A = \{2\}$, $k = 1$ și $P(A) = \frac{1}{100}$.

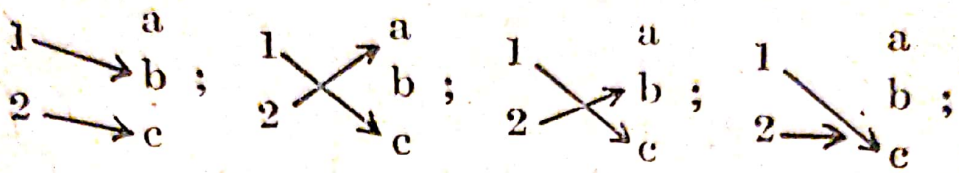
672. *Se consideră mulțimea funcțiilor definite pe mulțimea* $\{1, 2\}$ *și cu valori în mulțimea* $\{a, b, c\}$. *Care este probabilitatea ca o astfel de funcție să fie injectivă ?*

Soluție.

Probele în cazul de față sînt funcțiile enumerate mai jos,



f_1 f_2 f_3 f_4 f_5



f_6 f_7 f_8 f_9

și fie M mulțimea lor. Deci $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$ și $n = 9$. Să considerăm acum evenimentul

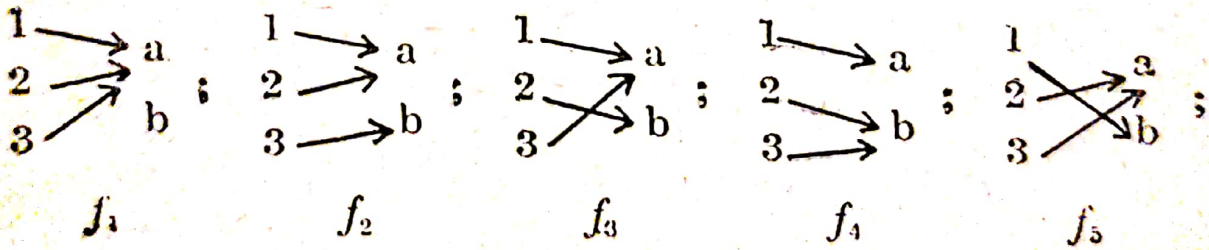
A = funcția este o injecție

și ținînd seamă că o funcție este injectivă dacă la elemente diferite din domeniu face să le corespundă imagini diferite în codomeniu, rezultă că $A = \{f_2, f_3, f_4, f_6, f_7, f_8\}$ deci $k = 6$ și $P(A) = \frac{2}{3}$.

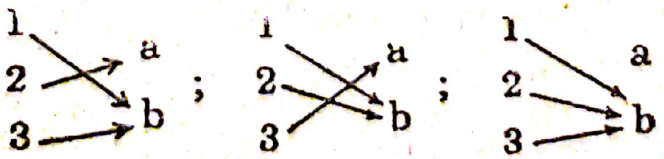
673. *Se consideră mulțimea funcțiilor definite pe mulțimea* $\{1, 2, 3\}$ *și cu valori în mulțimea* $\{a, b\}$. *Care este probabilitatea ca o astfel de funcție să fie surjectivă ?*

Soluție.

Probele acestei experiențe sînt funcțiile următoare



f_1 f_2 f_3 f_4 f_5



f_6 f_7 f_8

și deci mulțimea lor este $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ cu $n = 8$. Fie evenimentul

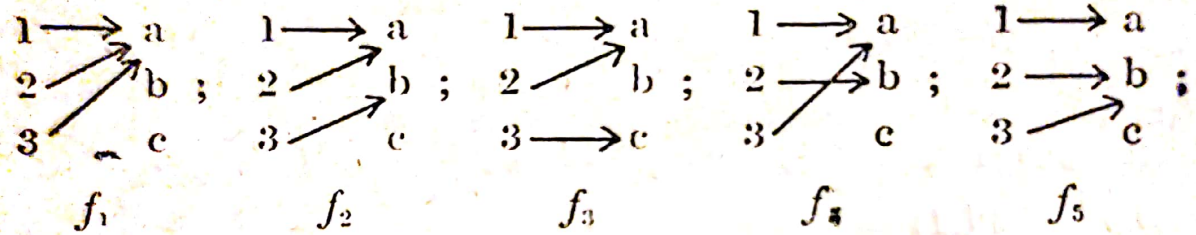
A = funcția este o surjecție.

Știind că o funcție este o surjecție dacă pentru fiecare element din codomeniu există un element în domeniu care îl are ca imagine prin funcția respectivă, se vede că $A = \{f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ cu $k = 6$ încît $P(A) = \frac{3}{4}$.

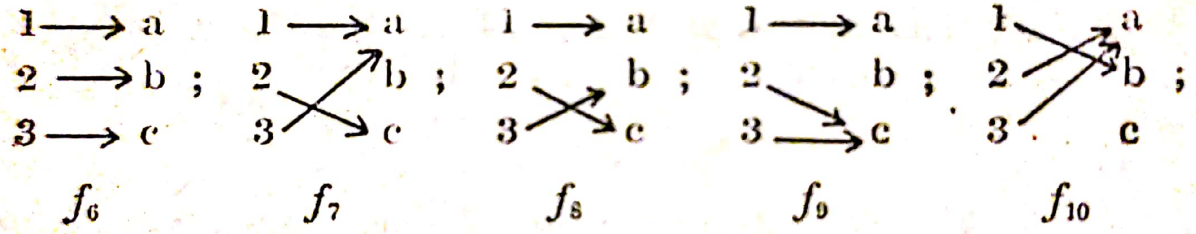
674. *Se consideră mulțimea funcțiilor definite pe mulțimea* $\{1, 2, 3\}$ *și cu valori în mulțimea* $\{a, b, c\}$. *Care este probabilitatea ca o astfel de funcție să fie bijectivă ?*

Soluție.

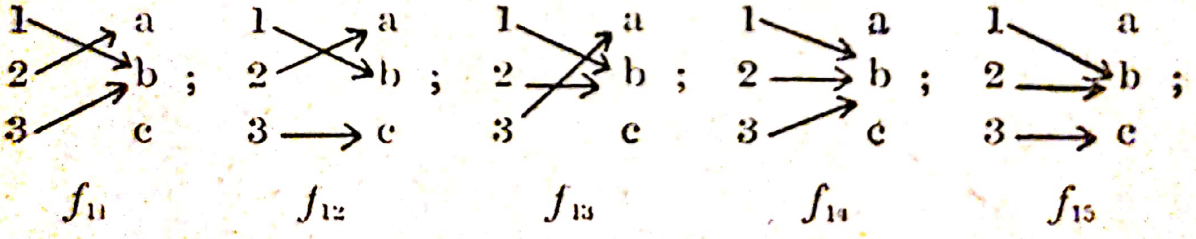
Probele experienței sînt următoarele funcții



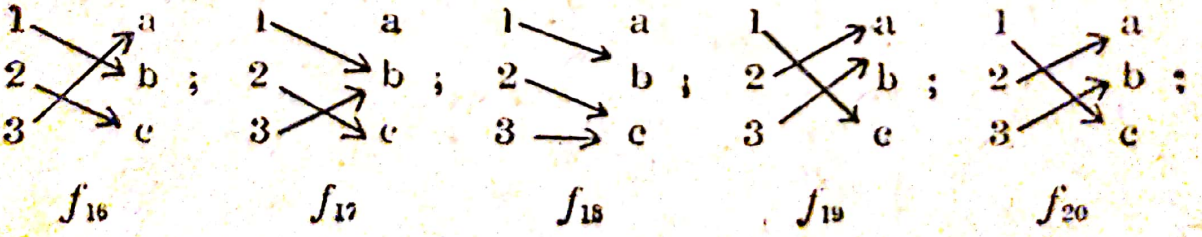
f_1 ; f_2 ; f_3 ; f_4 ; f_5



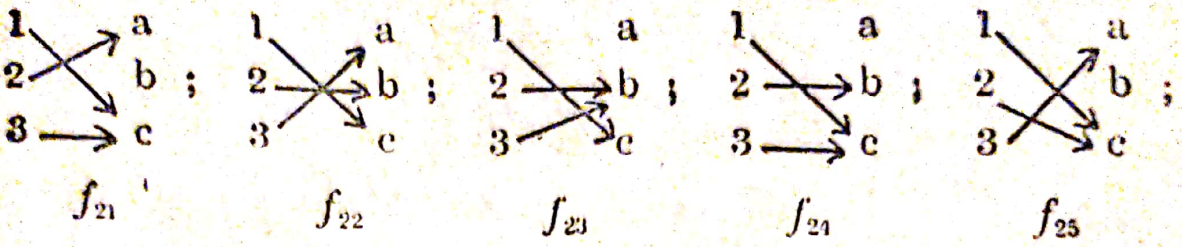
f_6 ; f_7 ; f_8 ; f_9 ; f_{10}



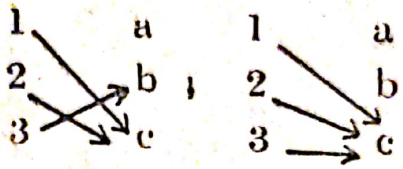
f_{11} ; f_{12} ; f_{13} ; f_{14} ; f_{15}



f_{16} ; f_{17} ; f_{18} ; f_{19} ; f_{20}



f_{21} f_{22} f_{23} f_{24} f_{25}



f_{26} f_{27}

încît mulțimea lor va fi

$M = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}, f_{16}, f_{17}, f_{18}, f_{19}, f_{20}, f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25}, f_{26}, f_{27}\}$ cu $n = 27$.

O funcție este bijectivă dacă este în același timp și injectivă și surjectivă; fie evenimentul

$A =$ funcția este bijectivă.

Se vede că

$$A = \{f_6, f_8, f_{12}, f_{16}, f_{20}, f_{22}\} \text{ cu } k = 6$$

și prin urmare

$$P(A) = \frac{2}{9}.$$

675. *Se ia la întîmplare un număr din mulțimea* $M = \left\{\frac{n}{3} \mid n = 1, 2, \ldots, 9\right\}$ *și se cere probabilitatea evenimentului* $A =$ *dînd lui* x *valoarea respectivă, expresia* $\ln(C_{3x}^2 - 5x^2 + 5)$ *are sens.*

Soluție;

Condiția ce trebuie pusă pentru ca expresia dată să aibă sens este

$$C_{3x}^2 - 5x^2 + 5 > 0 \text{ sau } \frac{3x(3x-1)}{2} - 5x^2 + 5 > 0$$

de unde inecuația $x^2+3x-10<0$ care este satisfăcută pentru $x \in (-5, 2)$ și cum trebuie ca $3x \in N$ rezultă că $x \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}$. Dar, pe de altă parte trebuie ca $3x \geqslant 2$ adică $x \geqslant \frac{2}{3}$ și prin urmare $A = \left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}$ deci $k = 4$. Mulțimea probelor fiind compusă din 9 elemente rezultă că $P(A) = \frac{4}{9}$.

676. *Dacă se ia un număr oarecare x din mulțimea primelor 10 numere naturale, care este probabilitatea evenimentului*

$A =$ *pentru x astfel luat expresia* $\sqrt{10 - C_x^2}$ *are sens?*

Soluție.

Condiția ca expresia dată să aibă sens este ca $10 - C_x^2 \geqslant 0$ din care rezultă inecuația $x^2 - x - 20 \leqslant 0$ care este satisfăcută dacă $x \in [-4, 5]$ și cum $x \in N$, $x \geqslant 2$ rezultă că $A = \{2, 3, 4, 5\}$. Deci $n = 10$, $k = 4$ și $P(A) = \frac{2}{5}$.

677. *Să se calculeze probabilitatea ca luînd un număr x din mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ expresia*

$$\frac{5}{2^{\log_x(x^2-6x+9)} - 3^{2\log_x\sqrt{x}-1}}$$

să aibă sens.

Soluție.

Vom face mai întîi cîteva observații. Deoarece $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geqslant 0$ prezența acestei expresii sub logaritm impune condiția $x \neq 3$; pe de altă parte, expresia $\log_x \sqrt{x}$ are sens dacă $x > 0$ și $x \neq 1$. Cu aceste condiții expresia dată are sens dacă numitorul ei este diferit de zero. Pentru a găsi valorile x pentru care el se anulează să observăm că avem $\log_x \sqrt{x} = \frac{1}{2}$ și deci

$3^{2\log_x\sqrt{x}-1} = 3^0 = 1$ și prin urmare numitorul expresie date se anulează dacă

$2^{\log_x(x^2-6x+9)} = 1$ adică $x^2 - 6x + 9 = 1$ de unde ecuația de gradul II : $x^2 - 6x + 8 = 0$ care are rădăcinile $x_1 = 2$; $x_2 = 4$.

În concluzie, expresia dată are sens dacă $x > 0$; $x \neq 1$; $x \neq 2$; $x \neq 4$. Aceasta înseamnă că $A = \{3, 5\}$ deci $k = 2$ și $P(A) = \frac{2}{5}$.

678. *Se consideră funcțiile* f : $[0, \pi] \to R$ *definite prin*

$$f(x) = \begin{cases} m \sin^2 x + 2 & \text{dacă} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 2m \cos x + m^2 & \text{dacă} \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

unde m *este un divizor al lui* 4. *Să se calculeze probabilitatea ca o astfel de funcție* f *să fie continuă.*

Soluție.

Se vede că $m \in M = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\}$ deci $n = 6$. Fie evenimentul

A = funcția f este continuă

și să vedem pentru ce valori ale parametrului m relația dată definește funcții continue. Mai întîi să observăm că oricare ar fi $m \in M$ restricția $m \sin^2 x + 2$ a funcției la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ este continuă ; de asemenea, restricția $2m \cos x + m^2$ a funcției f la intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ este continuă. Aceasta înseamnă că f poate avea, eventual, o discontinuitate în $x = \frac{\pi}{2}$. Să observăm că

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = m + 2 \quad \text{și} \quad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x) = m^2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

încît condiția de continuitate în $x=\frac{\pi}{2}$ va fi $m^2=m+2$ de unde ecuația de gradul II: $m^2-m-2=0$, cu rădăcinile $m_1=-1$; $m_2=2$ decît $A=\{-1, 2\}$, $k=2$ și $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

679. *Se consideră funcțiile* $f:(-10, 17)\to R$ *definite prin*

$$f(x)=\begin{cases} 3ax^3-2x^2+bx+7 & \text{dacă } x\in(-10, 1) \\ a(x^2+x-1)^2+2b(x^3-2)+14 & \text{dacă } x\in[1, 17) \end{cases}$$

unde a și b sînt numere din mulțimea primelor patru numere naturale. Să se calculeze probabilitatea ca o astfel de funcție să fie derivabilă.

Soluție.

Să observăm mai întîi că perechea de numere (a, b) se alege din produsul cartezian $\{1, 2, 3, 4\}\times\{1, 2, 3, 4\}$ care conține 16 elemente. Fie evenimentul

$A=$ funcția f este derivabilă

și să facem următoarele observații:

Oricare ar fi perechea de numere (a, b) dintre cele de mai sus restricțiile funcției f la subintervalele $(-10, 1)$, $(1, 17)$ sînt continue și derivabile. Problema pe care o avem de rezolvat este dacă f este derivabilă și în $x=1$. Pentru aceasta este necesar mai întîi ca f să fie continuă în $x=1$. Dar $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=3a+b+5$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=f(1)=a-2b+14$ și f va fi continuă în $x=1$ dacă $3a+b+5=a-2b+14$ de unde rezultă ecuația $2a+3b=9$.

Derivata funcției în $(-10, 17)-\{1\}$ este

$$f'(x)=\begin{cases} 9ax^2-4x+b & \text{dacă } x\in(-10, 1) \\ 2a(x^2+x-1)(2x+1)+6bx & \text{dacă } x\in(1, 17) \end{cases}$$

și avem $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x)=9a+b-4$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f'(x)=6a+6b$

încît funcția este derivabilă în $x = 1$ dacă $9a + b - 4 = 6a + 6b$ adică $3a - 5b = 4$. Cele două condiții trebuind să fie satisfăcute simultan obținem sistemul

$$\begin{cases} 2a + 3b = 9 \\ 3a - 5b = 4 \end{cases}$$ care are soluția $a = 3$; $b = 1$.

Deci $A = \{(3, 1)\}$, $k = 1$ și $P(A) = \frac{1}{16}$.

680. *Se consideră mulțimea matricelor de forma* $\begin{Vmatrix} 5 & a \\ b & 1 \end{Vmatrix}$ *în care* (a, b) *este un cuplu de numere aparținînd produsului cartezian* $K \times K$, K *fiind mulțimea întregilor din intervalul* $[-5, 5]$. *Care este probabilitatea ca luînd un astfel de cuplu inversa matricei corespunzătoare lui să fie de aceeași formă ?*

Soluție.

Considerînd două matrice din familia respectivă avem:

$$\begin{Vmatrix} 5 & a \\ b & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 5 & y \\ z & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$ de unde

$25 + az = 1$; $5b + z = 0$; $5y + a = 0$; $by + 1 = 1$. Din ultima relație rezultă $b = 0$ sau $y = 0$ iar din a doua și a treia relație avem corespunzător $z = 0$ sau $a = 0$. În ambele cazuri prima relație nu se verifică. Așadar probabilitatea cerută este zero.

681. *Se dă matricea*

$$X = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{Vmatrix}$$

unde x *este o rădăcină a ecuației* $x^n - 1 = 0$. *Să se calculeze probabilitatea ca luînd* $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *să avem* $X^4 = E$, *unde* E *este matricea unitate.*

Soluție.

Calculînd X^4 se obține

Scanned with OKEN Scanner

$$X^4 = \begin{Vmatrix} x^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^4 \end{Vmatrix}$$

de unde se vede că $X^4 = E$ dacă $x^4 = 1$ adică trebuie ca $n = 4$. Probabilitatea cerută va fi egală cu $\frac{1}{5}$.

682. *Se consideră matricea*

$$H = \begin{Vmatrix} 3-x & 2 & 3 \\ 5 & x+4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Să se calculeze probabilitatea ca luînd un număr oarecare x întreg din intervalul $[-3, 2]$ matricea corespunzătoare să fie inversabilă.

Soluție.

Mulțimea probelor este $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ deci $n = 6$ și fie evenimentul

$A =$ pentru x ales din M matricea este inversabilă. Deoarece condiția ca o matrice să admită inversă este ca ea să nu fie singulară (determinantul ei să nu fie nul) vom afla întîi probabilitatea evenimentului contrar lui A. Avem

$\det H = -x^2 + x + 2 = 0$ ecuație care are rădăcinile $x_1 = -2$; $x_2 = 1$ deci sînt două probe care realizează evenimentul A încît $P(\bar{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ și $P(A) = \frac{2}{3}$.

683. *Fie matricea*

$$H = \begin{Vmatrix} x-3 & 2 & -4 \\ x+4 & x-3 & 7 \\ 5 & -2 & x+6 \end{Vmatrix}$$

Care este probabilitatea ca luînd un întreg x oarecare cu $|x| \leqslant 3$, matricea corespunzătoare să fie inversabilă ?

Soluție.

Mulțimea probelor este $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ deci $n = 7$ și considerînd evenimentul

$\bar{A}$ = matricea este inversabilă

ca și în problema precedentă, vom da soluția calculînd probabilitatea evenimentului contrar $\bar{A}$ = matricea nu admite inversă (determinantul ei este nul). Deoarece

$\det H = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ are rădăcinile $x_1 = -2$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$ rezultă că $P(\bar{A}) = \frac{3}{7}$ și prin urmare

$$P(A) = \frac{4}{7}.$$

684. *Se consideră matricele*

$$H_1 = \begin{Vmatrix} x+3 & -2 \\ x & x-3 \end{Vmatrix} \quad H_2 = \begin{Vmatrix} x & -1 \\ 2 & x-3 \end{Vmatrix}$$

x fiind unul din primele 5 numere naturale. Să se calculeze probabilitatea ca produsul celor două matrice să fie comutativ.

Soluție.

Experiența are 5 probe și fie evenimentul

A = x este un număr pentru care produsul matricelor H_1, H_2 este comutativ.

Să observăm mai întîi că

$$H_1 \cdot H_2 = \begin{Vmatrix} x+3 & -2 \\ x & x-3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x & -1 \\ 2 & x-3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} x^2+3x-4 & -3x+3 \\ x^2+2x-6 & x^2-7x+9 \end{Vmatrix}$$

$$H_2 \cdot H_1 = \begin{Vmatrix} x & -1 \\ 2 & x-3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} x+3 & -2 \\ x & x-3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} x^2+2x & -3x+3 \\ x^2-x+6 & x^2-6x+5 \end{Vmatrix}$$

și punînd condiția $x^2 + 3x - 4 = x^2 + 2x$ obținem $x = 4$ pentru care

$$H_1 \cdot H_2 = H_2 \cdot H_1 = \begin{Vmatrix} 24 & -9 \\ 18 & -3 \end{Vmatrix}.$$

Deci $A = \{4\}$ și $P(A) = \frac{1}{5}$.

Scanned with OKEN Scanner

685. *În mulțimea Z a numerelor întregi se consideră următoarea lege de compoziție internă*

$$x * y = xy + 3(x + y) + a$$

unde $a \in \{t \mid t \in R,\ t^6 - 3t^5 - 18t^4 - t^2 + 3t + 18 = 0\}$. *Se cere probabilitatea ca luînd la întîmplare un astfel de număr* a, *legea dată să admită element neutru.*

Soluție.

Rezolvînd ecuația $t^6 - 3t^5 - 18t^4 - t^2 + 3t + 18 = 0$ se obțin rădăcinile reale $t_1 = -3$; $t_2 = -1$; $t_3 = 1$; $t_4 = 6$ deci $M = \{-3, -1, 1, 6\}$ cu $n = 4$.

Observînd că legea de compoziție dată este comutativă, ca admite element neutru, dacă există un număr întreg e astfel ca să fie valabilă egalitatea $x * e = x$ adică $ex + 3(e + x) + a = x$ oricare ar fi $x \in Z$, relație din care rezultă $x(e + 2) + 3e + a = 0$, egalitate valabilă pentru orice x dacă $e + 2 = 0$ și $3e + a = 0$, deci $e = -2$ și $a = 6$. Așadar, $A = \{6\}$ și $P(A) = \frac{1}{4}$.

686. *În mulțimea întregilor Z se consideră următoarea lege de compoziție internă*

$x * y = 2xy + 5(x + y) + a$ *cu* $a \in M$ *unde* M *este mulțimea formată din primii patru termeni ai unei progresii aritmetice cu termeni numere naturale, în care suma dintre primul termen și al patrulea este 11, iar produsul dintre primul termen și al treilea este 7. Să se calculeze probabilitatea ca legea dată să fie asociativă.*

Soluție.

Mulțimea M a probelor este $M = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ unde t_1, t_2, t_3, t_4 sînt primii patru termeni ai unei progresii aritmetice cu termeni întregi; condițiile date în legătură cu această progresie sînt

$$\begin{cases} t_1 + t_4 = 11 \\ t_1 \cdot t_3 = 7 \end{cases}$$

și se vede (din a doua relație), ținînd seama că termenii sînt numere naturale, că trebuie să avem $t_1 = 1$ și $t_3 = 7$ sau $t_1 = 7$ și $t_3 = 1$. Se deduce în cazul al

doilea că rația progresiei este $r = -3$ și $t_4 = -2 < 0$. Dacă luăm $t_1 = 1$ și $t_3 = 7$ rezultă că rația este egală cu 3 și $t_4 = 10$, rezultat convenabil. Prin urmare mulțimea probelor este $M = \{1, 4, 7, 10\}$ cu $n = 4$. Evenimentul considerat este

$A = a$ este astfel că legea de compoziție este asociativă.

Să considerăm acum numerele întregi arbitrare x, y, z. Avem pe de o parte

$$x * (y * z) = 2x(y * z) + 5(x + y * z) + a = 2x(2yz + 5y + 5z + a) + 5(x + 2yz + 5y + 5z + a) + a = 4xyz + 10xy + 10xz + 10yz + x(2a + 5) + 25y + 25z + 6a,$$

iar pe de altă parte

$$(x * y) * z = 2(x * y)z + 5(x * y + z) + a = 2(2xy + 5x + 5y + a)z + 5(2xy + 5x + 5y + a + z) + a = 4xyz + 10xz + 10yz + 10xy + 25x + 25y + z(2a + 5) + 6a$$

și punînd condiția de asociativitate $x * (y * z) = (x * y) * z$ rezultă că trebuie ca $2a + 5 = 25$ adică $a = 10$. Prin urmare $A = \{10\}$ și $P(A) = \frac{1}{4}$.

687. *În mulțimea numerelor întregi Z se consideră următoarea lege de compoziție internă*

$$x * y = 2xy + a(x + y) + 3 \qquad cu\ a \in M$$

unde M este mulțimea rădăcinilor ecuației $t^3 - 9t^2 + 2t + 48 = 0$ despre care se știe că are rădăcinile în progresie aritmetică. Să se afle probabilitatea ca legea dată să fie asociativă.

Soluție.

Rădăcinile t_1, t_2, t_3 fiind în progresie aritmetică sînt în relațiile $t_1 = t_2 - r$; $t_3 = t_2 + r$ (r = rația) și cum $t_1 + t_2 + t_3 = 9$; $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = -48$ deducem $t_1 = -2$; $t_2 = 3$; $t_3 = 8$ încît $M = \{-2, 3, 8\}$.

Să considerăm acum evenimentul

A = legea de compoziție este asociativă

și fie numerele întregi oarecare x, y, z. Vom avea

$$(x * y) * z = 2(x * y)z + a(x * y + z) + 3 = 2(2xy + ax + ay + 3)z + a(2xy + ax + ay + 3 + z) + 3 = 4xyz + 2axz + 2ayz + 2axy + a^2x + a^2y + (6 + a)z + 3(a + 1)$$

$$x * (y * z) = 2x(y * z) + a(x + y * z) + 3 = 2x(2yz + ay + az + 3) + a(x + 2yz + ay + az + 3) + 3 = 4xyz + 2axy + 2axz + 2ayz + a^2y + a^2z + (6 + a)x + 3(a + 1),$$

iar din condiția de asociativitate $(x * y) * z = x * (y * z)$ rezultă că $a^2 = a + 6$ de unde ecuația de gradul II $a^2 - a - 6 = 0$ cu rădăcinile $a_1 = -2$ și $a_2 = 3$ deci $A = \{-2, 3\}$, $k = 2$ și $P(A) = \frac{2}{3}$.

688. *În mulțimea R a numerelor reale definim legea de compoziție internă*

$x * y = axy + 3x + 3y + b$ *unde cuplul (a, b) de numere aparțin produsului cartezian $K \times K$ în care K este mulțimea numerelor întregi din segmentul $[-6, 6]$. Să se calculeze probabilitatea ca alegînd un astfel de cuplu legea de compoziție să fie asociativă.*

Soluție.

Deoarece $K = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ produsul cartezian $K \times K$ va conține 169 de elemente. Fie evenimentul

A = legea de compoziție este asociativă

și să considerăm numerele reale oarecare x, y, z. Avem

$$x * (y * z) = ax(y * z) + 3x + 3(y * z) + b = ax(ayz + 3y + 3z + b) + 3x + 3(ayz + 3y + 3z + b) + b = a^2xyz + 3a(xy + xz + yz) + (ab + 3)x + 9y + 9z + 4b,$$

$$(x * y) * z = a(x * y)z + 3(x * y) + 3z + b = az(axy + 3x + 3y + b) + 3(axy + 3x + 3y + b) + 3z + b = a^2xyz + 3a(xz + yz + xy) + 9x + 9y + (ab + 3)z + 4b$$

Scanned with OKEN Scanner

și punînd condiția de asociativitate $x * (y * z) = (x * y) * z$ rezultă că trebuie ca $ab + 3 = 9$ adică $ab = 6$; ținînd seama că numerele a și b sînt întregi obținem următoarele cupluri care satisfac $(-6, -1)$; $(-1, -6)$; $(-3, -2)$; $(-2, -3)$; $(2, 3)$; $(3, 2)$; $(1, 6)$; $(6, 1)$. Acestea sînt tocmai elementele evenimentului A deci $k = 8$.

Prin urmare $P(A) = \frac{8}{169}$.

689. *În mulțimea R_+ a numerelor reale pozitive se consideră legea de compoziție internă*

$$x * y = \frac{x + y}{xy + a}$$

unde a este un număr oarecare din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Se cere probabilitatea ca legea de compoziție dată să fie asociativă.

Soluție

Evenimentul în cazul de față este $A = a$ este astfel că legea de compoziție este asociativă. Fie numerele reale pozitive oarecare x, y, z. Avem

$$(x * y) * z = \frac{(x * y) + z}{(x * y)z + a} =$$

$$= \frac{\frac{x + y}{xy + a} + z}{\frac{(x + y)z}{xy + a} + a} = \frac{x + y + xyz + az}{xz + yz + axy + a^2},$$

$$x * (y * z) = \frac{x + (y * z)}{x(y * z) + a} =$$

$$= \frac{x + \frac{y + z}{yz + a}}{\frac{x(y + z)}{yz + a} + a} = \frac{y + z + xyz + ax}{xy + xz + ayz + a^2}$$

Scanned with OKEN Scanner

și punînd condiția de asociativitate $(x * y) * z = x * (y * z)$ obținem

$$\frac{x + y + xyz + az}{xz + yz + axy + a^2} = \frac{y + z + xyz + ax}{xy + xz + ayz + a^2}$$

de unde, efectuînd înmulțirile și reducerile de termeni,

$$x^2y(a^2 - 1) + xy^2(a - 1) + x^2y^2z(a - 1) + x^2z(a-1) + xz^2(1 - a) + xy^2z^2(1 - a) + y^2z(1 - a) + yz^2(1 - a^2) + x(a^3 - a^2) + z(a^2 - a^3) = 0$$

sau

$$(a - 1)[x^2y(a + 1) + xy^2 + x^2y^2z + x^2z - xz^2 - xy^2z^2 - y^2z - yz^2(a + 1) + a^2x - a^2z] = 0$$

egalitate valabilă pentru orice sistem x, y, z de numere din R_+ dacă $a = 1$. Așadar, $A = \{1\}$ deci $P(A) = \frac{1}{5}$.

690. *În mulțimea R_+ se consideră următoarea lege de compoziție internă*

$$x * y = \frac{2x + ay}{axy + 1}$$

unde a este un divizor pozitiv al lui 12. Care este probabilitatea evenimentului

A = pentru a ales legea de compoziție este comutativă.

Soluție.

Mulțimea probelor este $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Fie numerele x, y oarecare din R_+. Avem

$$x * y = \frac{2x + ay}{axy + 1} \quad \text{și} \quad y * x = \frac{2y + ax}{ayx + 1}$$

și punînd condiția de comutativitate $x * y = y * x$ rezultă că

$$\frac{2x + ay}{axy + 1} = \frac{2y + ax}{ayx + 1} \text{ de unde}$$

$2ax^2y + 2x + a^2xy^2 + ay = 2axy^2 + 2y + a^2x^2y + ax$ sau $axy^2(a-2) - ax^2y(a-2) - (a-2)x + (a-2)y = 0$ adică $(a-2)\cdot(axy^2 - ax^2y - x + y) = 0$ și cum x, y au fost luate arbitrar, egalitatea are loc numai dacă $a = 2$. Deducem că $A = \{2\}$ deci

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

691. *Se consideră inelul* $I_1 = (Z, +, \cdot)$ *și inelul* $I_2 = (Z, \oplus, \odot)$ *unde* $x \oplus y = x + y - 3$ *și* $x \odot y = xy - 3(x + y) + 12$. *Fie o funcție* $f : I_1 \to I_2$ *definită prin relația* $f(x) = ax + b$ *perechea* (a, b) *fiind un element al mulțimii* $K \times K$ *unde* $K = \{1, 2, 3\}$. *Se cere probabilitatea evenimentului* $A =$ *perechea de numere* (a, b) *este astfel că funcția* f *realizează un izomorfism al celor două inele.*

Soluție.

Mulțimea de probe fiind $M = K \times K$ va conține $n = 9$ elemente. Să facem mai întîi observația că funcția f este bijectivă. Pentru ca ea să realizeze un izomorfism al celor două inele va trebui, în plus, să satisfacă următoarele condiții

$$f(x + y) = f(x) \oplus f(y) \text{ și } f(xy) = f(x) \odot f(y)$$

adică

$$\begin{cases} a(x + y) + b = (ax + b) + (ay + b) - 3 \\ axy + b = (ax + b)(ay + b) - 3(ax + b + ay + b) + 12. \end{cases}$$

Din prima relație rezultă $b = 3$, iar din a doua, înlocuind valoarea lui b, $a = 1$. Așadar, $A = \{(1, 3)\}$, $k = 1$ și

$$P(A) = \frac{1}{9}.$$

692. *Se aruncă un zar de două ori. Care este probabilitatea ca suma dintre numărul de puncte de la prima aruncare și numărul de puncte de la a doua aruncare să fie un număr par sau un număr prim ?*

Soluție.

Numărul de probe ale experienței este numărul de elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ adică $n = 36$. Fie evenimentele

A = suma rezultată la cele două aruncări este un număr par;

B = suma rezultată la cele două aruncări este un număr prim. Se vede că

$A = \{(1, 3); (3, 1); (1, 5); (5, 1); (2, 4); (4,2); (2, 6); (6, 2); (3, 5); (5, 3); (4, 6); (6, 4)\}$,

$B = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (1, 4); (4, 1); (1, 6); (6, 1); (2, 3); (3, 2); (2, 5); (5, 2); (3, 4); (4, 3); (5, 6); (6, 5)\}$

și probabilitatea celor două evenimente este $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{5}{12}$. Cum evenimentele A și B sînt incompatibile rezultă că

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} = \frac{3}{4}.$$

693. *Un cub are două fețe vopsite în roșu, o față vopsită în alb, două fețe albastre și o față împărțită în trei părți vopsite una cu roșu, una cu alb și ultima cu albastru. Care este probabilitatea ca aruncînd pe o masă acest cub, fața superioară să conțină culoarea roșie sau albă ?*

Soluție.

Considerăm evenimentele

A = fața superioară conține culoarea roșie;

B = fața superioară conține culoarea albă.

Deoarece sînt trei fețe pe care se află culoarea roșie și două pe care se află culoarea albă rezultă că $P(A) = \frac{1}{2}$ și $P(B) = \frac{1}{3}$; deoarece există o față care realizează evenimentul $A \cap B$ probabilitatea cerută va rezulta aplicînd relația lui Boole deci

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

694. *Să se calculeze probabilitatea ca luînd un număr întreg din intervalul* $[-1, 9]$ *acesta să fie o rădăcină pentru cel puțin una din ecuațiile*

$$12.\ C_{x+2}^{x-1} = 55 \cdot A_{x+1}^{2};\quad x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x}).$$

Soluție.

Mulțimea probelor este $M = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ și fie evenimentele

A = numărul $x \in M$ verifică prima ecuație;

B = numărul $x \in M$ verifică ecuația a doua.

Prima ecuație este echivalentă cu $12 \cdot C_{x+3}^{4} = 55 \cdot A_{x+1}^{2}$ de unde ecuația $(x+3)(x+2) = 110$ cu rădăcina $x = 8$. Deci $A = \{8\}$ și $P(A) = \frac{1}{11}$.

În ecuația a doua dacă notăm $x^x = y$ rezultă $y - \frac{1}{y} = 3\left(1 + \frac{1}{y}\right)$ adică $y^2 - 3y - 4 = 0$ cu rădăcinile $y_1 = 4$ și $y_2 = -1$ de unde $x_1 = 2$ și $x_2 = -1$ deci

$$B = \{-1, 2\};\qquad P(B) = -\frac{2}{11}.$$

Cum cele două evenimente sînt incompatibile, probabilitatea evenimentului cerut va fi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{11} + \frac{2}{11} = \frac{3}{11}.$$

695. *Se dă ecuația* $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$ *și ecuația* $2x^4 - x^3 - 14x^2 + ax - 6 = 0$ *care are două rădăcini inverse. Se cere să se calculeze probabilitatea ca luînd un număr întreg* x *din intervalul* $[-3, 4]$ *el să fie rădăcină pentru cel puțin una din cele două ecuații.*

Soluție.

Mulțimea probelor este $M = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ și fie evenimentele

A = numărul $x \in M$ verifică ecuația $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$,

B = numărul $x \in M$ verifică ecuația $2x^4 - x^3 - 14x^2 + ax - 6 = 0$.

Dacă în prima ecuație notăm $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = y$ atunci $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = \frac{1}{y}$ și ecuația devine $y + \frac{1}{y} = 4$ sau $y^2 - 4y + 1 = 0$ cu rădăcinile $y_1 = 2 + \sqrt{3}$ și $y_2 = 2 - \sqrt{3}$ încît $x_1 = 2$ și $x_2 = -2$ deci $A = \{-2, 2\}$ și $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

În ecuația a doua, deoarece $x_1 \cdot x_2 = 1$ și $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -6$ rezultă că $x_3 \cdot x_4 = -3$ și atunci vom avea sumele Viète

$$S_1 = (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = \frac{1}{2},$$

$$S_2 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 = -7$$

de unde sistemul

$$\begin{cases} (x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = \frac{1}{2} \\ (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4) = -5 \end{cases}$$

din care rezultă $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$ și $x_3 + x_4 = -2$. Obținem deci sistemele

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 + x_4 = -2 \\ x_3 \cdot x_4 = -3 \end{cases}$$

cu rădăcinile $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$; $x_4 = 1$ încît

$B = \{-3, 1, 2\}$ și $P(B) = \frac{3}{8}$. Deoarece evenimentele A și B sînt compatibile, $A \cap B = \{2\}$, rezultă că

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

PROBABILITĂȚI

EXERCIȚII PROPUSE

696. *Se consideră mulțimea* $M = P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7\}$ *formată din următoarele poligoane:* P_1 = *pentagon cu un unghi drept;* P_2 = *trapez convex isoscel;* P_3 = *paralelogram;* P_4 = *dreptunghi;* P_5 = *romb;* P_6 = *pătrat;* P_7 = *triunghi dreptunghic. Să se scrie evenimentele următoare, atunci cînd luăm la întîmplare un element din mulțimea* M:

A = *poligonul are un unghi drept;*

B = *poligonul este un patrulater cu două laturi paralele;*

C = *poligonul este un patrulater cu diagonalele egale;*

D = *poligonul este un patrulater cu diagonalele perpendiculare.*

697. *Se dă mulțimea* $M = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ *și se ia arbitrar un număr* x *din această mulțime. Să se scrie următoarele evenimente:*

$A = x$ *este un număr prim;*

$B = x$ *este un pătrat perfect;*

$C = x$ *este un divizor al lui 30;*

$$D = \left\{ x \,\middle|\, \frac{8x - 17}{2x - 5} \in Z \right\};$$

$$E = \{x \,|\, |x - 1| + 2x - 5| \leqslant 3\}.$$

698. *Fie mulțimea* $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *și* x *un număr oarecare din această mulțime. Să se scrie următoarele evenimente:*

$$A = \{x \,|\, |x^2 - 5x + 5| \leqslant 1\}$$

$$B = \left\{ x \,\middle|\, \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 7} \in Z \right\}$$

iar apoi să se scrie evenimentele $A \cup B$; $A \cap B$; $\bar{A}$; $\bar{B}$; $A - B$; $B - A$; $A \Delta B$.

699. *Se ia la întîmplare un număr* x *dintre primele 15 numere naturale. Care este probabilitatea evenimentului*

$$A = \text{expresia} \sqrt[4]{\frac{x^2 - 5x - 6}{x - 2 - 1}} + \sqrt{\log_7 (x^2 - 21x + 21)}$$

are sens pentru x *ales.*

700. *Dacă* A, B, C *sînt evenimente din* M *să se demonstreze că:*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$A - B = A - (A \cap B)$$
$$A - B = (A \cup B) - B$$
$$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$$
$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

701. *Fie mulțimea de numere* $\{1, 2, 3, 4\}$ *și* M *mulțimea permutărilor lor. Să se calculeze probabilitățile următoarelor evenimente:*

A = *permutarea conține un număr și numai unul în poziție neschimbată;*

B = *permutarea conține cel puțin un număr în poziție neschimbată.*

702. *La un strung se execută zilnic 100 de piese dintre care 7 sînt rebuturi. Care este probabilitatea ca luînd un eșantion de 20 de piese, printre ele să fie și rebuturi.*

703. *Se aruncă un zar de 3 ori. Care este probabilitatea următoarelor evenimente:*

A = *să obținem trei numere consecutive în ordine crescătoare;*

B = *să obținem de două ori numărul 4;*

C = *să obținem cel puțin o dată numărul 5.*

704. *Se aruncă un zar de trei ori. Să se calculeze probabilitățile următoarelor evenimente:*

A = cele trei numere sînt diferite astfel că unul din ele este egal cu media aritmetică a celorlalte două;

B = cele trei numere sînt diferite astfel că unul din ele este egal cu media geometrică a celorlalte două:

C = cel puțin unul din cele trei numere este un divizor propriu al lui 15;

D = cel puțin unul din cele trei numere este prim.

705. Se aruncă un zar de 5 ori. Care este probabilitatea ca la aruncarea a doua sau a patra să se obțină un număr care este un divizor propriu al lui 15.

706. O urnă conține bile albe și 7 bile negre. Care este probabilitatea următoarelor evenimente:

A = extrăgînd simultan două bile ele să fie de culori diferite.

B = dacă extragem o bilă și fără a o pune la loc în urnă mai extragem încă una, aceasta să fie albă.

707. Fie mulțimea $M = \{x \mid x \in Z, \mid x - 1 \mid \leqslant 2\}$. Să se calculeze probabilitatea evenimentului

A = pentru $\in M$ avem $\dfrac{2x^2 - x + 5}{x^2 - x + 2} \in Z$.

708. Dacă se ia o pereche de numere (a, b) din mulțimea $I \times I$ unde $I = \{1, 2, 3, 4\}$ să se calculeze probabilitatea ca șirul cu termenul general

$$u_n = \sqrt{n^2 + 4n + 1} - an - b$$

să aibă limită finită.

709. Se consideră mulțimea $M = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ formată din funcțiile definite pe $[0, \pi]$ cu valori în axa reală R prin relațiile:

$$f_1(x) = 2x + 5;\ f_2(x) = 2x + \mid x \mid;\ f_3(x) = \sin x;$$
$$f_4(x) = x^2 + \mid x \mid;\ f_5(x) = \cos x.$$

Dacă se ia la întîmplare una din aceste funcții, să se afle probabilitatea ca ea să fie injectivă.

Scanned with OKEN Scanner

710. *Se consideră funcțiile* $f : R \to R$ *definite prin*

$$f(x) = \begin{cases} a^2x - 5a + 4 & \text{pentru } x < 1, \\ x^2 - 3 & \text{pentru } x \geqslant 1, \end{cases}$$

unde a este un număr oarecare din mulțimea {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. *Să se calculeze probabilitatea ca funcția corespunzătoare să fie continuă.*

711. *O urnă conține 20 de bile numerotate de la 11 la 20. Se extrage o bilă și se cere să se afle probabilitatea ca numărul de pe ea să fie un număr par nedivizibil prin 3 sau un număr impar divizibil prin 3.*

712. *Dacă se ia la întîmplare un număr x din mulțimea primelor 10 numere naturale care este probabilitatea ca să aibă sens una și numai una din expresiile*

$$C_{15-2x}^{x} \quad , \qquad C_{-31+12x-x^2}^{x-3}$$

713. *Se consideră sistemul de ecuații*

$$\begin{aligned} (a-1)x - y + (a-2)z &= 4a - 9 \\ 5x + ay + 8z &= 2a + 29 \\ (a-6)x - 2y - 5z &= a - 25 \end{aligned}$$

în care a este un element oarecare a mulțimii $\{a \mid a \in Z, |a^2 - a - 9| \leqslant 3\}$. *Să se calculeze probabilitatea ca sistemul să fie compatibil determinat.*

714. *În mulțimea R a numerelor reale se consideră legea de compoziție internă* $x * y = ax + by + cxy$ *unde* (a, b, c) *este un triplet de numere din mulțimea* $I \times I \times I$ *cu* $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Să se calculeze probabilitatea ca luînd un astfel de triplet legea dată să fie asociativă.*

715. *Referitor la un sistem rectangular de axe xoy fie parabola* $y = x^2 - x - 2$. *Se consideră aria suprafeței delimitată de această parabolă, punctul* $Q(2, 0)$, *axa ox și o paralelă* $x = a$ *la axa oy. Să se calculeze probabilitatea ca această arie să fie mai mare sau cel puțin egală cu* $\frac{62}{3}$ *atunci cînd a ia o valoare oarecare din mulțimea* {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

ÎN ATENȚIA CITITORILOR

Din cauza unor deficiențe de imprimare, facem următoarele precizări:

P. 21, r. 16—18 sus se vor citi: $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \overline{x \in A \cup B} \Leftrightarrow \overline{(x \in A) \vee (x \in B)} \Leftrightarrow \overline{(x \in A)} \wedge (x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (x \notin A) \wedge (x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \wedge (x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

P. 104, r. 7 jos se va citi: $\mathbf{C}_Z N, \mathbf{C}_Z Z_-, \mathbf{C}_Z Z_+^0, \mathbf{C}_Z Z^0, \mathbf{C}_R R_+, \mathbf{C}_R R_+^0, \mathbf{C}_R R_-, \mathbf{C}_R R_-^0$.

P. 104, r. 4 jos se va citi: $\mathbf{C}_Z N = Z_-, \mathbf{C}_Z Z_- = Z_+^0, \mathbf{C}_Z Z_+^0 = Z_-, \mathbf{C}_Z Z^0 = N^*$.

P. 104, r. 3 jos se va citi: $\mathbf{C}_R R_+ = R^0, \mathbf{C}_R R_- = R_+^0, \mathbf{C}_R R_-^0 = R_+, \mathbf{C}_R I = Q, \mathbf{C}_R Q = I$.

P. 125, r. 7 sus se va citi: $\mathcal{P}(A \cap B) \subset$ în loc de $\mathcal{P}(A \cap B) \cup$.

P. 143, r. 4, 6, 7, 8 sus se vor citi: a) $\overline{B} - \overline{(A \cup B)} = A - B$; c) $(A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \overline{(A \cup B)} = \overline{(A - B)}$; d) $\overline{(\overline{A} - \overline{B})} \cup (\overline{B} - \overline{A}) \cup (A \cap B) = A \cup B$; e) $\overline{(A - \overline{B})} \cap \overline{(B - \overline{A})} \cap A \cap B = \varnothing$.

P. 176, r. 2 jos se va citi: $x \mathcal{R} y: ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \ldots$

P. 177, r. 1 sus se va citi: $x_1, x_1', x_2, x_2', x_3, x_3', y_1, y_2, y_3, \ldots$

P. 177, r. 2 sus se va citi: $\ldots x_1 \neq x_1', x_2 \neq x_2', x_3 \neq x_3', y_1 \neq y_2, \ldots$

P. 177, r. 3—4 sus se vor citi: $\ldots (x_1, y_1), (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_2', y_2) (x_3, y_3), (x_3', y_3)$.

P. 178, r. 4 sus se va citi: $\ldots x_1$ și $x_1', \ldots$

P. 178, r. 12—14 sus se vor citi: $cy_1^2 - ey_1 + f = 0, cy_2^2 + ey_2 + f = 0, cy_3^2 + ey_3 + f = 0$.

P. 178, r. 16—17 sus se vor citi: $c(y_1^2 - y_2^2) + e(y_1 - y_2) = 0, c(y_2^2 - y_3^2) + e(y_2 - y_3) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

P. 178, r. 13 jos se va citi: ... $cy_1^2 + ey_1 + f = 0$ ...

P. 181, r. 7 sus se va citi: ... $3\mathcal{R}_1 1$ și $1\mathcal{R}_1 4$ ...

P. 198, r. 10 jos se va citi: a) $x^2 + xy + y^2 = 0$

P. 308, r. 11 sus se va citi: B_8'. $x \cap \bar{x} = 0$

P. 308, r. 12 sus se va citi: B_9. $\overline{x \cup y} = \bar{x} \cap \bar{y}$, ...

B_9'. $\overline{x \cap y} = \bar{x} \cup \bar{y}$, ...

P. 310, r. 8 sus se va citi: ... seama că $x \cup \tilde{x} = i$, ...

P. 310, r. 11 sus se va citi: $x \cap (x \cup \tilde{x}) = (\bar{x} \cap x) \cup$

$\cup (\bar{x} \cap \tilde{x})$.

P. 310, r. 18 sus se va citi: $\tilde{x} \cap (x \cup x) = x = \tilde{x} \cap x$.

P. 310, r. 19 sus se va citi: $\tilde{x} \cap \tilde{x} = \tilde{x} \cap x$ ...

P. 310, r. 7 jos se va citi: $\overline{x \cap y} = \bar{x} \cup \bar{y}$.

P. 312, r. 11 jos se va citi: Deci $f(\bar{x}) = \overline{f(x)}$.

P. 360, r. 11 sus se va citi: ... $x \oplus \bar{0} = x \Leftrightarrow x + \bar{0} - 1 = x =$ ...

P. 360, r. 11 jos se va citi: ... $= x \Leftrightarrow x\bar{1} -$ ...

P. 360, r. 3 jos se va citi: ... sau $y = 1 \Leftrightarrow x = \bar{0}$

P. 362, r. 14 jos se va citi: ..., atunci $x \odot \bar{1} = \bar{1} \odot x = x$, ...

P. 379, r. 5 jos se va citi: ... rădăcinile $\bar{i}$,

P. 380, r. 6 jos se va citi: ... $\bar{0} = 1$.

P. 438, r. 1 sus se va citi: ... $\overline{A} \cap \overline{B}$ ...

P. 438, r. 7 sus se va citi: $x \in \overline{A}$ și $x \in \overline{B}$ ...

P. 454, r. 7 jos se va citi: Dar, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 3a + b + 5$ și ...

P. 449, r. 7 sus se va citi: ... și $P(A) = \frac{2}{3}$.

P. 452, r. 1 jos se va citi: $\log_x \sqrt{\bar{x}} = \frac{1}{2}$ ...

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Introducere V

I. Elemente de teoria mulțimilor 1
Exerciții rezolvate 24
Exerciții propuse 137

II. Relații 149
Exerciții rezolvate 153
Exerciții propuse 198

III. Funcții 203
Exerciții rezolvate 213
Exerciții propuse 283

IV. Structuri algebrice 302
Exerciții rezolvate 313
Exerciții propuse 398

V. Probabilități 406
Exerciții rezolvate 418
Exerciții propuse 467

Lista bibliografică 471

Scanned with OKEN Scanner

4 = 28

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : CORNEL CRISTESCU

Bun de tipar 3. XII. 1975. Apărut 1975. Comanda nr. 865. Tiraj : 80 000 broşate. Coli de tipar : 30.

Tiparul executat sub comanda nr. 308 la Întreprinderea Poligrafică Iaşi, str. Vasile Alecsandri nr. 6.
REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMANIA

Scanned with OKEN Scanner

COLECȚIA LYCEUM

Lei 6

Autorii realizează, în cuprinsul acestui volum, o prezentare unitară a noțiunilor de teorie a mulțimilor, a structurilor algebrice și de calculul probabilităților.

Lucrarea se axează, cu precădere, pe unele probleme introduse recent în programele școlare și este astfel structurată încît cuprinde o parte teoretică, una de exerciții rezolvate și ultima cu exerciții propuse spre rezolvare.

Volumul se adresează elevilor din liceele teoretice și de specialitate, fiind util pentru activitatea din cadrul orelor de clasă și a cercurilor de matematică.

Scanned with OKEN Scanner